传热学

Heat transfer

张靖周

能源与动力学院

第二章

导热基本定律及
稳态导热

2-10 二维稳态导热问题

工程上经常遇到二维和三维稳态导热问题：房间墙角的传热、热网地下埋设管道的热损失、短肋片导热等

导热微分方程式：二维、常物性、无内热源

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

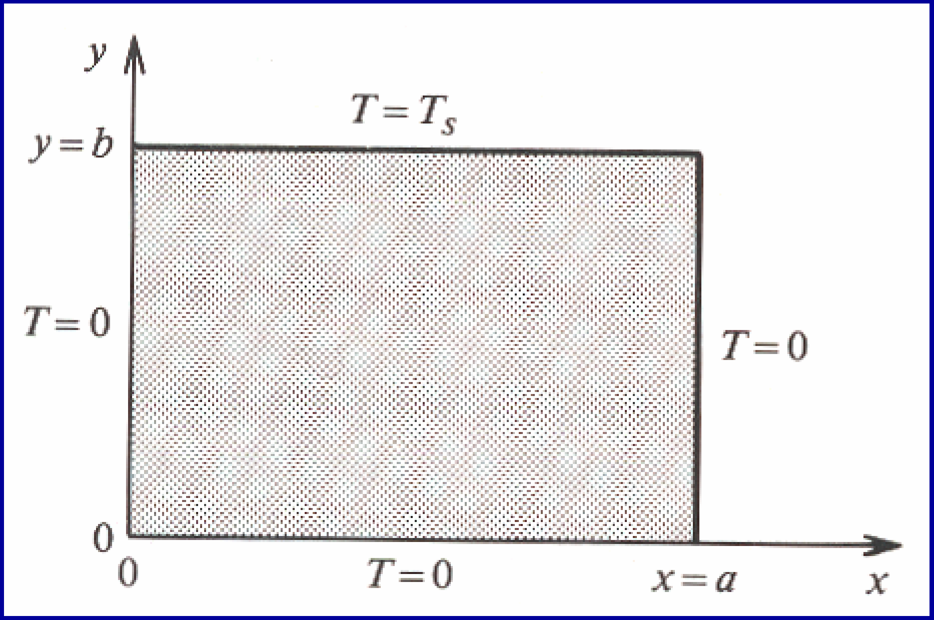
求解方法：

（1）分析解法（简单形状、线性边界条件）

（2）数值计算（复杂形状、复杂边界条件）

（3）利用导热形状因子（工程计算、两个边界的温度恒定、已知）

一、分析解-分离变量法简介



导热微分方程式：

二维、常物性、无内热源

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

边界条件：

$$x=0,\ 0<y<b:\ T=0;$$

$$x=a,\ 0<y<b:\ T=0;$$

$$y=0,\ 0<x<a:\ T=0;$$

$$y=b,\ 0<x<a:\ T=T_s$$

分离变量法的应用条件：

(1) 微分方程是线性齐次的

线性微分方程：方程中未知函数y(x)及各阶导数$y^{(n)}$都是一次的

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = R(x)$$

齐次： $R(x) = 0$

(2) 边界条件是齐次的，或只有一个是非齐次的

不满足分离变量法的应用条件？适当变换

分析解思路----分离变量法

(1) 假定温度分布是所含自变量的函数的乘积，从而将导热偏微分方程转换为以各自变量为变量的几个常微分方程　　分离变量

(2) 各空间坐标变量的常微分方程与相应的边界条件构成原导热偏微分方程问题的特征值问题　　特征值

(3) 由特征值问题求得特征函数与特征值，并由它们构成偏微分方程的特解，称为基本解　　基本解

(4) 根据线性方程的解迭加原理，将基本解进行迭加，得到通解　　通解

(5) 根据特征函数的正交性，确定通解中所含的待定常数　　待定常数

分离变量法步骤及主要问题

- 分离变量

$$T(x,y)=X(x)Y(y)$$

代入微分方程，得到

$$Y\frac{d^2X}{dx^2}+X\frac{d^2Y}{\partial y^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{\partial y^2}=r_n$$

请思考原因？

特征值(分离常数)

■ 确定特征值

$$X(x) = A_1 e^{\sqrt{r_n}x} + A_2 e^{-\sqrt{r_n}x}$$

$$Y(x) = B_1 e^{\sqrt{-r_n}y} + B_2 e^{-\sqrt{-r_n}y}$$

➢ 利用边界条件

$x = 0, \quad T = 0$ ➡ $X(0) = 0$ $\quad A_1 + A_2 = 0$

$x = L, \quad T = 0$ ➡ $X(L) = 0$ $\quad A_1 e^{\sqrt{r_n}L} + A_2 e^{-\sqrt{r_n}L} = 0$

