

传热学

Heat transfer

张靖周

能源与动力学院

第三章

非稳态导热

3-1 非稳态导热的基本概念

一、现象和定义

自然界和工程上许多导热过程为非稳态， $t = f(\tau)$

例如：冶金、热处理与热加工：工件被加热或冷却

锅炉、内燃机、燃气轮机等装置起动、停机、变工况

自然环境温度 供暖或停暖过程中墙内与室内空气温度

温度场随时间发生变化的导热过程

二、非稳态导热分类

非稳态导热：周期性和非周期性（瞬态导热）

周期性非稳态导热：物体温度按一定的周期发生变化

例如：墙体温度昼夜的变化

非周期性非稳态导热（瞬态导热）：物体的温度随时间不断地升高（加热过程）或降低（冷却过程），在经历相当长时间后，物体温度逐渐趋近于周围介质温度，最终达到热平衡

例如：热铁块投入凉水中

三、瞬态导热过程简介

平壁内温度场的变化过程

■ 设有一定壁厚的平壁，初始温度为 T_i ，将其左侧表面的温度突然加热升高到 T_w 并维持不变，而右侧表面仍与温度为 T_i 的空气相接触。

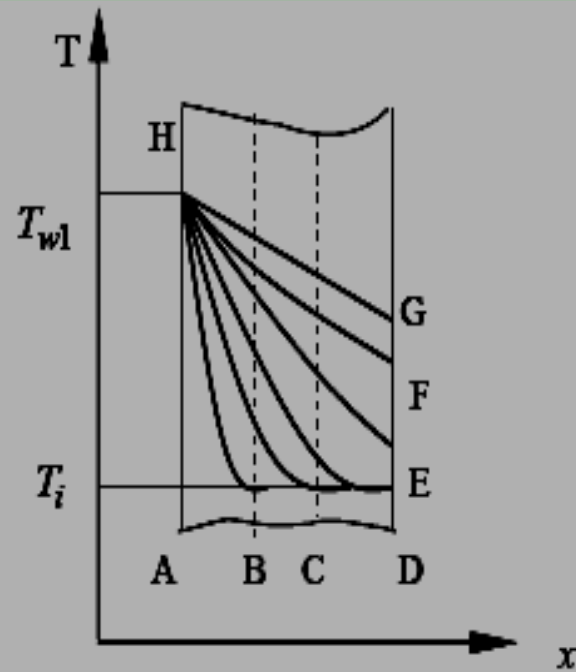
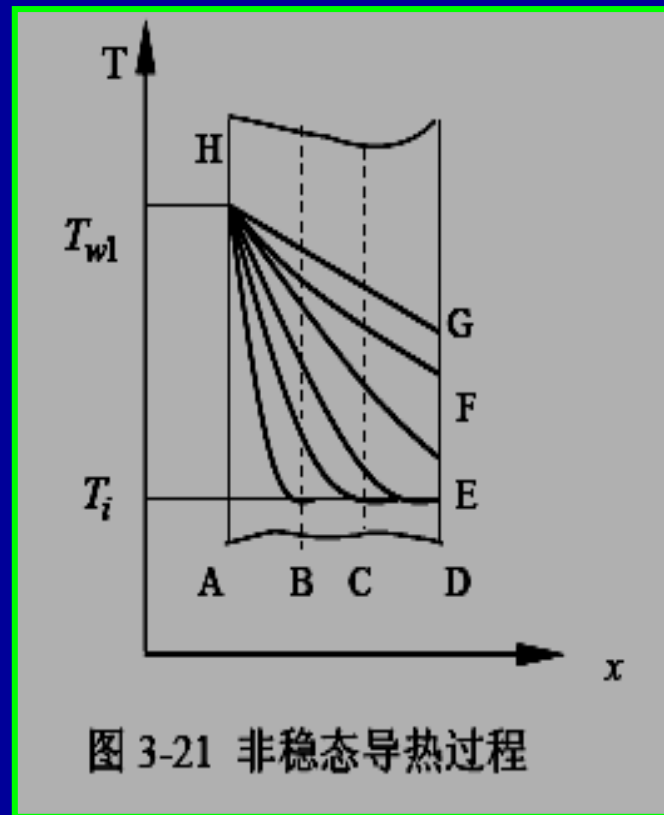


图 3-21 非稳态导热过程

平壁内温度场的变化过程

1. 在紧靠平壁左侧的区域温度首先上升，其余部分仍然保持为原来的温度。经过某一时刻，壁内温度分布如图中曲线**HBD**所示

2. 随着时间的推移，温度变化波及的范围逐渐扩大，平壁内自左向右，各截面温度依次升高，温度变化一层一层地传播到平壁的右侧表面**HCD---HD**



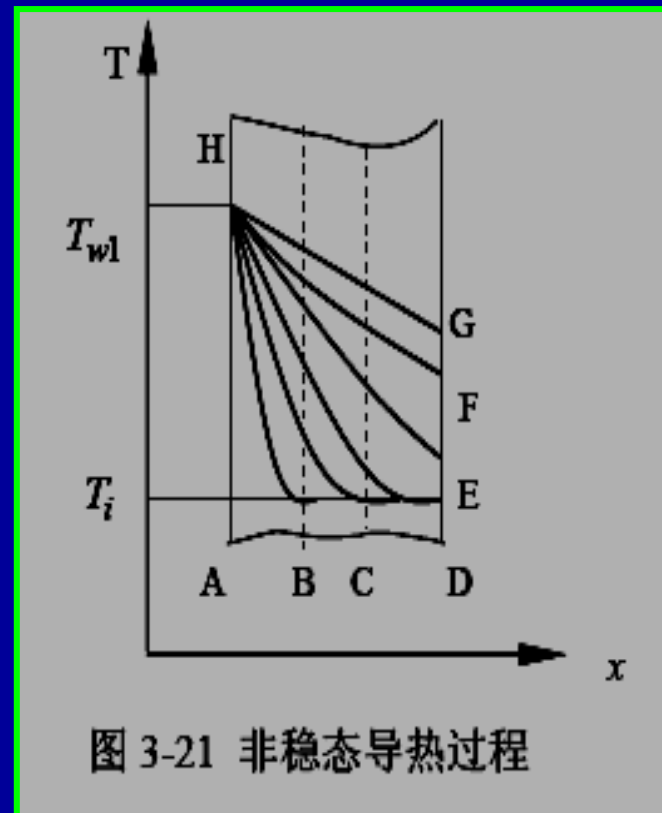
平壁内温度场的变化过程

3.在一定时间之后，右侧表面温度也逐渐升高,如曲线HE--HF所示

（正规状况阶段？）

4. 经过足够长的时间 (理论上为无限长时间), 壁内温度分布将成为一条直线**HG**。

非稳态导热过程结束，进入 稳态导热过程



思考:

影响平壁内温度变化快慢的因素?

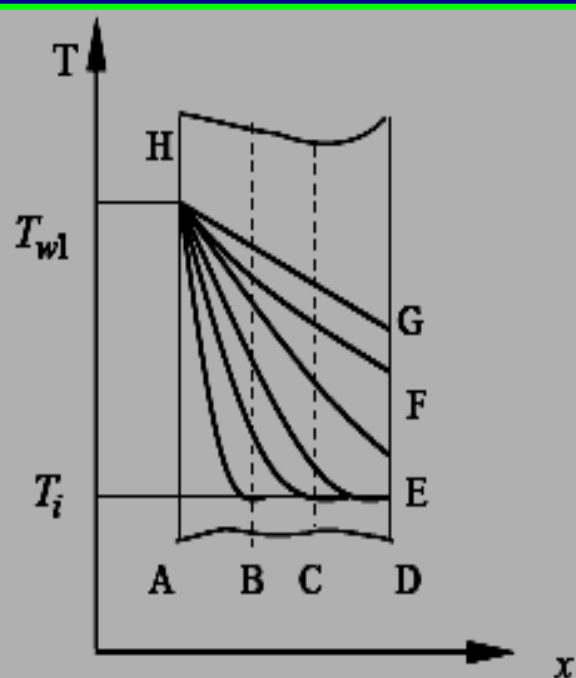


图 3-21 非稳态导热过程

思考:

钢棒和木棒哪一个感受
温度变化强烈?



