

传热学

Heat transfer

张靖周

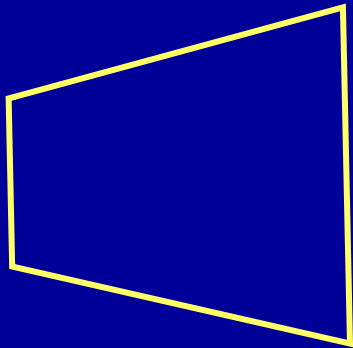
能源与动力学院

第二章

导热基本定律及 稳态导热

2-7 变截面导热问题

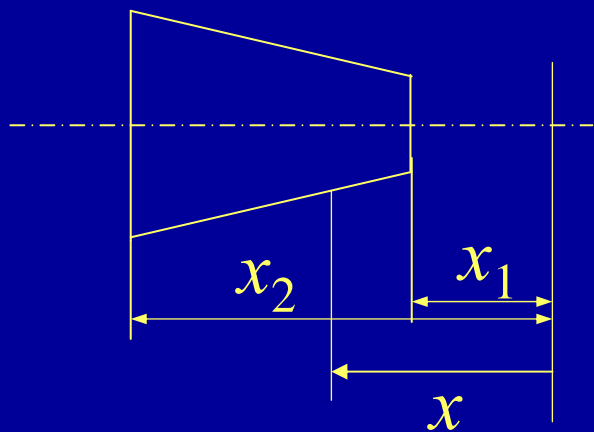
一、问题的引出



■ 上面介绍的是求解导热问题的一般方法，即通过求解导热微分方程确定温度分布，然后根据傅里叶定律获得热流量。

■ 对于一维导热问题，也可以不通过求解微分方程而直接应用傅里叶定律得出导热热流量的计算式，而且对于变导热系数和变截面的情形更为有效。

二、示例



耐温塞子的直径随 x 变化, $D = ax$ (a 为常数), 在的小头处温度为 T_1 , 在的大头处温度为 T_2 , 材料导热系数为常数。假设侧表面是理想绝热的, 试求塞子内的温度分布, 及通过塞子的热流量。

利用傅里叶定律:

$$Q = -\lambda A(x) \frac{dT}{dx} = -\frac{\lambda \pi a^2 x^2}{4} \frac{dT}{dx}$$

分离变量并积分

$$\frac{4Q}{\lambda \pi a^2} \int_{x_1}^x \frac{1}{x^2} dx = -\int_{T_1}^T dT$$

得到

$$T = T_1 - \frac{4Q}{\pi a^2 \lambda} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x} \right)$$

由 $x=x_2$ 的边界条件，确定 Q

$$Q = \frac{\pi a^2 \lambda (T_1 - T_2)}{4(1/x_1 - 1/x_2)}$$

温度分布

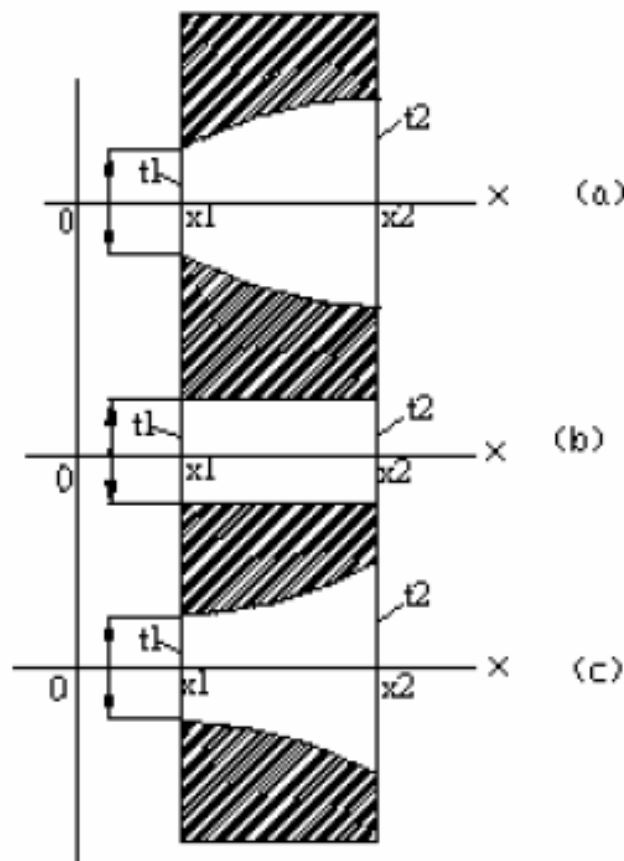
$$T = T_1 + \left(\frac{1/x - 1/x_1}{1/x_1 - 1/x_2} \right) (T_1 - T_2)$$