➢ 得到关系式 $\quad A_1 (e^{\sqrt{r_n}L} - e^{-\sqrt{r_n}L}) = 0$

➢ $A_1 = 0$ 无意义 ➡ $\boxed{(e^{\sqrt{r_n}L} - e^{-\sqrt{r_n}L}) = 0}$

➢ 讨论 r_n 的取值问题

$$\boxed{r_n = \pm\beta^2}$$

(a) $r_n = \beta = 0$

$$\left.\begin{aligned} X(x) &= A_1 e^{\sqrt{r_n}\,x} + A_2 e^{-\sqrt{r_n}\,x} = A_1 + A_2 \\ Y(x) &= B_1 e^{\sqrt{-r_n}\,y} + B_2 e^{-\sqrt{-r_n}\,y} = B_1 + B_2 \end{aligned}\right\}\text{不符合边界条件}$$

(b) $r_n = +\beta^2$

$$(e^{\sqrt{r_n}\,L} - e^{-\sqrt{r_n}\,L}) = 0 \Rightarrow (e^{\beta L} - e^{-\beta L}) = 0$$

无解

(c) 只能取 $\boxed{r_n = -\beta^2}$

确定特解

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} + \beta^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) \\ \dfrac{d^2Y}{dy^2} - \beta^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = Csh(\beta y) + Dch(\beta y) \end{cases}$$

边界条件

$x = 0, \quad T = 0 \Rightarrow A = 0$

$y = 0, \quad T = 0 \Rightarrow D = 0$

$$\boxed{\therefore \quad T(x, y) = C\sin(\beta x) sh(\beta y)}$$

$x = L, \quad T = 0 \Rightarrow \sin(\beta L) = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = \dfrac{n\pi}{L}}$

确定通解

$$\boxed{T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\frac{n\pi}{L} x) sh(\frac{n\pi}{L} y)}$$

■ C_n 的确定（第五步）(尚有一个边界条件未用)

$$y = H,\quad T = f(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) sh(\frac{n\pi}{L}H) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

利用三角函数的正交性

$$\int_0^L f(x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx$$

$$\begin{cases} m \neq n & \int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx = 0 \\ m = n & \int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx = \frac{L}{2} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx$$

$$C_n = \frac{b_n}{sh(\frac{n\pi H}{L})} = \frac{2}{L}\frac{1}{sh(\frac{n\pi H}{L})}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx$$

- 最终解的结果

$$\boxed{T = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi x}{L})\frac{sh(\frac{n\pi y}{L})}{sh(\frac{n\pi H}{L})}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx}$$

二、导热问题的数值解

■ 问题的引出

■ 分析解法的优点：求解过程中的数学分析较严谨；求解结果以函数形式表示，能清楚地显示各种因素对温度分布的影响

■ 分析解法的缺陷：工程实际中所遇到的传热问题，常常是十分复杂的，如非规则形状，非均匀的边界条件，物性参数随温度变化等，很难用分析解法获得结果。在有些情况下，经过一些必要的简化假设，虽然精确分析解在原则上是可能的，但解题技巧要求很高，且解的形式往往冗长繁琐。