如果两者的导热系数相同,
但 ρC_p 不同, 又有何影响?

四、导温系数（热扩散系数）

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

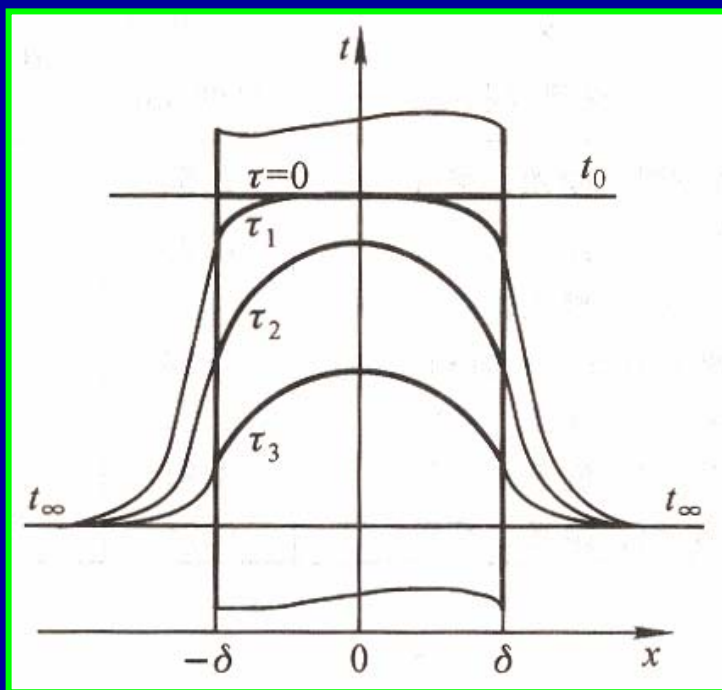
- 反映了物体的导热能力与储热能力之比，用来衡量物体在加热或冷却时内部温度变化传播速度

λ 越大，说明在相同的温度梯度下可以传递更多的热量；

ρC_p 越小，单位体积的物体温度升高1℃所需的热量越小，可以剩下更多的热量继续向物体内部传递，使物体内部各点温度趋于一致的能力提高

五、毕渥准则 Bi 对温度分布的影响

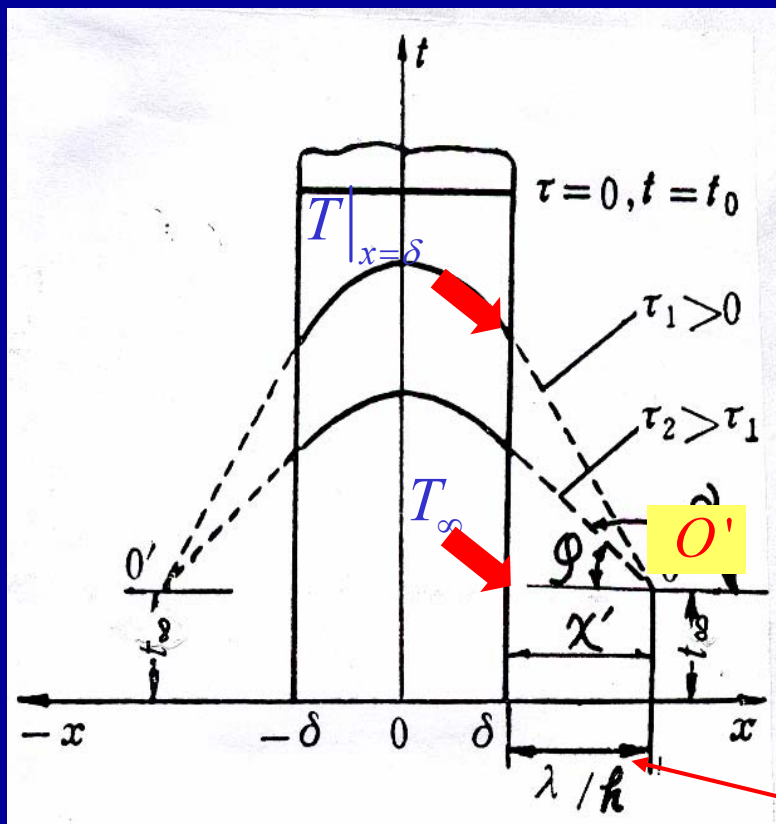
一块无限大平板放置在温度为 T_∞ ,对流换热系数为 h 的介质中冷却, 其温度分布具有怎样的特征?



无限大平板在冷却时, 其第三类边界条件:

$$x = \delta, -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=\delta} = h(T|_{x=\delta} - T_\infty)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=\delta} = \frac{T|_{x=\delta} - T_\infty}{\lambda/h}$$



$$-\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=\delta} = \frac{T|_{x=\delta} - T_{\infty}}{\lambda/h}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=\delta} = \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi$$

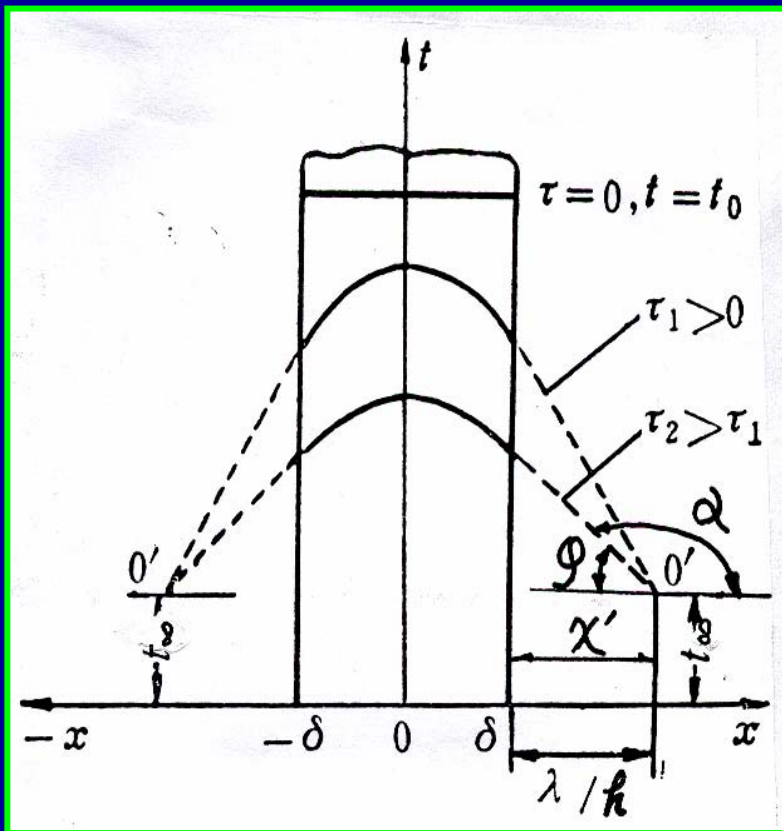
$$\text{即: } -\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=\delta} = \operatorname{tg} \varphi$$

