第 38 卷 第 5 期
2008 年 9 月
吉 林 大 学 学 报 (工 学 版)
Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)
Vol. 38 No. 5
Sept. 2008

具有不完全特征向量系的状态向量摄动的快速算法

杨　荣[1],王　乐[2],徐　涛[3],于　澜[4],鞠　伟[3],徐天爽[3]

(1.吉林大学 数学学院,长春 130012;2.吉林大学 汽车工程学院,长春 130022;3.吉林大学 机械科学与工程学院,长春 130022;4.长春工程学院 理学院,长春 130012)

摘　要:对具有不完全特征向量系的 n 自由度一般黏性阻尼的线性振动系统,针对当系统参数进行局部小修改,即产生摄动变化时模态分析工作复杂的问题,本文根据广义特征向量及伴随矩阵理论,提出并构造了一个求解状态向量摄动问题的快速算法。在已知原始解(摄动前)的基础上,只需逐个代入递推计算,无需解大型方程组便可求出状态向量或特征向量的摄动量。数值算例证明了此方法的有效性。

关键词:工程力学;不完全特征向量系;线性振动;黏性阻尼;状态方程;摄动;模态分析

中图分类号:O302　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-5497(2008)05-1101-04

Sensitivity of state vector of a defective system

YANG Rong[1], WANG Le[2], XU Tao[3], YU Lan[4], JÜ Wei[3], XU Tian-shuang[3]

(1. *College of Mathematics, Jilin University, Changchun* 130012, *China*; 2. *College of Automotive Engineering, Jilin University, Changchun* 130022, *China*; 3. *College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun* 130022, *China*; 4. *College of Science, Changchun Institute of Technology, Changchun* 130012, *China*)

Abstract: A fast method of calculating the state vector derivatives of a defective system is presented based on the theory of generalized eigenvector and adjoint matrix. The state vector derivatives are expressed by a linear combination of generalized eigenvectors, and the expansion coefficients can be obtained by a recursion algorithm instead of solving large-scale equations based on eigensolutions of original system. The numerical example is given to prove the efficiency of the method.

Key words: engineering mechanics; incomplete eigenvector set; linear vibration; viscous damping; state equation; perturbation; modal analysis

动力特征向量的灵敏度在结构优化、振动控制以及损伤识别等领域都有比较广泛的应用。现有的实用理论和方法都做了系统完全的假设,但在许多实际问题中,如具有非比例阻尼矩阵或在非保守力作用下的结构动力分析及气动弹性颤振分析等问题,系统有可能是不完全的,即系统不存在完全的特征向量系足以张满整个特征空间。因此,计算亏损系统的特征向量灵敏度有其实用价值。对完全系统,文献[1]研究了实对称系统模态的灵敏度问题,此方法及其改进是将特征向量灵

收稿日期:2007-08-21.

基金项目:高等学校博士学科点专项科研基金项目(20050183018);吉林大学“985 工程”项目.

作者简介:杨荣(1958-),男,副教授.研究方向:数值计算. E-mail:yangrong@jlu.edu.cn

通信作者:徐涛(1955-),女,教授,博士生导师.研究方向:结构振动分析及优化设计理论. E-mail:xutao@jlu.edu.cn

敏度用特征向量的线性组合表示,通过求解组合系数得到灵敏度的值。虽然这类方法算法简单,但对大型结构,要知道所有的特征向量几乎是不可能的。Nelson法[2]解决了这个问题,这种方法只需要知道待求灵敏度的特征向量。对于亏损系统的情况,文献[3]提出了广义模态的概念,讨论了广义模态的正交性,并导出了亏损系统的频响函数矩阵和脉冲响应表达式。文献[4]在广义模态理论的基础上,建立了线性亏损系统的矩阵摄动理论。文献[5]创建了一族两自由度亏损系统,并讨论了其特征灵敏度。文献[6]基于摄动解的Puiseux展开,提出一种计算特征向量一阶、二阶导数的模态展开法。文献[7]讨论了接近亏损系统的摄动理论。文献[8]将接近亏损系统特征向量灵敏度的求解问题简化为某一亏损系统的摄动问题,简化了计算。

本文根据状态方程的广义特征向量理论及矩阵伴随空间的结论,针对不完全特征向量系的黏性阻尼线性振动系统,构造了一个快速求解状态向量导数展开式系数的算法,为简便、稳定地计算状态向量摄动量提供了有效方法。