■ 随着计算机技术和计算数学的发展，利用计算机数值分析已成为解决工程传热问题的一种基本手段。这种方法所用的数学技巧较少，而物理图象却又十分清晰。

数值计算方法 — 有效解决复杂问题的方法；是具有一定精度的近似方法

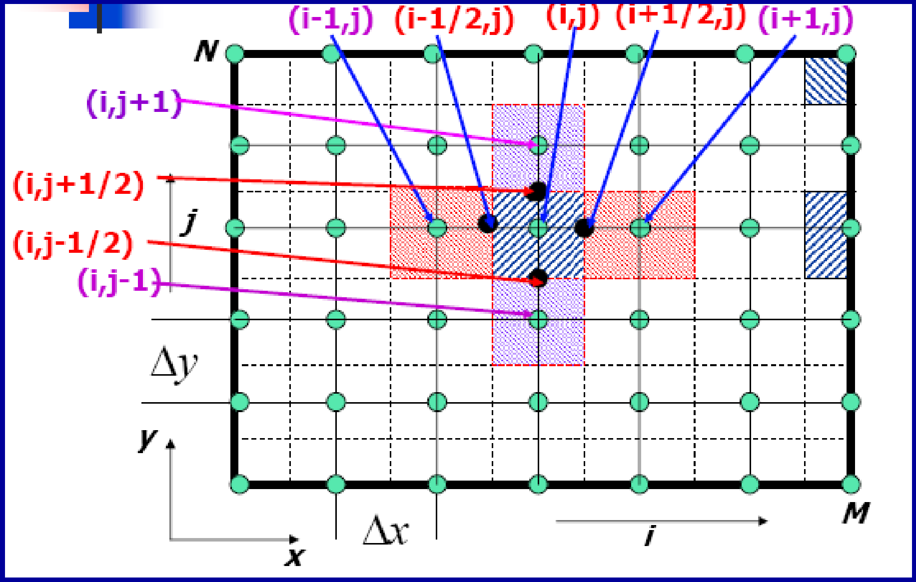
Numerical Heat Transfer（A, B）

— 数值传热学期刊

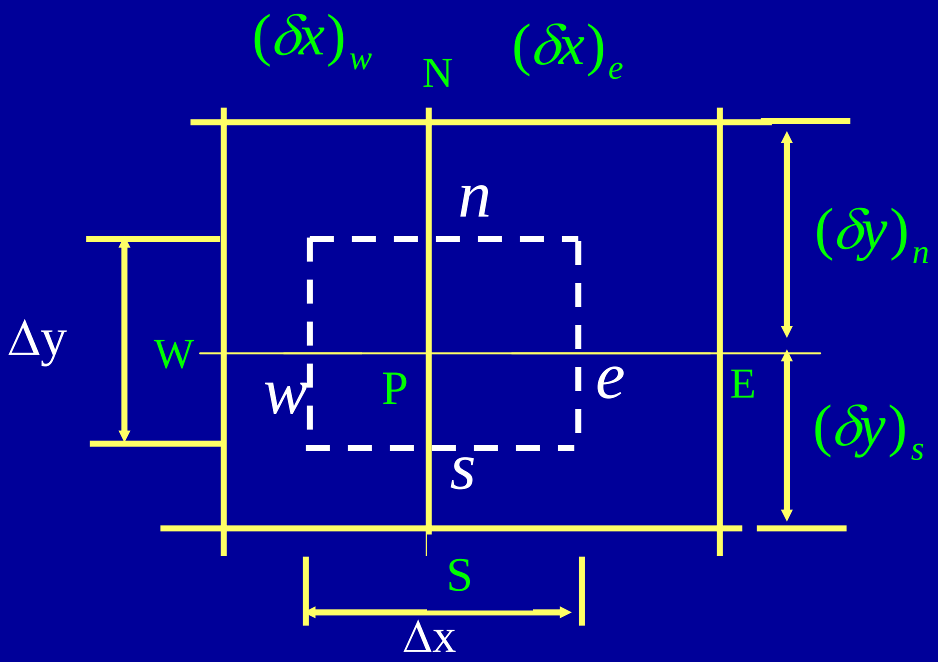
数值解法：有限差分法、有限元法、边界元法、分子动力学模拟

有限差分法的基本原理

- 把物体分割为有限个离散的单元体，用有限差商代替导数，从而将微分方程转化为差分方程。通过数值计算求取各网格单元节点的温度



网格划分 对求解域作离散化处理，以网格线的交点作为需要确定的温度值的空间坐标，称为节点。



二维导热问题

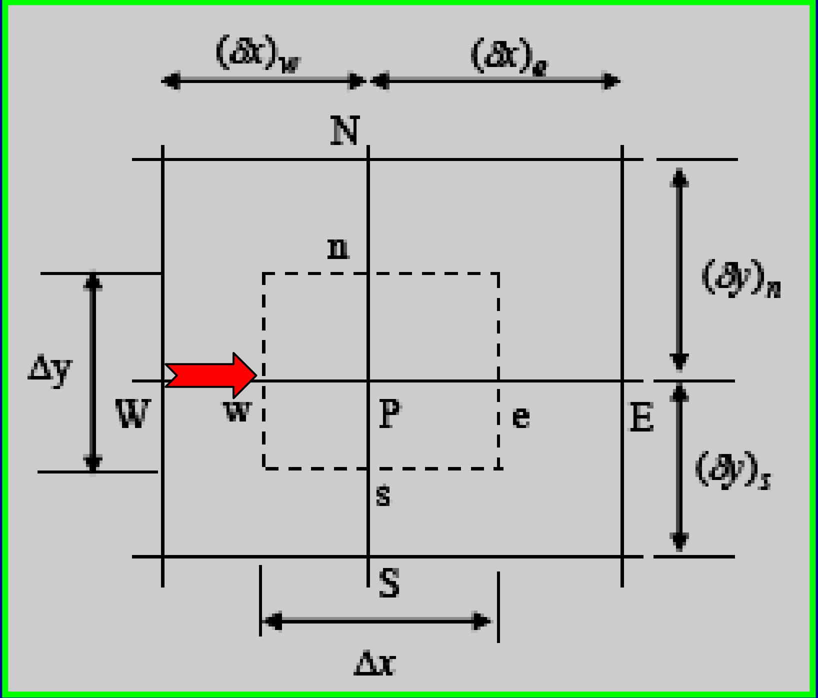
每一个节点都可以看成是以它为中心的一个小区域的代表，这个小区域称为控制容积（或控制）体。以节点P所示的控制容积为例，相邻节点用角注大写字母**E**、**W**、**S**、**N**表示，相邻控制容积交界面用角注小写字母**e**、**w**、**s**、**n**表示；控制容积尺寸用 Δx 、Δy 表示，节点间距用 δx ，δy 表示。