$$\text{而 } \operatorname{tg} \varphi = \frac{T_{x=\delta} - T_{\infty}}{x'}$$

$$\therefore x' = \lambda/h$$

点O'距壁面的距离为 λ/h

任何时刻，壁表面温度分布的切线都通过坐标为 $(\delta + \lambda/h, T_{\infty})$ 的O'点 — 第三类边界条件的定向点



定义

$$Bi = h\delta/\lambda \quad \text{— 毕渥准则}$$

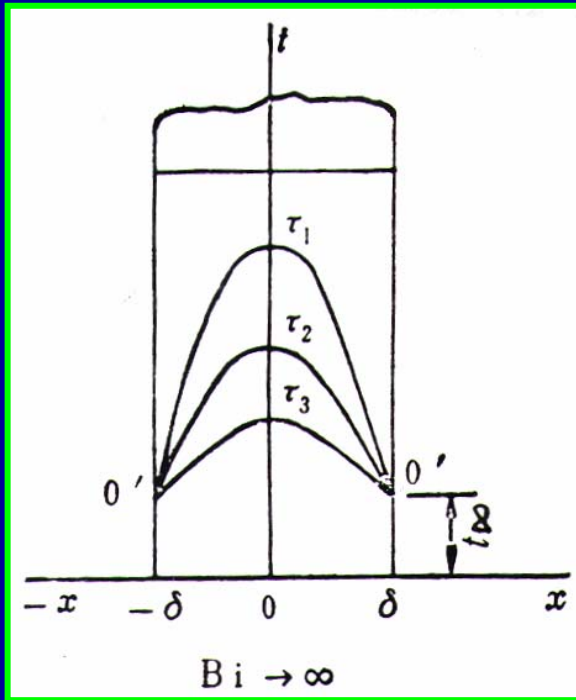
$$x' = \lambda/h = \delta/Bi$$

任何时刻，壁表面温度分布的切线都通过坐标O'点

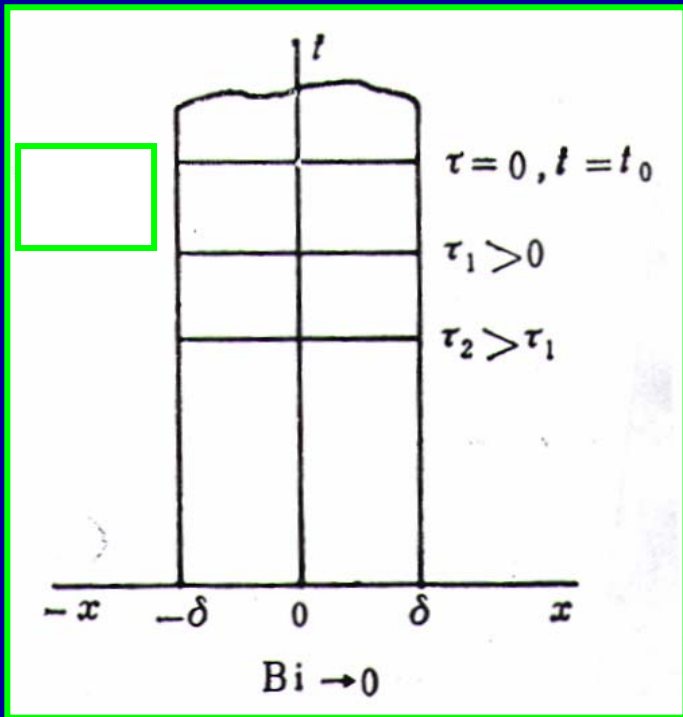
$$(\delta + \delta/Bi, t_\infty)$$

— 第三类边界条件的定向点

定向点 O' : $(\delta + \delta/\text{Bi}, T_\infty)$



当 $\text{Bi} \rightarrow \infty$ 时, 意味着表面传热系数 $h \rightarrow \infty$ ($\text{Bi} = h\delta/\lambda$), 对流换热热阻趋于0。平壁的表面温度几乎从冷却过程一开始, 就立刻降到流体温度 T_∞ 。
定向点 O' 就在平壁表面上



定向点 O' : $(\delta + \delta/Bi, T_\infty)$

当 $Bi \rightarrow 0$ 时, 意味着物体的热导率很大、导热热阻 $\rightarrow 0$

($Bi = h\delta/\lambda$)。物体内的温度分布趋于均匀一致。

定向点 O' 在无限远处

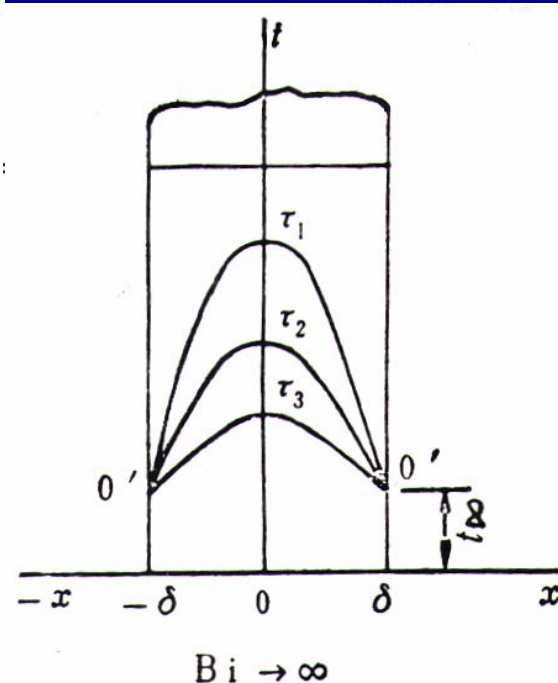
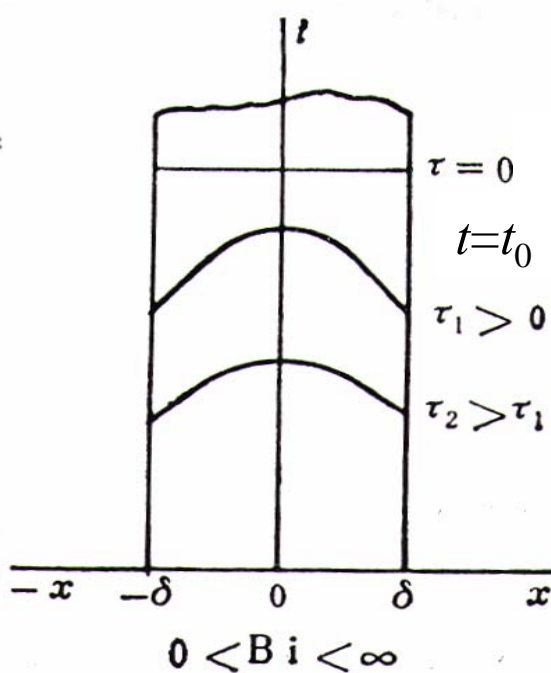
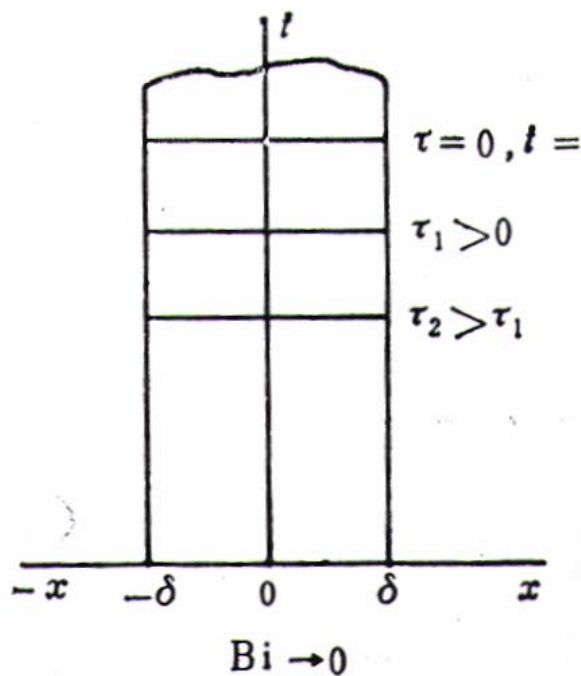
$Bi \rightarrow 0$ 是一个极限情况, 工程上把 $Bi < 0.1$ 看作是接近这种极限的判据。
 $Bi < 0.1$ 时, 平壁中心温度与表面温度的差别 $\leq 5\%$, 接近均匀一致

—— 可用集总参数法求解

$Bi = h\delta/\lambda$ — 毕渥准则

$$Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{\delta/\lambda}{1/h}$$

物体内部导热热阻
物体表面对流换热热阻



六、傅里叶准则 Fo 对温度分布的影响

一维非稳定导热无量纲方程：

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

引入无量纲参数：

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}}, \quad X = \frac{x}{\delta}$$

$$F_o = \frac{a\tau}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{a}{\delta^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial \left(\frac{a\tau}{\delta^2} \right)} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \theta}{\partial F_o} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}}$$