例2-4

例：已知如图，凸面锥台、圆柱、凹面锥台。 d_1, t_1, t_2 及导热系数相同，一维导热。三种形状物体的直径与 x 轴的关系可统一表示为 $d = ax^n$ ，其中 a 及 n 之值如下：

	凸面锥台	柱体	凹面锥台
a	$0.506 m^{0.5}$	$0.08 m$	$20.24 m^{-0.5}$
n	0.5	0.0	1.5
$x_1 = 25 mm, x_2 = 125 mm$			

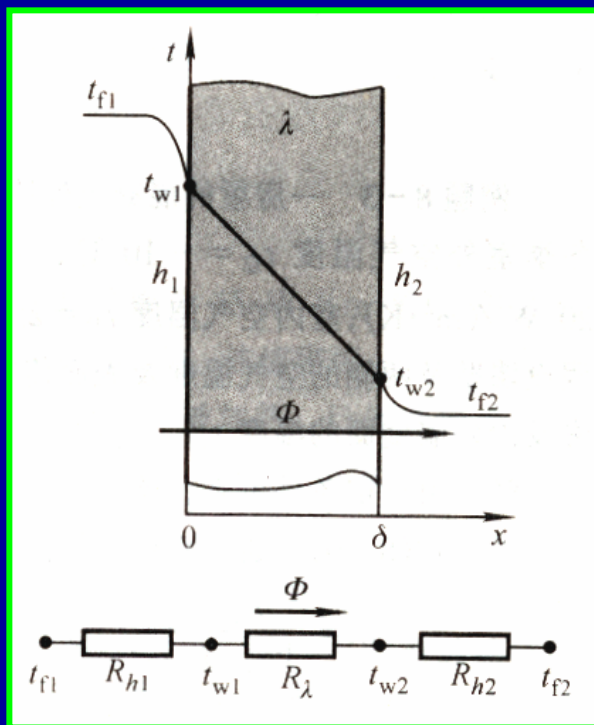
试比较其热流量的大小。



2-8 通过肋壁的稳态导热

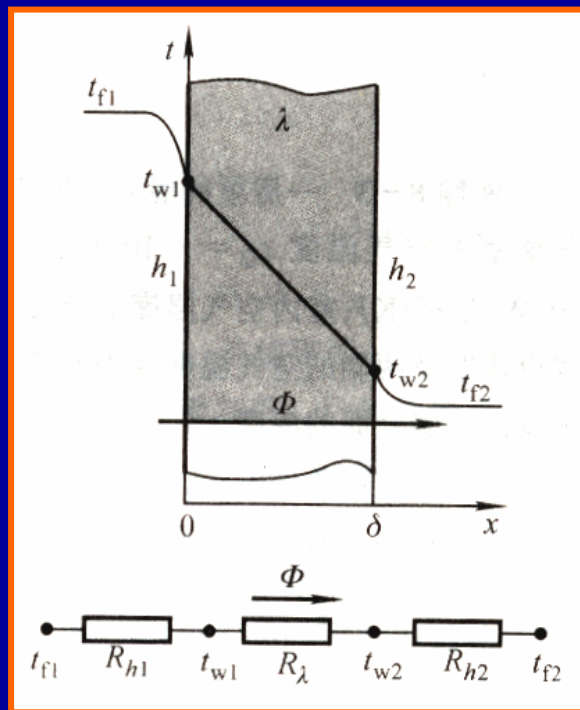
一、问题的提出

第三类边界条件下通过平壁的一维
稳态导热---传热过程



$$Q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{\delta}{\lambda A} + \frac{1}{h_2 A}} \quad [\text{W}]$$