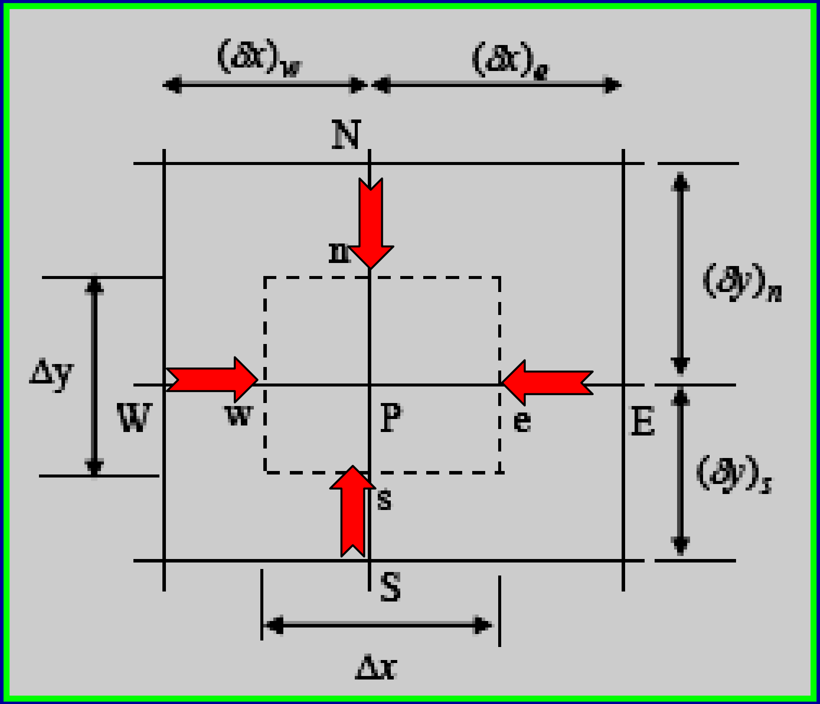
建立关于内部节点温度的代数方程

对控制容积进行热平衡分析或直接应用差分代替微分都可以得到关于节点温度的离散方程。在此我们采用热平衡方法。

- 从**w**界面进入控制容积的热流量为

$$Q_w = \lambda_w \cdot \Delta y \cdot 1 \cdot \frac{T_W - T_P}{(\delta x)_w}$$





同理可以得到从**e**、**s**、**n**界面进入控制容积的热流量。

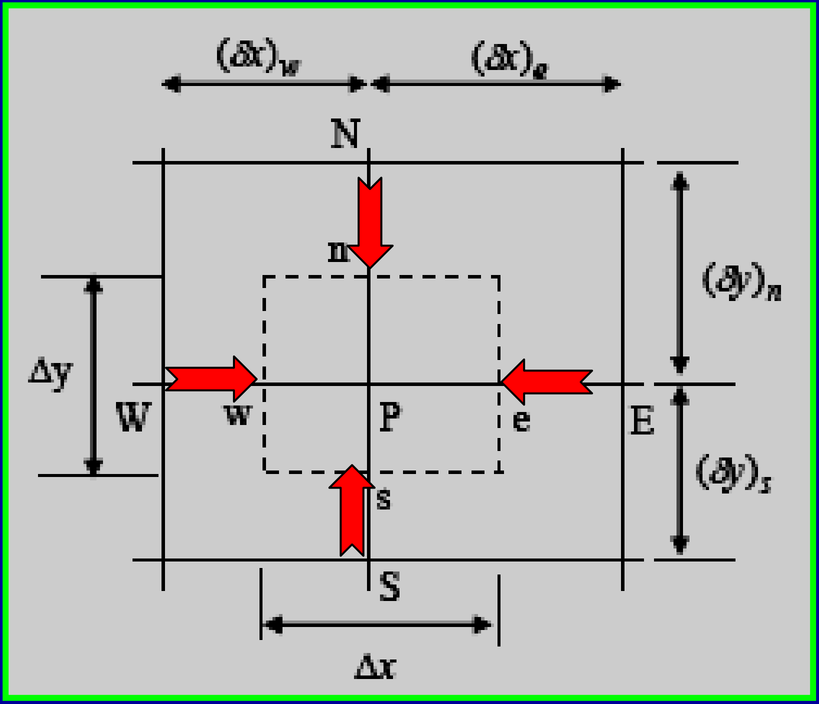
记内热源为S

$$\boxed{S \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot 1}$$

■ 根据能量守恒定律，有

$$\boxed{Q_e + Q_w + Q_n + Q_s + S \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot 1 = 0}$$

$$\lambda_e \Delta y \frac{T_E - T_P}{(\delta x)_e} + \lambda_w \Delta y \frac{T_W - T_P}{(\delta x)_w} + \lambda_n \Delta x \frac{T_N - T_P}{(\delta y)_n} + \lambda_s \Delta x \frac{T_S - T_P}{(\delta y)_s} + S \Delta x \Delta y = 0$$