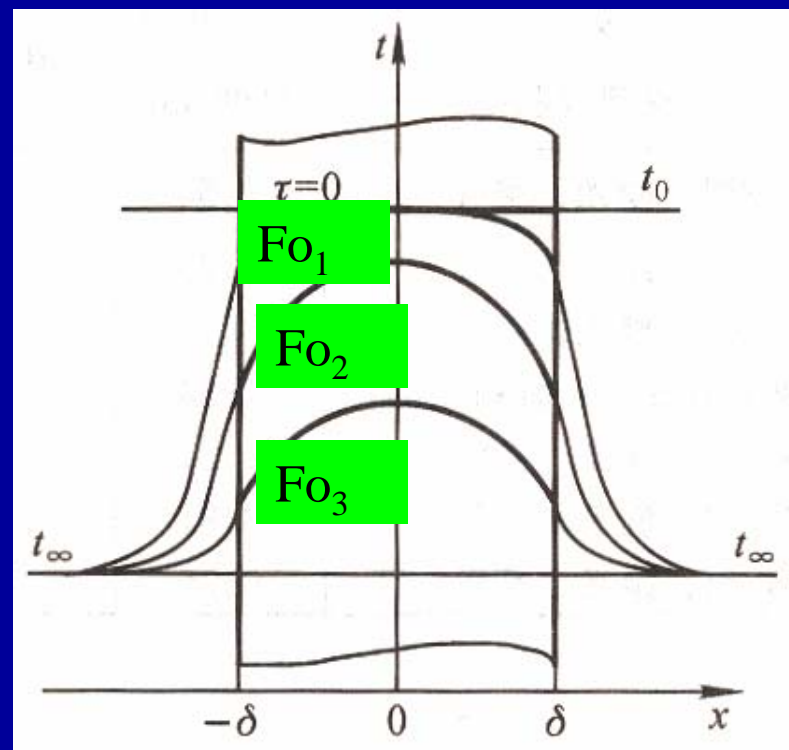
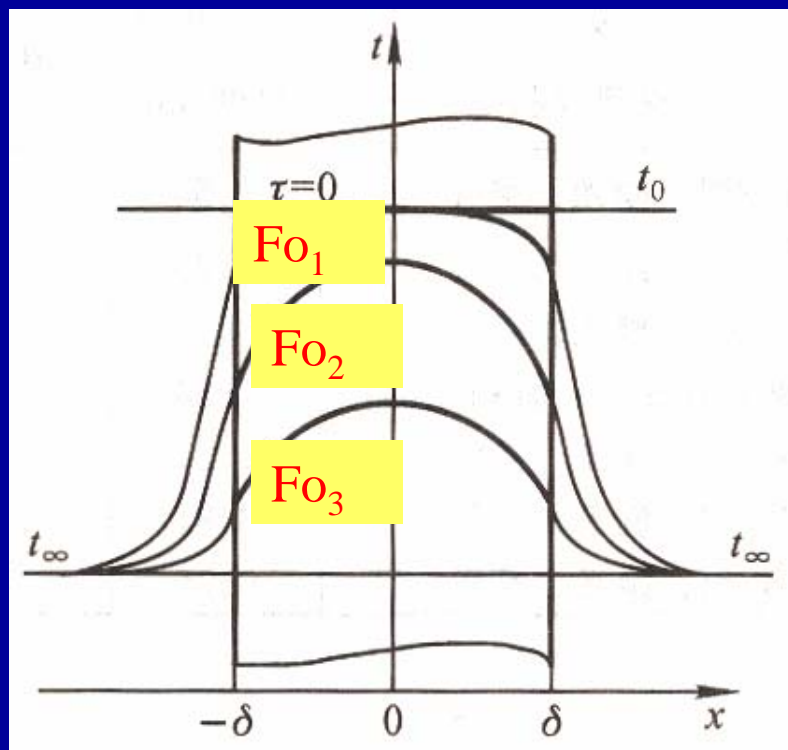
Fo 的物理意义可以理解为两个时间间隔相除所得的无量纲时间