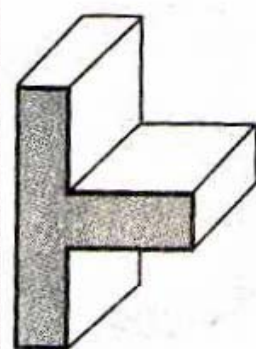
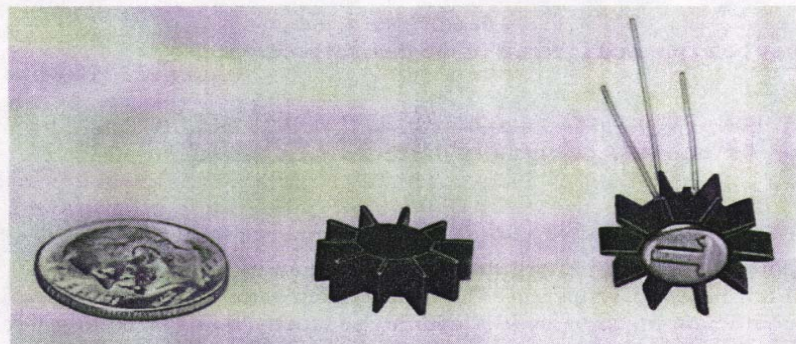
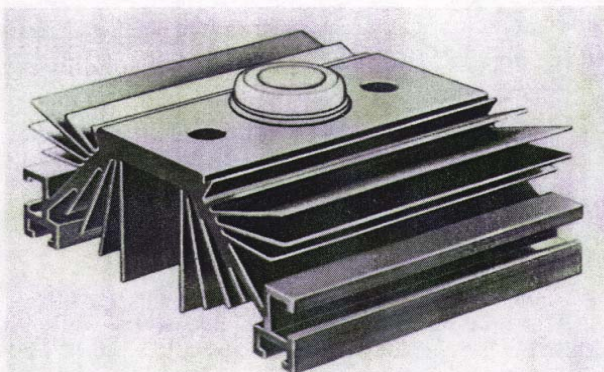
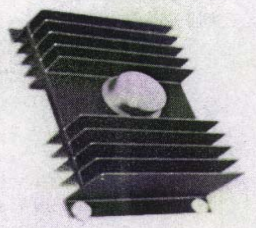
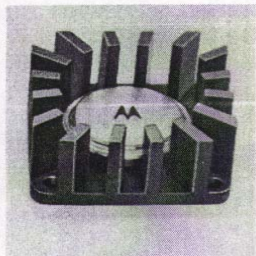
为了增加传热量，可以采取哪些措施？



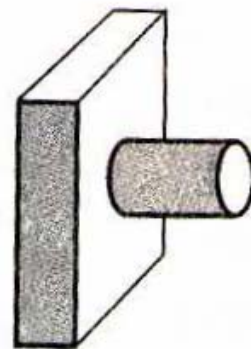
- (1) 增加温差 ($T_{f1} - T_{f2}$)，但受工艺条件限制
- (2) 减小热阻：
 - a) 金属壁一般很薄 (δ 很小)、热导率很大，故：导热热阻一般不大，可忽略
 - b) 增大 h_1 、 h_2 ，但提高 h_1 、 h_2 并非任意的
 - c) 增大换热面积 A 也能增加传热量