记离散方程系数为

$$A_E = \frac{\lambda_e \Delta y}{(\delta x)_e} \qquad A_W = \frac{\lambda_w \Delta y}{(\delta x)_w} \qquad A_N = \frac{\lambda_n \Delta x}{(\delta y)_n} \qquad A_S = \frac{\lambda_s \Delta x}{(\delta y)_s}$$

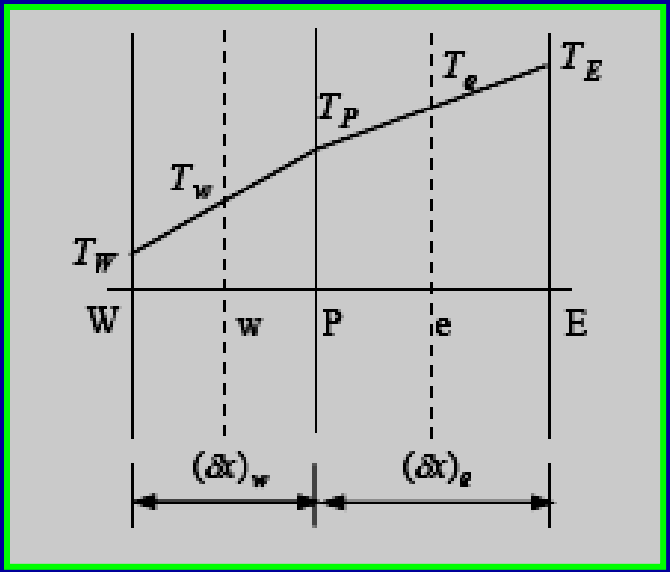
- 离散方程的形式为

$$A_P T_P = A_E T_E + A_W T_W + A_N T_N + A_S T_S + S\Delta x \Delta y$$

式中，

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

- 交界面上的导热系数可用相邻两控制容积构成的复合平壁导热公式计算。假设：
  (a)相邻节点之间的温度分布是线性的；
  (b)控制容积间的温度是阶跃变化的。



则对e 界面有

$$q_e = \frac{\lambda_e (T_P - T_E)}{(\delta x)_e} = \frac{\lambda_P (T_P - T_e)}{(\delta x)_e / 2} = \frac{\lambda_E (T_e - T_E)}{(\delta x)_e / 2}$$

整理得到

$$\lambda_e = \frac{2\lambda_P \lambda_E}{\lambda_P + \lambda_E}$$

在很多场合中，交界面上的导热系数也可近似取相邻节点导热系数的平均值。

源项线化处理

为了使求解的离散方程具有稳定性，要求离散方程中所有的系数必须为正值。因为相邻节点温度的增加，必须引起所设节点的温度增加。为此还需要对源项进行线化处理，即

$$\boxed{S = S_C + S_P T_P \qquad (S_P \le 0)}$$

最终的节点温度离散方程形式为

$$A_P T_P = A_E T_E + A_W T_W + A_N T_N + A_S T_S + S_C \Delta x \Delta y$$

式中 $A_P = A_E + A_W + A_N + A_S - S_P \Delta x \Delta y$

对于无内热源，导热系数为常数的物体，如果取均匀的网格划分(**Δx=Δy=δx=δy**)，则上式可以简化为

$$T_P = \frac{1}{4}(T_E + T_W + T_N + T_S)$$

建立边界节点的温度离散方程

边界节点的温度离散方程建立方法同内部节点的温度离散方程建立一致。但要注意控制容积的形状发生了变化。

对于第一类边界条件的导热问题，因为节点的温度已知，就不需要再建立什么关系式了。下面我们仅讨论几种典型的边界节点处理。

给定第二类边界条件的平直边界上节点

对边界节点**B**的控制容积用差分代替微分

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e-\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n-\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)_B}{\Delta y'}$$