$$Fo = \frac{\tau}{l^2 / a}$$

分子是从边界上开始发生热扰动的时刻起到所计算时刻为止的时间间隔

分母可以视为有限大小的热扰动扩散到 l^2 的面积上所需的时间

显然，在非稳态导热过程中，这一无量纲时间越大，热扰动就越深入地传播到物体内部，因而物体内部各点的温度就越接近周围介质的温度



左图 $a >$ 右图 a
 达到同样的温度分布
 哪一个所需时间长？

七、非稳态导热的研究目的

温度分布和热流量分布随时间和空间的变化规律

$$T = f(x, y, z, \tau); \quad \Phi = f(\tau)$$

非稳态导热的导热微分方程式：

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v$$

■ **求解方法**：分析解法、近似分析法、数值解法

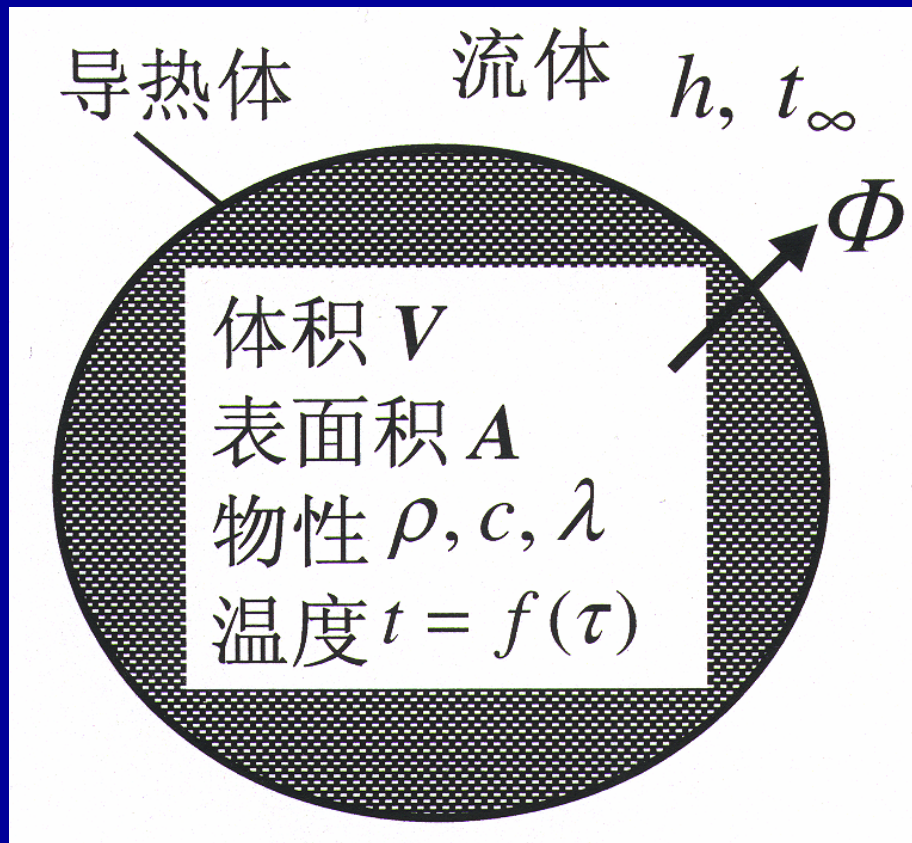
■ 分析解法：分离变量法、积分变换、拉普拉斯变换

■ 近似分析法：集总参数法、积分法、瑞利-里兹法

■ 数值解法：有限差分法、蒙特卡洛法、有限元法、
分子动力学模拟

3-2 集总参数法

一、集总参数法：忽略物体内部导热热阻、认为物体温度均匀一致的分析方法



任意形状的物体
假设 $Bi < 0.1$

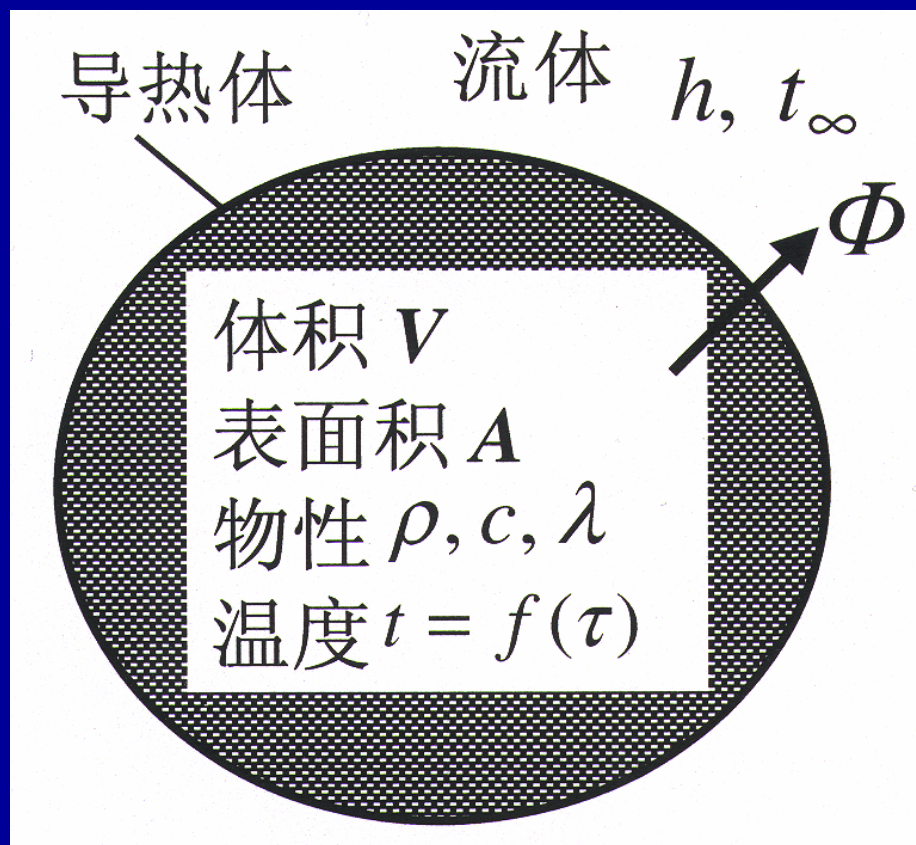
$$\tau = 0 \text{ 时, } T = T_0$$

■ 思考： $Bi < 0.1$

物体内部温度随时间变化有何特点？

二、对流换热系数和环境温度为常数的问题

1、数学模型



$$hA(T - T_\infty) = -\rho CV \frac{dT}{d\tau}$$

引入过余温度

$$\theta = T - T_\infty$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{hA}{\rho CV} \theta = 0$$

初始条件

$$\tau = 0, \theta = \theta_0$$

2、内部热阻可以忽略的非稳态导热判据

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{hA}{\rho CV}\tau} = e^{-\frac{h(V/A)}{\lambda} \frac{\lambda}{\rho C (V/A)^2} \tau} = e^{-Bi_V Fo_V}$$

忽略物体的内部导热热阻

$$Bi_V = \frac{h(V/A)}{\lambda} \leq 0.1M \quad \left\{ \begin{array}{ll} M = 1 & \text{平板} \\ M = 1/2 & \text{圆柱} \\ M = 1/3 & \text{球} \end{array} \right.$$

注意：在集总参数法中，毕渥数定义中的特征尺寸
在图线法中，毕渥数定义中的特征尺寸

3、时间常数

$$\tau_r = \frac{\rho CV}{hA}$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{hA}{\rho CV}\tau}$$

■ 物理意义

分子 ρCV 表示物体的热容量

分母 hA 反映了物体的冷却条件

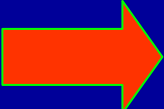
⇒ 表征瞬变热过程的反应速率

■ 时间常数越小，说明：

- 在冷却条件不变的条件下，物体的热惯性越小
- 在物性不变的条件下，物体表面的对流换热强度越大

■ 时间常数的进一步讨论

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{hA}{\rho CV}\tau} = e^{-\frac{\tau}{\tau_r}}$$

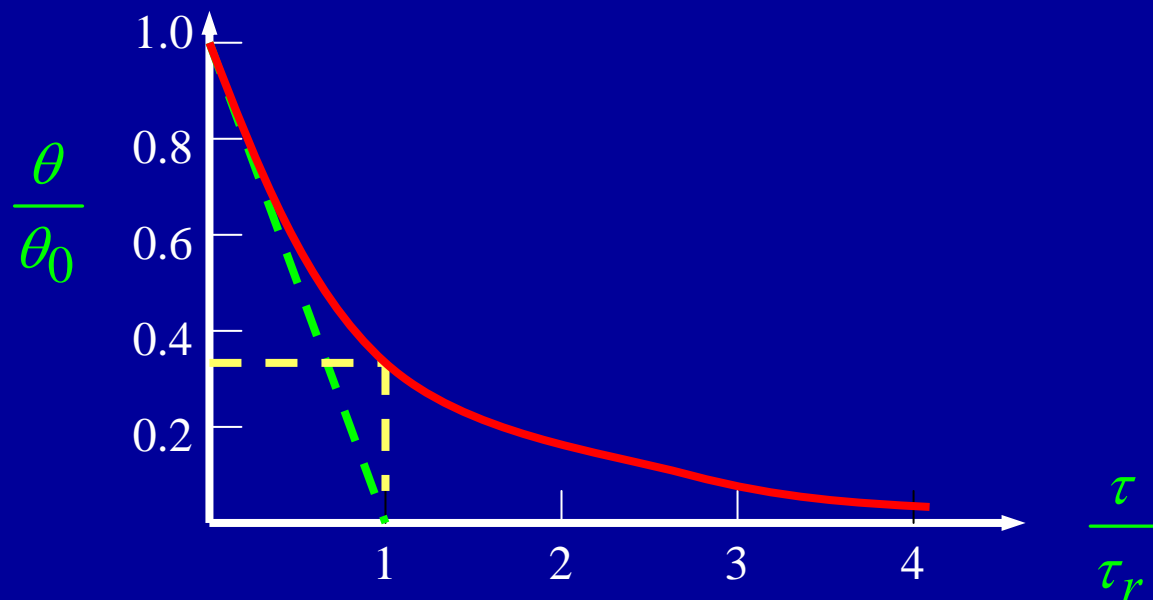

$$\frac{d(\theta/\theta_0)}{d\tau} = -\frac{1}{\tau_r} e^{-\frac{\tau}{\tau_r}} = -\frac{(\theta/\theta_0)}{\tau_r}$$

$\tau \rightarrow 0$ 的冷却速率:

$$\left. \frac{d(\theta/\theta_0)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = -\frac{1}{\tau_r}$$

■ 显然 τ_r 越小, 初始冷却速率越大。如果物体以初始冷却速率冷却, 则经过 τ_r 时刻后, 物体的温度就会下降到环境温度。

■ 集总热容系统的温度变化曲线



一般地，经过4个时间常数，

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{\tau}{\tau_r}} = e^{-4} = 0.018$$

$$\frac{\rho V c}{h A} \text{ — 时间常数}$$

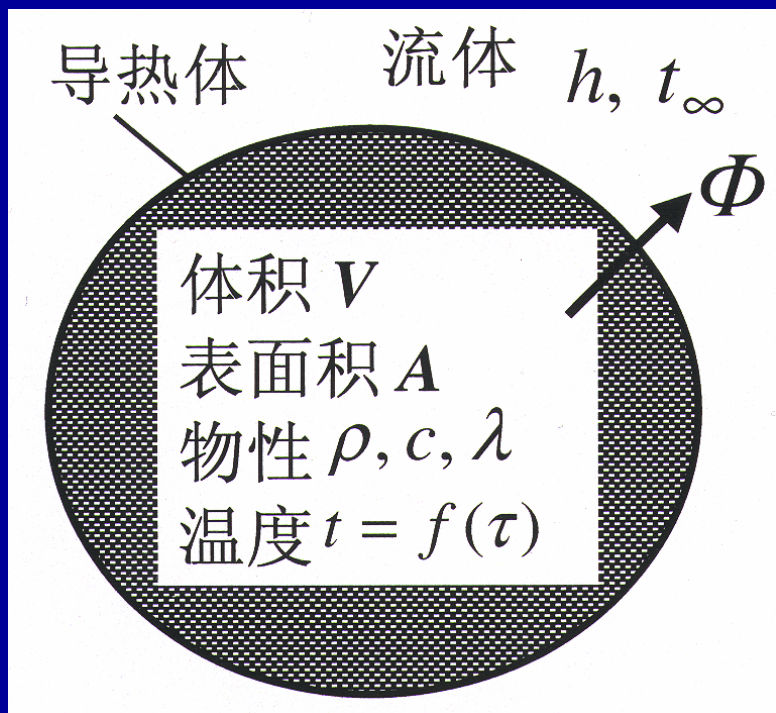
如果导热体的热容量 $\rho V c$ 、换热条件好 ($h A$ 大), 那么单位时间所传递的热量、导热体的温度变化快, 时间常数 ($\rho V c / h A$) 小

■ 对于测温的热电偶节点, 时间常数越小、说明热电偶对流体温度变化的响应越快。这是测温技术所需要的!