1 线性振动系统的模态分析与灵敏度转化

设 n 自由度一般黏性阻尼的线性振动系统的运动方程为

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\boldsymbol{x}}\}+[\mathbf{C}]\{\dot{\boldsymbol{x}}\}+[\mathbf{K}]\{\boldsymbol{x}\}=\{\boldsymbol{f}\} \tag{1}$$

式中:$[\mathbf{M}]$、$[\mathbf{C}]$和$[\mathbf{K}]$分别为质量、阻尼和刚度矩阵;$\{\boldsymbol{x}\}$为响应向量;$\{\boldsymbol{f}\}$为载荷向量。

将时域上的运动方程进行拉普拉斯变换,取变量为 p,并假定初始位移和初始速度都为0,得方程

$$(p^2[\mathbf{M}]+p[\mathbf{C}]+[\mathbf{K}])\{\boldsymbol{x}(p)\}=\{\boldsymbol{F}(p)\} \tag{2}$$

这时式(2)的动刚度矩阵为

$$[\mathbf{Z}(p)]=p^2[\mathbf{M}]+p[\mathbf{C}]+[\mathbf{K}]$$

称式(1)对应的特征方程为

$$\det[\mathbf{Z}(p)]=0 \tag{3}$$

此特征方程的根(特征值)称为系统的极点。对 n 自由度一般黏性阻尼的线性振动系统来说,设它的特征值为 $s_1,s_2,\cdots,s_n$,其中每个特征值所对应的特征向量称为模态向量,记为$\{\boldsymbol{\varphi}_1\},\{\boldsymbol{\varphi}_2\},\cdots,\{\boldsymbol{\varphi}_n\}$,统称原系统的特征解对。设系统(1)的第 i 个特征值为 s_i,引入状态向量$\{\boldsymbol{u}_i\}=\begin{bmatrix}\{\boldsymbol{\varphi}_i\}\\ s_i\{\boldsymbol{\varphi}_i\}\end{bmatrix}_{2n\times 1}$,并令

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}\\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\end{bmatrix}_{2n\times 2n}$$

称 $\mathbf{A}$ 为系统(1)的状态矩阵,可以验证有

$$\mathbf{A}\{\boldsymbol{u}_i\}=s_i\{\boldsymbol{u}_i\},\ i=1,2,\cdots,2n \tag{4}$$

这样,模态分析中的极点和模态向量求解问题就分别转化为状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值和相应的右特征向量求解问题。

考虑摄动问题,假设系统的质量、阻尼和刚度矩阵 $\mathbf{M}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{K}$ 都是 q 个参数(设计变量)$\{\boldsymbol{b}\}=\{b_1,b_2,\cdots,b_q\}$的函数,当参数发生一些小的变化时,则第 i 个极点 s_i 和相应的模态向量$\{\boldsymbol{\varphi}_i\}$也将发生相应的变化。关于 s_i 的摄动问题已经有相当多的求解方法,这里略。本文只考虑$\{\boldsymbol{\varphi}_i\}$或者$\{\boldsymbol{u}_i\}$在特征向量系不完全时的快速摄动方法。

设$\{\tilde{\boldsymbol{u}}_i\}$,$\{\tilde{\boldsymbol{b}}\}$分别为变化后的特征向量和参数向量。$\{\tilde{\boldsymbol{u}}_i\}$是$\{\tilde{\boldsymbol{b}}\}$的函数,将$\{\tilde{\boldsymbol{u}}_i\}$作泰勒参数展开,只取一次项近似,得

$$\{\tilde{\boldsymbol{u}}_i\}\approx\{\boldsymbol{u}_i\}+\frac{\partial\{\boldsymbol{u}_i\}}{\partial\{\boldsymbol{b}\}}(\{\tilde{\boldsymbol{b}}\}-\{\boldsymbol{b}\})^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

其中

$$\frac{\partial\{\boldsymbol{u}_i\}}{\partial\{\boldsymbol{b}\}}=[\{\boldsymbol{u}_i\}_{,1},\{\boldsymbol{u}_i\}_{,2},\cdots,\{\boldsymbol{u}_i\}_{,q}]\in C^{2n\times q} \tag{6}$$

且$\{\cdot\}_{,j}=\dfrac{\partial(\cdot)}{\partial b_j}$,称式(6)为第 i 阶状态向量的梯度或灵敏度向量。那么工程上模态分析理论中的灵敏度分析均以式(6)所定义的模态向量的梯度为基础。

现在实现了从模态分析和灵敏度分析转化为状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征问题和梯度求解问题。

2 具有不完全特征向量系的状态向量的快速梯度求解方法

对状态矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}\\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\end{bmatrix}$$