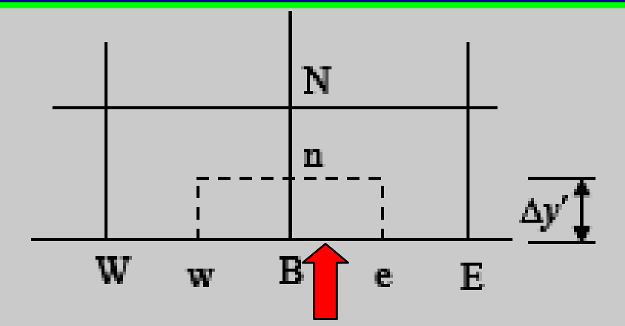


图 9-3 第二类边界节点

式中：

$$\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e=\frac{\lambda_e(T_E-T_B)}{(\delta x)_e} \qquad \left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w=\frac{\lambda_w(T_B-T_W)}{(\delta x)_w}$$

$$\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n=\frac{\lambda_n(T_N-T_B)}{(\delta y)_n} \qquad \left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)_B=-q_B$$

代入微分方程式，整理得

$$\boxed{A_BT_B=A_ET_E+A_WT_W+A_NT_N+b}$$

式中

$$A_E=\frac{\lambda_e\Delta y'}{(\delta x)_e} \qquad A_W=\frac{\lambda_w\Delta y'}{(\delta x)_w} \qquad A_N=\frac{\lambda_n\Delta x}{(\delta y)_n}$$

$$A_P=A_E+A_W+A_N-S_P\Delta x\Delta y'$$

$$b=q_B\Delta x+S_C\Delta x\Delta y'$$

■ 给定第三类边界条件的平直边界上节点

从w表面进入控制容积的热流量 $\lambda_w \dfrac{T_W - T_B}{(\delta x)_w}\Delta y$

从n表面进入控制容积的热流量 $\lambda_n \dfrac{T_N - T_B}{(\delta y)_n}\Delta x'$

从s表面进入控制容积的热流量 $\lambda_s \dfrac{T_S - T_B}{(\delta y)_s}\Delta x'$

从B表面进入控制容积的热流量 $h(T_f - T_B)\Delta y$

利用热量平衡关系式，得到

$$\boxed{A_B T_B = A_W T_W + A_N T_N + A_S T_S + b}$$

$$A_W = \frac{\lambda_w \Delta y}{(\delta x)_w} \qquad A_N = \frac{\lambda_n \Delta x'}{(\delta y)_n} \qquad A_S = \frac{\lambda_s \Delta x'}{(\delta y)_s}$$

$$A_P = A_W + A_N + A_S + h\Delta y - S_P \Delta x' \Delta y$$

$$b = hT_f \Delta y + S_C \Delta x' \Delta y$$

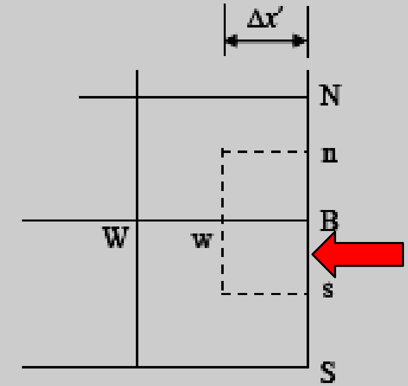


图 9-4 第三类边界条件节点

外部角点

设外部角点一侧为第二类边界条件，另一侧为第三类边界条件。可以得到

$$\boxed{A_B T_B = A_W T_W + A_N T_N + b}$$

式中：

$$A_W = \frac{\lambda_w \Delta y'}{(\delta x)_w} \qquad A_N = \frac{\lambda_n \Delta x'}{(\delta y)_n}$$

$$A_P = A_W + A_N + h\Delta y' - S_P \Delta x' \Delta y'$$

$$b = q\Delta x' + hT_f \Delta y' + S_C \Delta x' \Delta y'$$

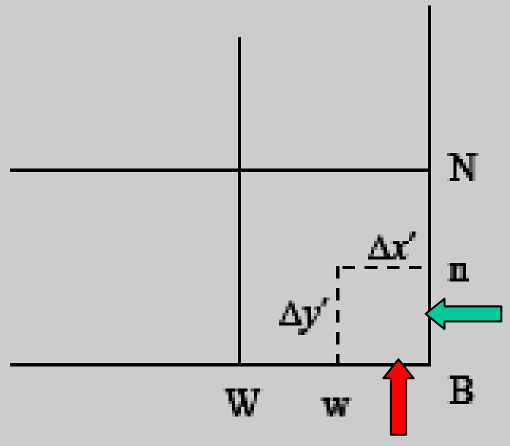


图 9-5 外部角点

■ 内部角点

设内部角点的边界条件为第三类边界条件。可以得到

$$\boxed{A_B T_B = A_E T_E + A_W T_W + A_N T_N + A_S T_S + b}$$

$$A_E = \frac{\lambda_e \Delta y'}{(\delta x)_e} \qquad A_W = \frac{\lambda_w \Delta y}{(\delta x)_w} \qquad A_N = \frac{\lambda_n \Delta x'}{(\delta y)_n} \qquad A_S = \frac{\lambda_s \Delta x}{(\delta y)_s}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + h(\Delta x - \Delta x') + h(\Delta y - \Delta y') - S_P \Delta x' \Delta y$$

$$b = hT_f(\Delta y - \Delta y') + hT_f(\Delta x - \Delta x') + S_C(\Delta x \Delta y - \Delta x' \Delta y')$$