(微细热电偶、薄膜热电阻)

当 $\tau = 4 \frac{\rho V c}{h A}$ 时, $\frac{\theta}{\theta_0} = 1.83\%$ 工程上认为 $\tau = 4 \tau_r$ 时, 导热体已达到热平衡状态

4、导热量



■ 导热体在 τ 时刻、单位时间内传给流体的热量:

$$Q(\tau) = hA(T - T_\infty) = hA\theta$$
$$= hA\theta_0 e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau} \quad [\text{W}]$$

■ 导热体在时间 $0 \sim \tau$ 内传给流体的总热量:

$$Q_\tau = \int_0^\tau \Phi(\tau) d\tau = \rho Vc\theta_0 (1 - e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau}) \quad [\text{J}]$$

对于非稳态导热问题, 首先应判断Bi是否小于0.1。
若是, 可用集总参数法

例题

- 在模拟涡轮叶片前缘冲击冷却试验中，用温度为 20°C 的冷空气冲击 300°C 的铝制模型试件。试件几何尺寸如图所示：冲击表面积为 $6 \times 10^{-3} \text{m}^2$ ，体积为 $3 \times 10^{-5} \text{m}^3$ ，冷吹风1分钟后，试件温度为 60°C ，试问平均对流换热系数为多少？已知铝的导热系数 $200 \text{W}/(\text{mK})$ ；比热容 $0.9 \text{KJ}/(\text{KgK})$ ；密度 $=2700 \text{Kg}/\text{m}^3$ 。

三、环境温度随时间线性变化

$$T_f = B\tau + T_{f0}$$

引入过余温度 $\theta = T - T_{f0}$

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{hA}{\rho CV} \theta = \frac{hA}{\rho CV} B\tau$$

非齐次的一阶常微分方程

初始条件 $\tau = 0, \theta = 0$

■ 解的形式(非齐次方程的解=齐次方程的解+特解)

$$\theta = ce^{-\frac{hA}{\rho CV}\tau} + (B\tau - \frac{\rho CV}{hA}B)$$

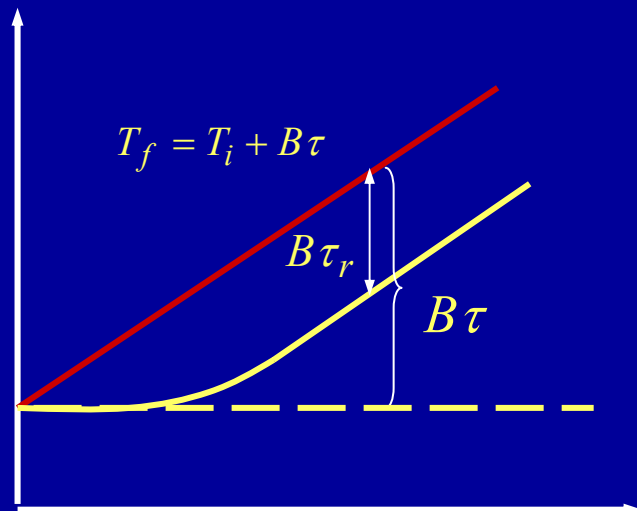
由I.C.得到

$$c = \frac{\rho CV}{hA} B$$

■ 最终结果

$$\theta = \frac{\rho CV}{hA} B e^{-\frac{hA}{\rho CV} \tau} + (B\tau - \frac{\rho CV}{hA} B)$$

或 $\theta = B\tau - B\tau_r(1 - e^{-\tau/\tau_r})$



- 分析：过程进展到一定时间之后， $\theta = B\tau - B\tau_r$ ，进入了准稳态阶段，物体温度与环境温度之差为一常值 $B\tau_r$

τ_r 越大，进入准稳态所需的时间越长；且进入准稳态后，物体温度与环境温度的差值越大

■ 热电偶测量温度

热电偶的一个重要参数是什么？

- 如果测量温度恒定的气流温度，在经过多长时间可以认为热电偶温度达到气流温度？
- 如果测量温度线性变化的气流温度，温度滞后的时间和温度误差？

例题

- 电烘箱在启动以后，烘箱内的温度按线性规律变化， $T_f = B\tau = 100\tau(K/h)$ 。如果温度计感温部可以视为半径为2mm的长圆柱，试预估该温度计的温度滞后和测量误差。

已知该物的物性参数：

$$\rho = 13.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3,$$

$$C = 0.137 \text{ kJ/kg},$$

$$\lambda = 9 \text{ W/(mK)},$$

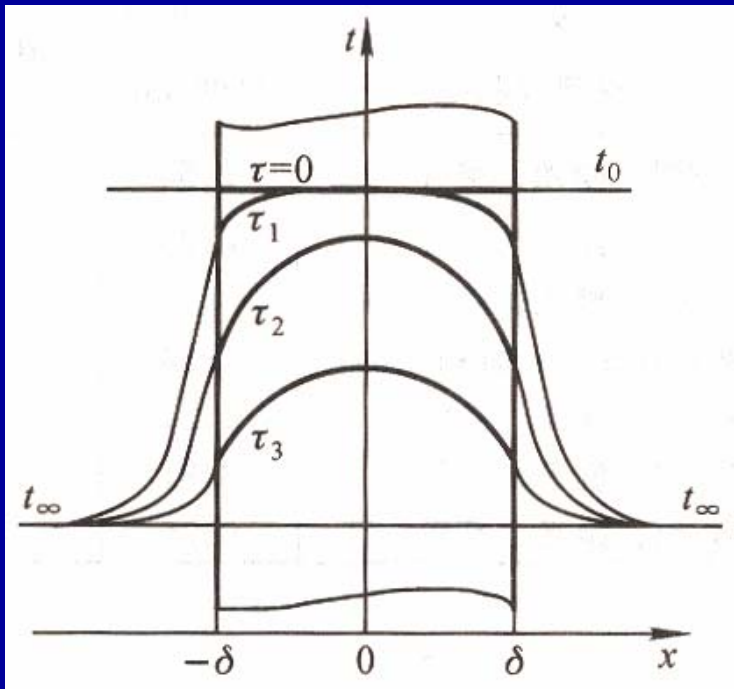
该温度计周围的对流换热系数 $h = 12 \text{ W/(m}^2\text{K)}$

$$\tau_r = 152 \text{ s} = 0.042 \text{ h} \quad B\tau_r = 100 \times 0.042 = 4.2 \text{ K}$$

3-3 无限大平壁的瞬态导热

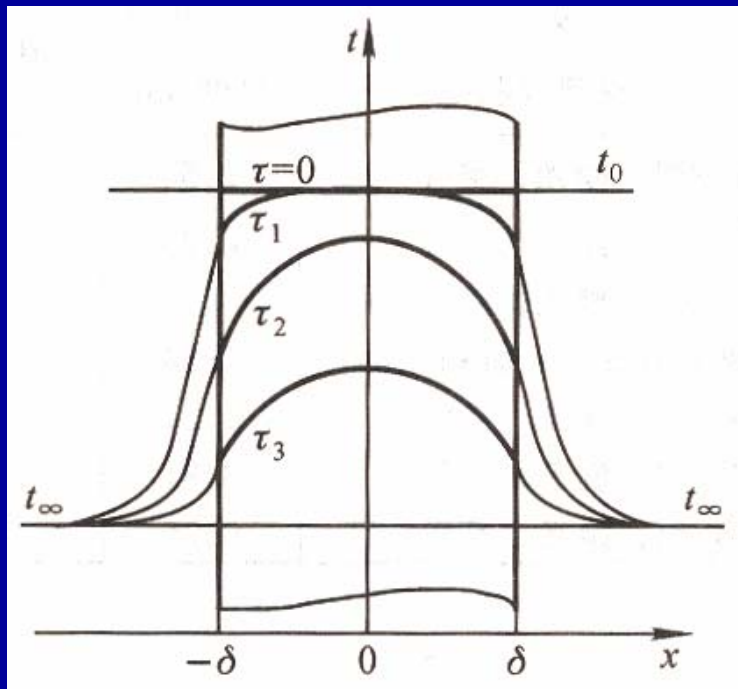
一、分析解法（分离变量法，自学）

■ 问题描述



厚度 2δ 的无限大平壁， λ 、 a 为已知常数； $\tau=0$ 时温度为 T_0 ；突然把两侧介质温度降低为 T_∞ 并保持不变；壁表面与介质之间的表面传热系数为 h 。两侧冷却情况相同、温度分布对称。中心为原点。