■ 在一些换热设备中，在换热面上加装肋片是增大换热量的重要手段

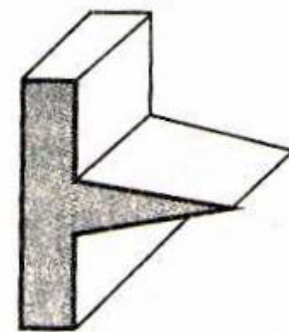
肋壁：直肋、环肋；等截面、变截面



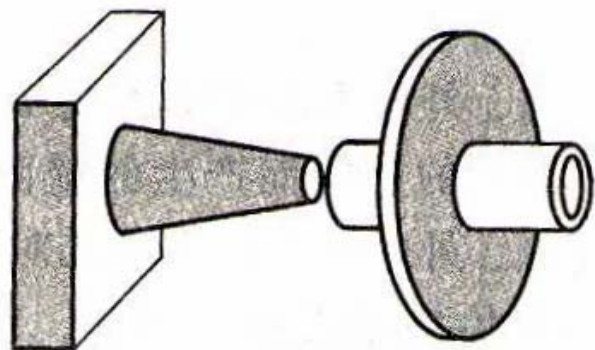
(a) 矩形



(b) 圆柱形



(c) 三角形



(d) 圆锥形

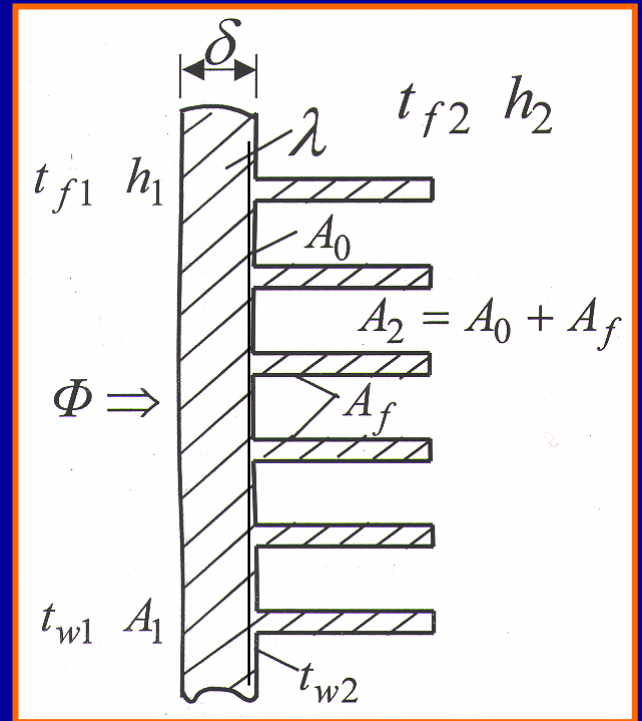
(e) 圆环形

FIG. 2-14
Some fin arrangements used in electronic cooling applications. (Courtesy Wakefield Engineering Inc., Wakefield, Mass.)

思考:

(1) 在什么情况下，可以通过在表面敷设肋片来有效地提高传热能力？

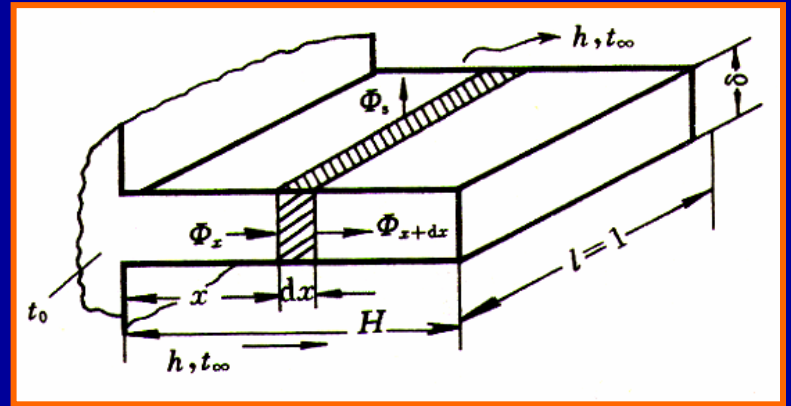
(2) 对肋片的导热系数有无要求？



二、等截面直肋的稳态导热

1、数学模型

■ 严格地说，肋片中的温度场是三维的。其温度分布取决于内部 x 、 y 、 z 三个方向的导热热阻以及表面与流体之间的对流换热热阻。

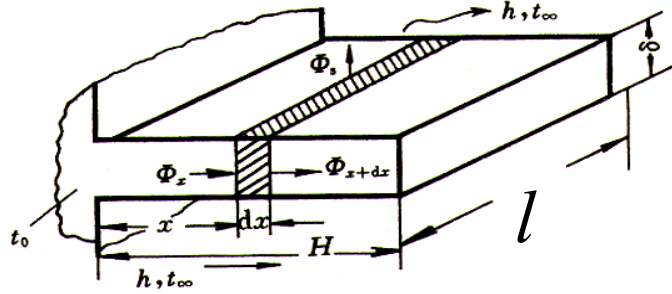


求解三维、二维问题较复杂；将问题进行简化：

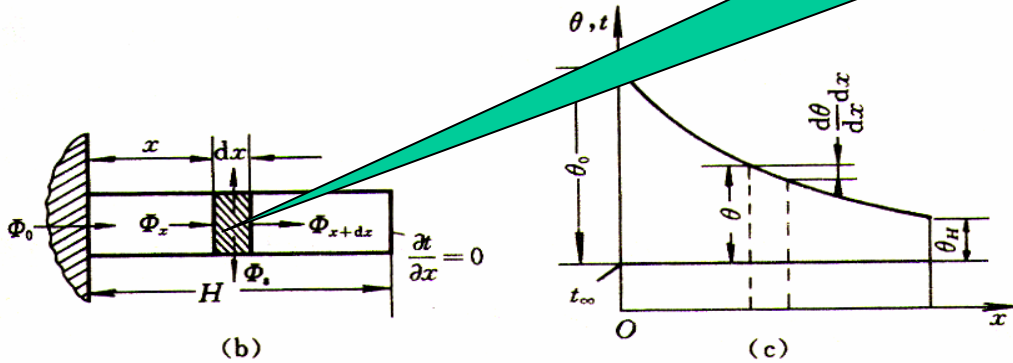
(1) λ 大、 $\delta \ll H$ ，认为温度沿厚度变化很小；

(2) 宽度 $l \gg \delta$ ，认为肋片温度只沿高度方向变化

简化为一维温度场



(a)



(b)

(c)

微元体：截面积 A ，
周长 P ，换热面积
 Pdx

$$[U = 2(l + \delta), A = l\delta]$$

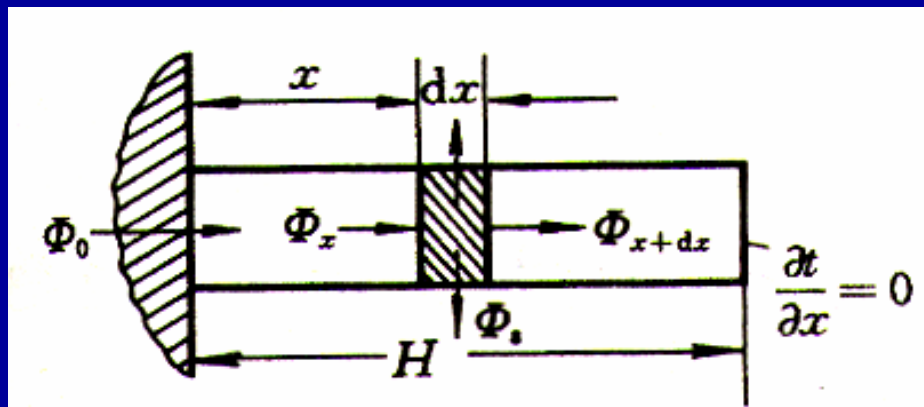
■ 热平衡方程：

$$Q_x = Q_{x+dx} + Q_c$$

$$Q_x = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$

$$Q_c = hPdx (T - T_\infty)$$

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{dQ_x}{dx} dx = -\lambda A \frac{dT}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\lambda A \frac{dT}{dx} \right) dx$$



■ 导热微分方程：（假设 λ 与 A 为定值）

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda A} (T - T_\infty) = 0$$

边界条件： $x = 0, T = T_0$

$$x = H, -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_H = 0$$

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hP}{A} (T - T_f) = 0$$

■ 从物理意义上分析，肋片通过周边表面与周围流体之间进行的热量交换 Q_c (相当于肋片吸热或放热) 相当于内热源的作用

$$q_V = -\frac{Q_c}{dV} = -\frac{h(T - T_f)Pdx}{Adx} = -\frac{h(T - T_f)P}{A}$$

■ 式中暗示了肋片对流体是放热的。根据内热源的定 义，吸热为正，故负号的出现是有明确的物理概念的

2、微分方程求解

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda A} (T - T_\infty) = 0$$

边界条件: $x = 0, T = T_0; x = H, -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_H = 0$