有关边界节点各种不同情况的离散方程，读者可以自行推导。

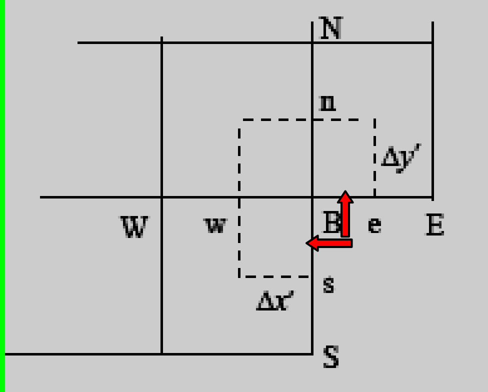


图 9-6 内部角点

节点方程组的求解

写出所有内节点和边界节点的温度差分方程

n个未知节点温度，***n***个代数方程式：

$$T_1 = a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + \ldots\ldots + a_{1n}T_n + b_1$$

$$T_2 = a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + \ldots\ldots + a_{2n}T_n + b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T_n = a_{n1}T_1 + a_{n2}T_2 + \ldots\ldots + a_{nn}T_n + b_n$$

代数方程组的求解方法：直接解法、迭代解法

直接解法：通过有限次运算获得代数方程精确解;

矩阵求逆、高斯消元法

缺点：所需内存较大、方程数目多时不便、不适用于非线性问题（若物性为温度的函数，节点温度差分方程中的系数不再是常数，而是温度的函数。这些系数在计算过程中要相应地不断更新）

在导热问题数值求解中，往往采用迭代法。这是因为：

其一，直接解法不太适应过多数目的代数方程求解;

其二，对于求解非线性问题（代数方程中各项系数在求解过程中不变化的情形称为线性问题），迭代法具有其独特的优势。

迭代解法：先要对被求解的温度场预先假定一个试探解，称为初场。以此试探解作为初始值（注意此处的初始值与非稳态导热的初始条件不是一个概念）代入内部节点和边界节点的代数方程中，得到一组新的值；再将这组经第一次迭代得到的解作为新的试探解，经计算得到第二次迭代结果。如此反复，直到相邻两次计算结果之差小于预先设定的允许差值（计算精确度）时为止

迭代解法有多种：简单迭代（**Jacobi**迭代）、高斯-赛德尔迭代、块迭代、交替方向迭代等

高斯-赛德尔迭代的特点：每次迭代时总是使用节点温度的最新值

例如：根据第 k 次迭代的数值 $T_1^{(k)}$、$T_2^{(k)}$....$T_n^{(k)}$

可以求得节点温度：

$$T_1^{(k+1)} = a_{11}T_1^{(k)} + a_{12}T_2^{(k)} + \ldots\ldots + a_{1n}T_n^{(k)} + b_1^{(k)}$$

在计算后面的节点温度时应按下式（采用最新值）

$$T_2^{(k+1)} = a_{21}T_1^{(k+1)} + a_{22}T_2^{(k)} + \ldots\ldots + a_{2n}T_n^{(k)} + b_2^{(k)}$$

$$T_3^{(k+1)} = a_{31}T_1^{(k+1)} + a_{32}T_2^{(k+1)} + \ldots\ldots + a_{3n}T_n^{(k)} + b_3^{(k)}$$

……………………………………………………

$$T_n^{(k+1)} = a_{n1}T_1^{(k+1)} + a_{n2}T_2^{(k+1)} + \ldots\ldots + a_{nn-1}T_{n-1}^{(k+1)} + a_{nn}T_n^{(k)} + b_n^{(k)}$$