■ 数学描写



导热微分方程:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

初始条件:

$$\tau = 0, \quad T = T_0$$

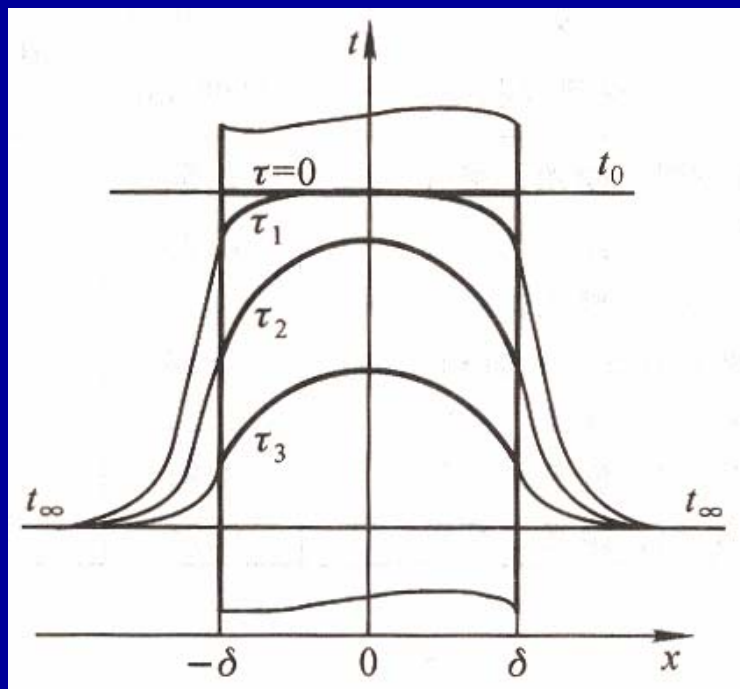
边界条件: $x = 0, \quad \partial T / \partial x = 0;$

(第三类)

$$x = \delta, \quad -\lambda \partial T / \partial x = h(T|_{\delta} - T_{\infty})$$

二、图解法

基本思想：相似理论



导热微分方程：

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

初始条件：

$$\tau = 0, \quad T = T_0$$

边界条件：

$$x = 0, \quad \partial T / \partial x = 0;$$

$$x = \delta, \quad -\lambda \partial T / \partial x = h(T|_{\delta} - T_{\infty})$$

解的形式： $T = f(x, \tau, T_0, T_{\infty}, \delta, \lambda, a, h)$

引入无量纲参数:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad x^* = \frac{x}{\delta}, \quad Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}}$$

初始条件:

$$\theta^*(x^*, 0) = 1$$

边界条件:

$$x^* = 0, \quad \partial \theta^* / \partial x^* = 0;$$

$$x^* = 1, \quad \partial \theta^* / \partial x^* = Bi \theta^*$$

解的形式:

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_0} = f(x^*, Bi, Fo)$$

$$Fo = a\tau/\delta^2 \quad Bi = h\delta/\lambda \quad x/\delta \text{ — 无量纲距离}$$

$$\therefore \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = f(Bi, Fo, \frac{x}{\delta})$$

■ 温度场可用计算线图（诺谟图）求解

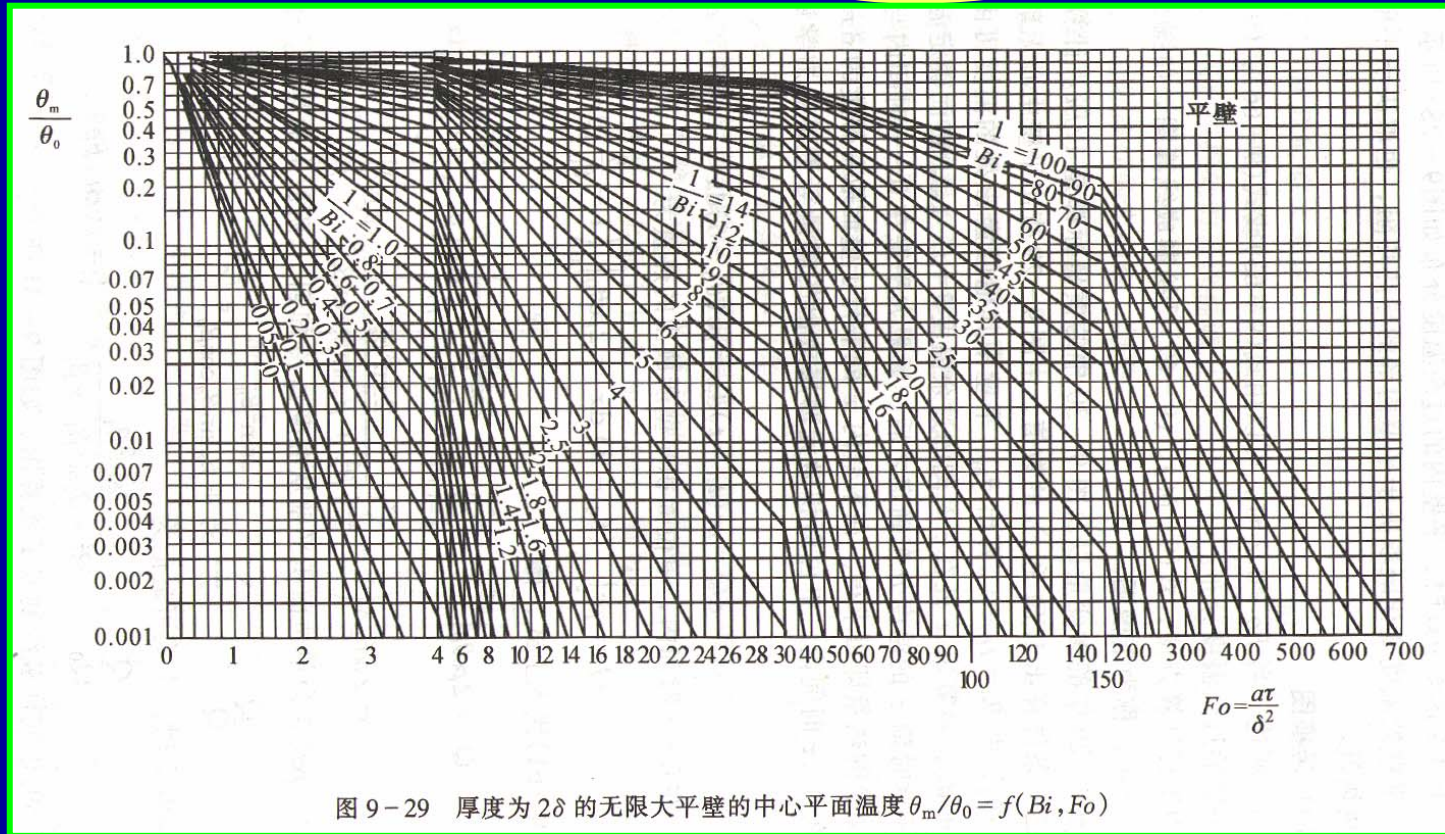
$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} \cdot \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0}$$

对于中心平面，
与位置无关

在同一时刻，各
点处的过剩温度
与中心过剩温度
之比与时间无关

$$f(Bi, \frac{x}{\delta}) \quad f(Bi, Fo)$$

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} \cdot \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0}; \quad f\left(\text{Bi}, \frac{x}{\delta}\right) f(\text{Bi}, \text{Fo})$$



$$(\text{Bi}, \text{Fo}) \Rightarrow \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0}$$