令: $\frac{hP}{\lambda A} = m^2, \theta = T - T_\infty$ — 过余温度

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0$$

$$x = 0, \theta = T - T_\infty = \theta_0; x = H, \frac{d\theta}{dx} = 0$$

■ 二阶线性常微分齐次方程，其通解为：

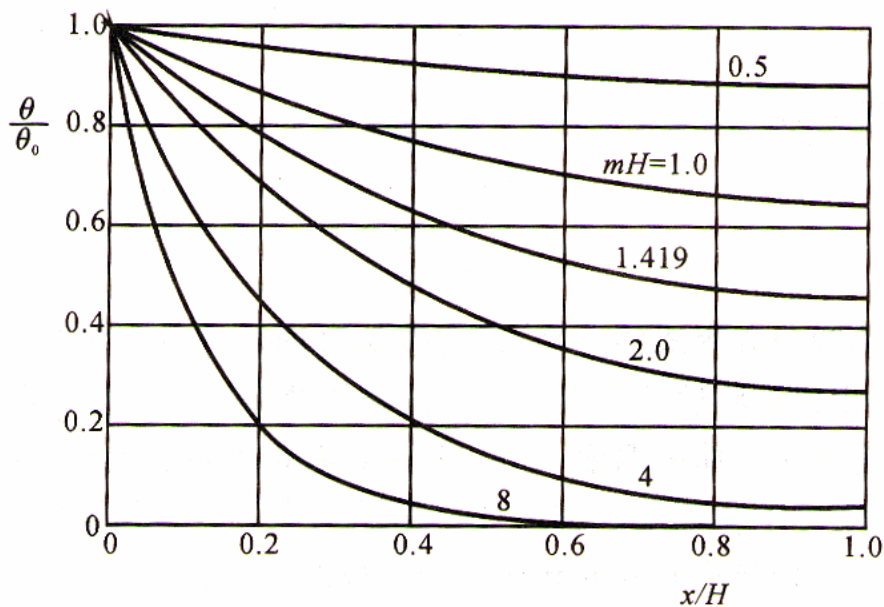
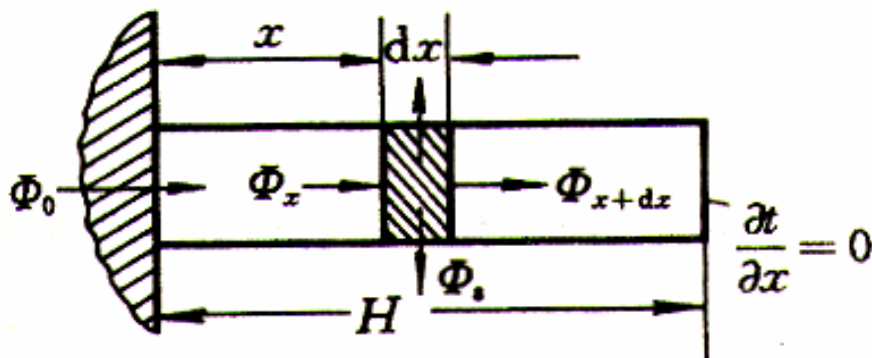
$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

由边界条件，得到

$$c_1 = \theta_0 \frac{e^{-mH}}{e^{mH} + e^{-mH}}; \quad c_2 = \theta_0 \frac{e^{mH}}{e^{mH} + e^{-mH}}$$

■ 等截面直肋内的温度分布：

$$\theta = \theta_0 \frac{e^{m(H-x)} + e^{-m(H-x)}}{e^{mH} + e^{-mH}} = \theta_0 \frac{\text{ch}[m(H-x)]}{\text{ch}(mH)}$$



$$\theta = \theta_0 \frac{\text{ch}[m(H-x)]}{\text{ch}(mH)}$$

肋端的过余温度：

$$\theta_H = \theta_0 \frac{1}{\text{ch}(mH)}$$

$$\frac{\theta_H}{\theta_0} = \frac{1}{\text{ch}(mH)}$$

肋片表面的散热量：

稳态条件下肋片表面的散热量=通过肋基导入肋片的热量

$$\Phi = -\lambda A \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = \lambda A \theta_0 m \cdot \text{th}(mH) = \sqrt{hP\lambda A} \theta_0 \cdot \text{th}(mH)$$