判断迭代是否收敛的准则：

$$\max\left|T_i^{(k+1)}-T_i^{(k)}\right|\le\varepsilon$$

$$\max\left|\frac{T_i^{(k+1)}-T_i^{(k)}}{T_i^{(k)}}\right|\le\varepsilon$$

$$\max\left|\frac{T_i^{(k+1)}-T_i^{(k)}}{T_{\max}^{(k)}}\right|\le\varepsilon$$

ε — 允许的偏差；

相对偏差ε值一般取$10^{-3}\sim10^{-6}$

***k*及*k+1*表示迭代次数；$T_{\max}^{(k)}$—第*k*次迭代得到的最大值**

当有接近于零的*t*时，第三个较好

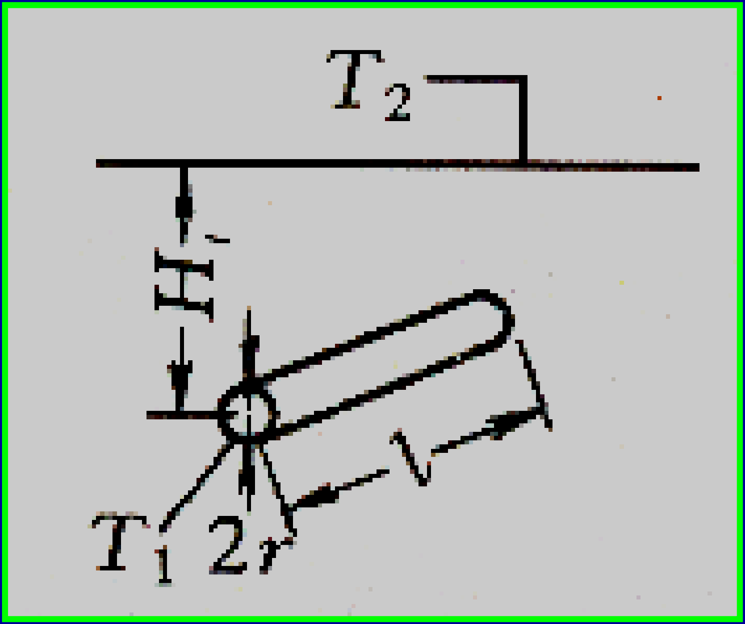
有时还要同时考虑热流密度收敛

三、利用导热形状因子 *S*

二维甚至三维的稳态导热问题；工程计算；
已知两个边界的温度恒定

热流量计算：采用一种简便的计算公式：
将涉及物体几何形状和尺寸的因素归纳在一起

—— 形状因子 *S*



$$Q = S\lambda(T_1 - T_2)$$

一维无限大平壁的形状因子：

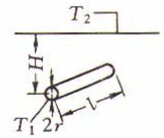
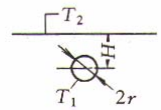
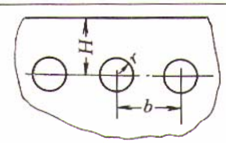
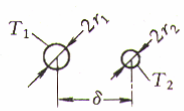
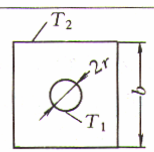
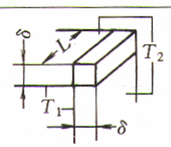
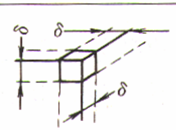
$$S = A/\delta$$

一维圆筒壁的形状因子：

$$S = \frac{2\pi l}{\ln(d_2/d_1)}$$

几种导热过程的形状因子

表 2-3

导热过程	示 意 图	形 状 因 子	使 用 条 件
等温表面半无限大物体中的水平埋管		$S=\frac{2\pi l}{\mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{H}{r}\right)}$ $S=\frac{2\pi l}{\ln\left(\frac{2H}{r}\right)}$ $S=\frac{2\pi l}{\ln\left(\frac{l}{r}\right)\left[1-\frac{\ln\left(\frac{l}{2H}\right)}{\ln\left(\frac{l}{r}\right)}\right]}$	$l\geqslant r$，$H\leqslant 3r$ $l\geqslant r$，$H>3r$ $l\geqslant H$，$H\geqslant r$
等温表面半无限大物体中的圆球		$S=\frac{4\pi r}{1-\frac{r}{2H}}$	$H>r$
等温表面半无限大物体中的等向距等管径的排管		$S=\frac{2\pi l}{\ln\left(\frac{b}{\pi r}\mathrm{sh}\frac{2\pi H}{b}\right)}$	$H>2r$，$l\geqslant b$ 对于每一根管子
无限大物体中的两等温圆管之间的导热		$S=\frac{2\pi l}{\mathrm{ch}^{-1}\frac{\delta^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}}$	$l\geqslant r_1$，r_2 $l\geqslant\delta$
圆管外包方形隔热层		$S=\frac{2\pi l}{\ln\left(1.08\frac{b}{2r}\right)}$	$l\geqslant r$ $b>2r$
通过两垂直平壁相交构成的棱柱的导热		$S=0.54L$	内部尺寸都大于$\frac{1}{5}\delta$
通过三台互相垂直的平壁相交构成的顶角的导热		$S=0.15\delta$	内部尺寸都大于$\frac{1}{5}\delta$

本讲要点

- 了解二维稳态导热分离变量解法的基本思想
- 了解二维稳态导热数值解法的基本思想