求其特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{2n}$,如果对某一特征值 λ_i,其几何重数小于代数重数时,称 $\mathbf{A}$ 具有不完全的特征向量系。

为讨论方便,记 $N=2n$。本文仅考虑 $\mathbf{A}$ 有 N 重特征值 $\boldsymbol{\lambda}$,且其几何重数小于代数重数时状态

向量的梯度求解,此时,**A** 具有不完全特征向量系。

对 N 重特征值 $\boldsymbol{\lambda}$,因为特征子空间的维数小于 N,所以根据若当标准形理论,**A** 的特征问题为

$$\mathbf{AU} = \mathbf{UJ} \tag{7}$$

其中

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix} \tag{8}$$

且可逆矩阵 $\mathbf{U}=[\{\boldsymbol{u}_1\}\ \{\boldsymbol{u}_2\}\ \cdots\ \{\boldsymbol{u}_N\}]_{N\times N}$,伴随的特征问题可相应写为

$$\mathbf{A}^{H}\mathbf{V} = \mathbf{VJ}^{H} \tag{9}$$

式中:$(\cdot)^{H}$ 表示共轭转置;$\mathbf{V}=[\{\boldsymbol{v}_1\},\{\boldsymbol{v}_2\},\cdots,\{\boldsymbol{v}_N\}]_{N\times N}$称为伴随矩阵,满足正则性条件

$$\mathbf{V}^{H}\mathbf{U} = \mathbf{UV}^{H} = \mathbf{E} \tag{10}$$

即

$$\{\boldsymbol{v}_j\}^{H}\{\boldsymbol{u}_i\} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \tag{11}$$

根据矩阵 **U** 的可逆性可知,其各列$\{\boldsymbol{u}_1\},\cdots,\{\boldsymbol{u}_N\}$是线性无关的,被称为广义特征向量。根据式(7)的展开式有

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{A})\{\boldsymbol{u}_1\} = 0 \\ (\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{A})\{\boldsymbol{u}_i\} = \{\boldsymbol{u}_i - 1\} \end{cases} \tag{12}$$
$$i = 2,\cdots,N$$

考虑梯度问题及参数向量$\{\boldsymbol{b}\}^{T}=\{b_1,\cdots,b_q\}^{T}$,相应的状态矩阵的特征方程记为

$$\mathbf{A}(b)\mathbf{U}(b) = \mathbf{U}(b)\mathbf{J}(b)$$

其中

$$\mathbf{J}(b) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1(b) & 1 & & \\ & \boldsymbol{\lambda}_2(b) & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \boldsymbol{\lambda}_N(b) \end{bmatrix}$$

为了讨论方便,改写式(7)中的矩阵 **J** 为

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + \mathbf{P}$$

其中

$$\mathbf{P} = [\{\mathbf{0}\}\ \{\boldsymbol{e}_1\}\ \cdots\ \{\boldsymbol{e}_{N-1}\}]_{N\times N}$$

而$\{\boldsymbol{e}_i\}=\{\overbrace{0\ \cdots\ 0\ 1}^{i行}\ 0\ \cdots\ 0\}^{T}$ 为单位向量,则式(7)可改写为

$$\mathbf{AU} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + \mathbf{P})$$

展开有

$$\begin{gathered} \mathbf{A}[\{\boldsymbol{u}_1\}\ \{\boldsymbol{u}_2\}\ \cdots\ \{\boldsymbol{u}_N\}] = \\ [\{\boldsymbol{u}_1\}\ \{\boldsymbol{u}_2\}\ \cdots\ \{\boldsymbol{u}_N\}](\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + \\ [\{\mathbf{0}\}\ \{\boldsymbol{e}_1\}\ \cdots\ \{\boldsymbol{e}_{N-1}\}]) = \\ [\boldsymbol{\lambda}\{\boldsymbol{u}_1\}\ \boldsymbol{\lambda}\{\boldsymbol{u}_2\}\ \cdots\ \boldsymbol{\lambda}\{\boldsymbol{u}_N\}] + \\ [\{\mathbf{0}\}\ \mathbf{U}\{\boldsymbol{e}_1\}\ \cdots\ \mathbf{U}\{\boldsymbol{e}_{N-1}\}] \end{gathered} \tag{13}$$