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} \cdot \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0}; \quad f(\text{Bi}, \frac{x}{\delta}) \quad f(\text{Bi}, \text{Fo})$$

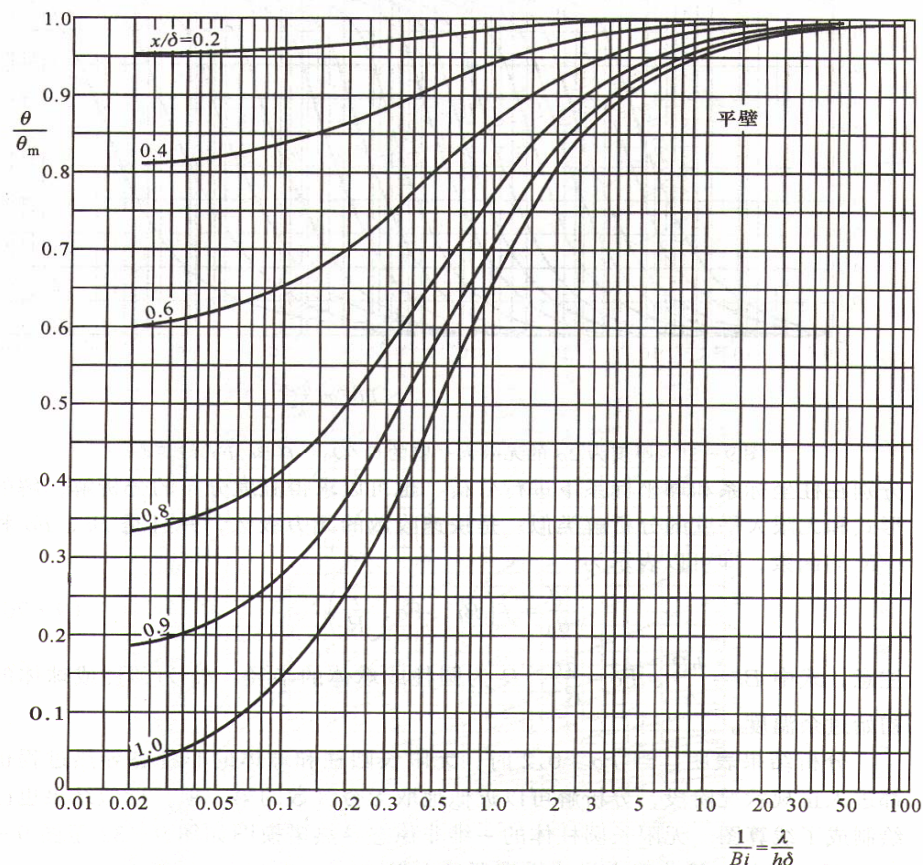


图 9-30 厚度为 2δ 的无限大平壁任意位置的

$$(\text{Bi}, \frac{x}{\delta}) \Rightarrow \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)}$$

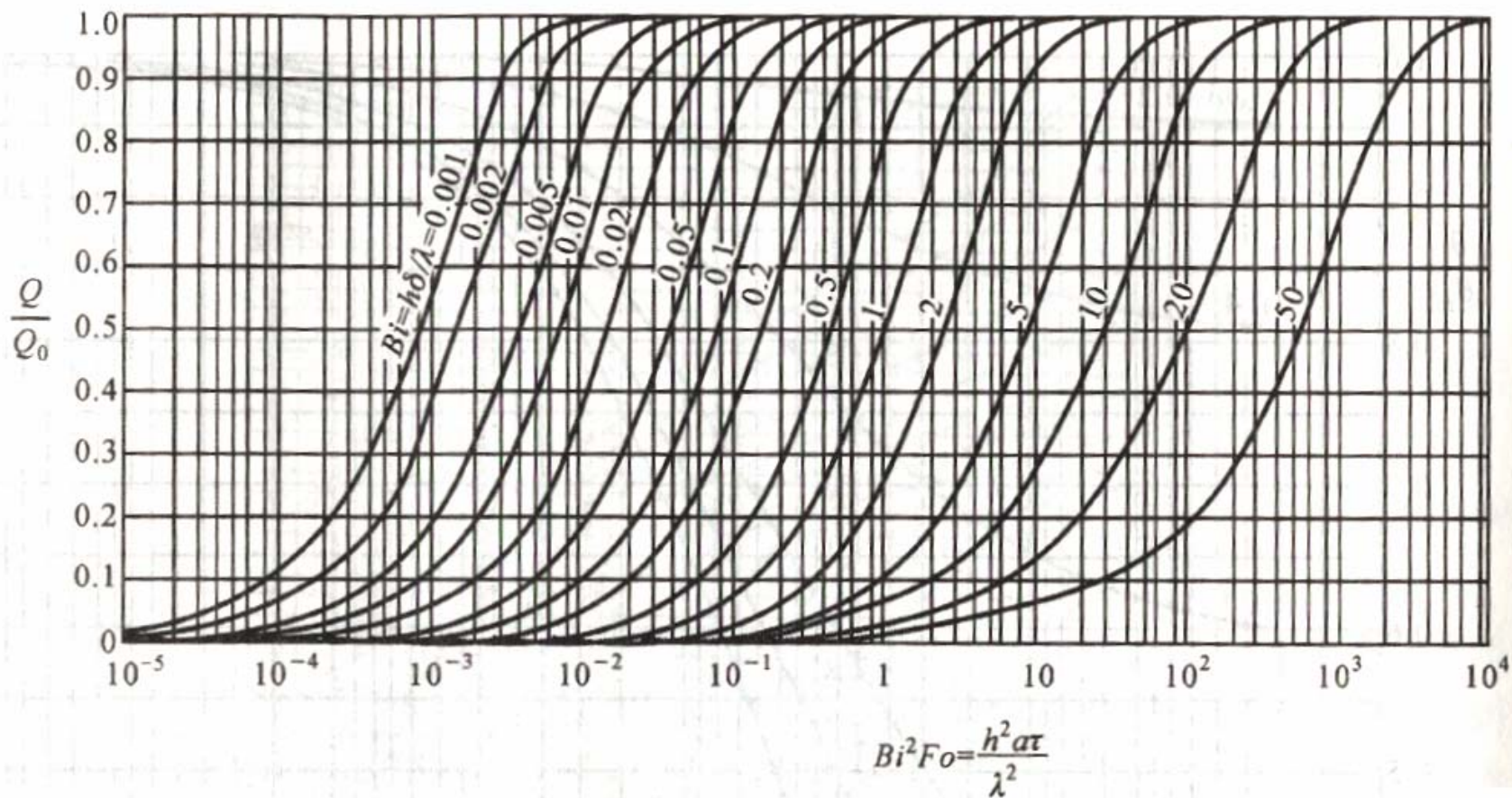
■ 经过 τ 秒钟、每平方米平壁放出或吸收的热量

平壁在初始时刻相对于环境温度的内能:

$$Q_0 = \rho c V \theta_0$$

$$\begin{aligned} Q_\tau &= \rho c \int_{-\delta}^{+\delta} (t_0 - t) A dx = \rho c \int_{-\delta}^{+\delta} (\theta_0 - \theta) A dx \\ &= f(Bi, Fo) \left[\text{J/m}^2 \right] \end{aligned}$$

$$\frac{Q_\tau}{Q_0} = f(Fo, Bi)$$



对于其他形状和边界条件的加热或冷却过程的分析解与计算线图可参见有关文献

本讲要点

- 掌握非稳态导热的基本过程
- 理解导温系数、毕渥数、傅里叶数的物理意义
- 掌握毕渥数对冷却/加热过程的影响
- 掌握集总参数法的应用条件、分析过程
- 了解时间常数的物理意义以及应用
- 熟悉一维非稳态导热的图解方法

作业:

1、 p.54 7

2、 p.55 11

3、 两块厚度为30mm的无限大平板，初始温度为20℃，分别用铜和钢制成。平板两侧表面的温度突然上升到60℃并保持不变，试计算使两板中心温度均上升到56℃时，两板所需时间之比。

铜的热扩散系数为 $103 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ，钢的热扩散系数为 $12.9 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。