将式(13)两端按列对应相等,有

$$\begin{cases} \mathbf{A}\{\boldsymbol{u}_1\} = \boldsymbol{\lambda}\{\boldsymbol{u}_1\} \\ \mathbf{A}\{\boldsymbol{u}_i\} = \boldsymbol{\lambda}\{\boldsymbol{u}_i\} + \mathbf{U}\{\boldsymbol{e}_{i-1}\} \end{cases} \tag{14}$$
$$i = 2,3,\cdots,N$$

为计算梯度,对式(13)($i\neq1$)两端关于 b_j 求偏导,整理有

$$\begin{gathered} (\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E})\{\boldsymbol{u}_i\}_{,j} = \\ (\boldsymbol{\lambda}_{i,j}\mathbf{E} - \mathbf{A}_{,j})\{\boldsymbol{u}_i\} + \mathbf{U}_{,j}\{\boldsymbol{e}_{i-1}\} \end{gathered} \tag{15}$$

由于$\{\boldsymbol{u}_1\},\{\boldsymbol{u}_2\},\cdots,\{\boldsymbol{u}_N\}$线性无关,可将$\{\boldsymbol{u}_i\}_{,j}$在 N 维线性空间中表示为

$$\{\boldsymbol{u}_i\}_{,j} = \sum_{l=1}^{N} c_{ijl}\{\boldsymbol{u}_l\},\ j = 1,\cdots,q \tag{16}$$

式中:c_{ijl}为组合系数。

为求组合系数,对 $U_{,j}$按列分块有

$$\mathbf{U}_{,j} = [\{\boldsymbol{u}_1\}_{,j}\{\boldsymbol{u}_2\}_{,j}\ \cdots\ \{\boldsymbol{u}_N\}_{,j}] \tag{17}$$

将式(16)、式(17)代入式(15),并左乘$\{\boldsymbol{v}_l\}^{H}$,$l=1,2,\cdots,N-1$,有

$$\begin{gathered} \{\boldsymbol{v}_l\}^{H}(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E})\sum_{l=1}^{N} c_{ijl}\{\boldsymbol{u}_l\} = \\ \{\boldsymbol{v}_l\}^{H}(\boldsymbol{\lambda}_{i,j}\mathbf{E} - \mathbf{A}_{,j})\{\boldsymbol{u}_i\} + \{\boldsymbol{v}_l\}^{H}\mathbf{U}_{,j}\{\boldsymbol{e}_{i-1}\} \end{gathered} \tag{18}$$

关于式(18)等号右边的最后一项,根据正则化条件式(11),有

$$\begin{gathered} \{\boldsymbol{v}_l\}^{H}\mathbf{U}_{,j}\{\boldsymbol{e}_{i-1}\} = \\ \{\boldsymbol{v}_l\}^{H}[\{\boldsymbol{u}_1\}_{,j}\{\boldsymbol{u}_2\}_{,j}\ \cdots\ \{\boldsymbol{u}_N\}_{,j}]\{\boldsymbol{e}_{i-1}\} = \\ \{\boldsymbol{v}_l\}^{H}\left[\sum_{l=1}^{N} c_{1jl}\{\boldsymbol{u}_l\}\ \sum_{l=1}^{N} c_{2jl}\{\boldsymbol{u}_l\}\ \cdots\ \sum_{l=1}^{N} c_{Njl}\{\boldsymbol{u}_l\}\right]\cdot \\ \{\boldsymbol{e}_{i-1}\} = [c_{1jl}, c_{2jl}, \cdots, c_{Njl}]\{\boldsymbol{e}_{i-1}\} = c_{(i-1)jl} \end{gathered} \tag{19}$$

将式(19)代回式(18),可得展开系数

$$c_{ij(l+1)} = \{\boldsymbol{v}_l\}^{H}(\boldsymbol{\lambda}_{i,j}\mathbf{E} - \mathbf{A}_{,j})\{\boldsymbol{u}_i\} + c_{(i-1)jl}$$
$$l = 1,2,\cdots,N-1 \tag{20}$$

由于式(14)是以$\{\boldsymbol{u}_i\}_{,j}$为未知量,以$(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E})$为系数矩阵的线性方程组。又秩$(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E})=N-1$,故此方程组有无穷多组解,且有一个自由未知量。不妨取 c_{ij1}作为自由未知量,或为简便直接取 $c_{ij1}=1$,$l=1,2,\cdots,N-1$,在式(20)中逐个代入便可求出组合系数 c_{ijl}。

同理,当 $i=1$ 时,类似上面的过程,可得

$$c_{1j(l+1)} = \{\boldsymbol{v}_l\}^{H}(\boldsymbol{\lambda}_{1,j}\mathbf{E} - \mathbf{A}_{,j})\{\boldsymbol{u}_1\} \tag{21}$$
$$l = 1,2,\cdots,N-1$$

并取 $c_{1j1}=1$,利用式(21),逐个代入便可快速求出全部组合系数 c_{ijl}。

综上所述,快速求解具有不完全特征向量系的状态向量梯度过程算法步骤归纳如下:

(1)取 $c_{1j1}=1$,并根据式(21)求解 $c_{1j(l+1)}$, $l=1,2,\cdots,N-1$。

(2)取 $c_{ij1}=1$, $i=2,3,\cdots,N$,根据式(20)计算系数 $c_{ij(l+1)}$, $l=1,2,\cdots,N-1$。

(3)将步骤(1)和(2)中求得的系数代入式(16),得到$\{\boldsymbol{u}_i\}_{,j}$再代入式(6)或式(5)。

(4)取式(16)中$\{\boldsymbol{u}_i\}_{,j}$的前 n 个分量,即可得到式(5)所定义的梯度。

3 算 例

假设一系统的状态矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3\xi-1 & -\xi^2+\xi & 0 & 2\xi-1 \\ 0 & 2\xi & 1/\xi & 1/\xi \\ 1 & -\xi & \xi^2+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \xi+1 \end{bmatrix}$$

式中:ξ为设计变量;在这里 $\mathbf{A}$ 也可以由多个设计变量决定,为方便,假设 $\mathbf{A}$ 只由 ξ 决定。当取 $\xi=1$ 时,矩阵 $\mathbf{A}$ 化为 $\mathbf{A}_0$

$$\mathbf{A}_0=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

可计算得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$,若当标准型为

$$\mathbf{J}_0=\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

可知此时($\xi=1$)系统亏损。运用本文的方法求取的组合系数 c_{il}和特征向量导数分别见表1和表2。

表1 组合系数

Table 1 Expansion coefficients

l	c_{1l}	c_{2l}	c_{3l}	c_{4l}
1	1	1	1	0
2	0	1	9	0
3	1	0	−3	0
4	0	1	2	0

表2 特征向量导数

Table 2 Eigenvector derivatives

$\{\boldsymbol{u}_1\}_{,\xi}$	$\{\boldsymbol{u}_2\}_{,\xi}$	$\{\boldsymbol{u}_3\}_{,\xi}$	$\{\boldsymbol{u}_4\}_{,\xi}$
2	2	1	2
1	2	3	2
0	0	1	2
0	0	2	1

4 结束语

为求解黏性阻尼线性振动系统状态方程的特征问题,建立了快速计算状态向量摄动量的方法。该方法利用矩阵伴随空间理论,将广义特征向量求解方程组降耦,避开了常用的求解大规模线性方程组计算,采用逐个递推直接获得组合系数,具有计算简便、过程稳定、误差小的特点。数值算例证明了算法的有效性。

参考文献:

[1] Fox R L, Kapoor M P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors[J]. AIAA Journal, 1968, 6: 2426-2429.

[2] Nelson R B. Simplified calculations of eigenvector derivatives[J]. AIAA Journal, 1976, 14: 1201-1205.

[3] 时国勤,诸德超. 线性振动亏损系统的广义模态理论[J]. 力学学报, 1989, 21(2):183-192.
Shi Guo-qin, Zhu De-chao. The generalized mode theory of linear structural vibration defective systems[J]. ACTA Mechanica Sinica, 1989, 21(2): 183-192.

[4] 陈塑寰,徐涛,韩万芝. 线性振动亏损系统的矩阵摄动理论[J]. 力学学报,1992,24(6):747-752.
Chen Su-huan, Xu Tao, Han Wan-zhi. Matrix perturbation for linear vibration defective systems[J]. ACTA Mechanica Sinica, 1992,24(6):747-752.

[5] Luongo A. Free vibration and sensitivity analysis of a defective two degree-of-freedom system[J]. AIAA Journal , 1995,33 (1):120-127.

[6] Zhang Z Y, Zhang H S. Calculation of eigenvalue and eigenvector derivatives of a defective matrix[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006,176: 7-26.

[7] 徐涛,陈塑寰,赵建华. 接近亏损系统的矩阵摄动法[J]. 力学学报,1998, 30(4):503-507.
Xu Tao, Chen Su-huan, Zhao Jian-hua. Perturbation method of near defective systems[J]. ACTA Mechanica Sinica, 1998, 30(4):503-507.

[8] Luongo A. Eigensolutions of perturbated nearly defective matrices[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995,185 (3): 377-395.