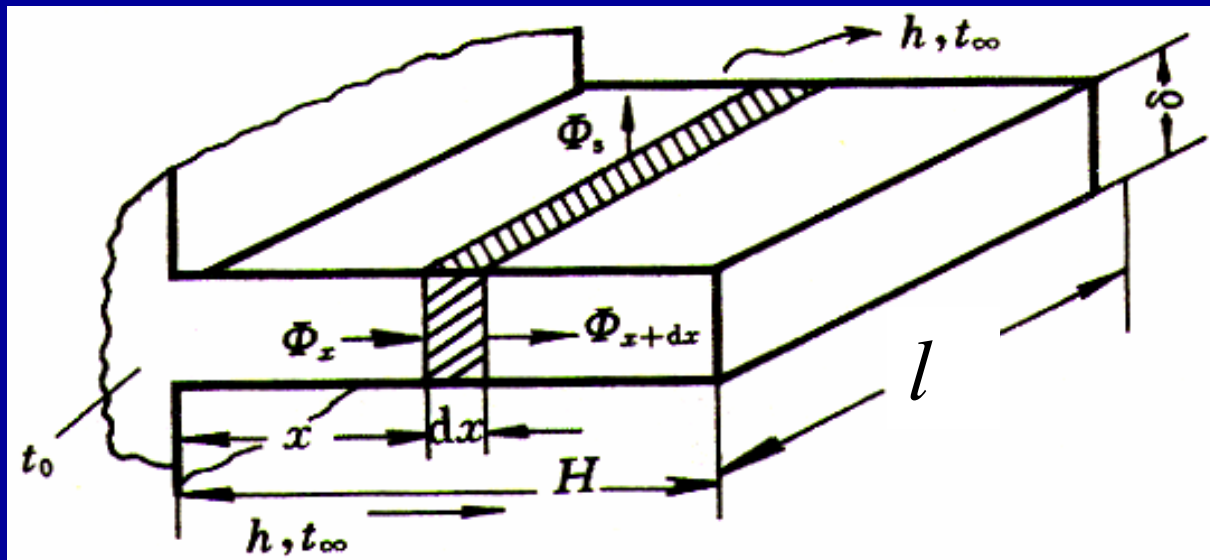
$$\operatorname{ch}(mH) = \frac{e^{mH} + e^{-mH}}{2}; \quad \operatorname{th}(mH) = \frac{e^{mH} - e^{-mH}}{e^{mH} + e^{-mH}}$$

双曲余弦函数

双曲正切函数

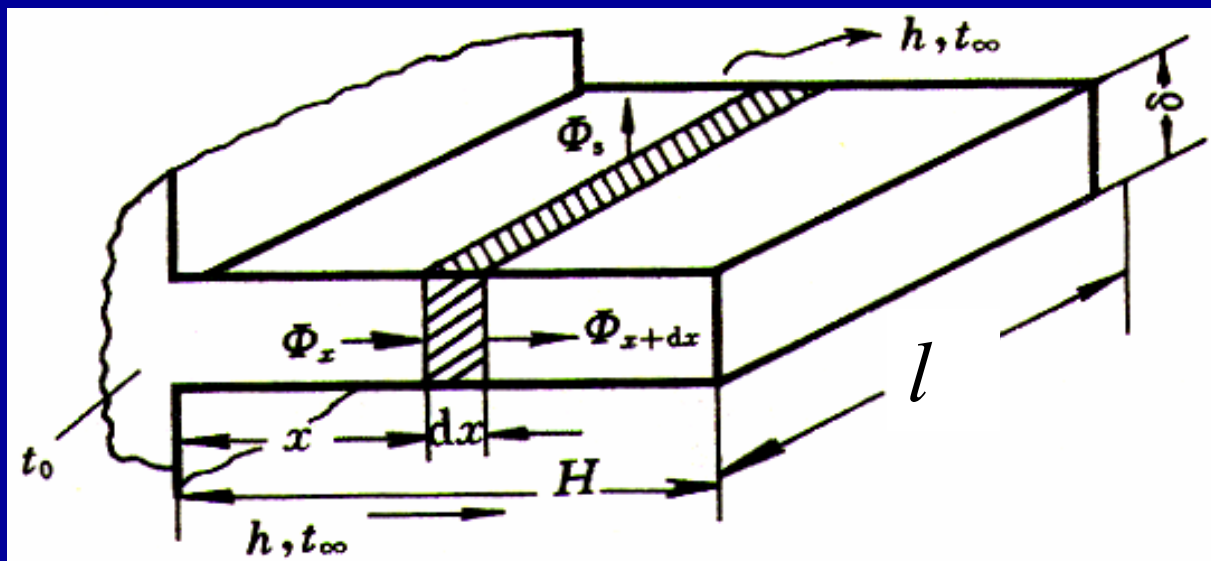
几点说明:

(1) 上述推导中忽略了肋端的散热 (认为肋端绝热)。对于一般工程计算, 尤其高而薄的肋片, 足够精确。若必须考虑肋端散热, 取: $H_c = H + \delta/2$



(2) 上述分析近似认为肋片温度场为一维。

当 $Bi=h\delta/\lambda \leq 0.05$ 时，误差小于1%。对于短而厚的肋片，二维温度场，上述算式不适用；实际上，肋片表面上表面传热系数 h 不是均匀一致的 — 数值计算

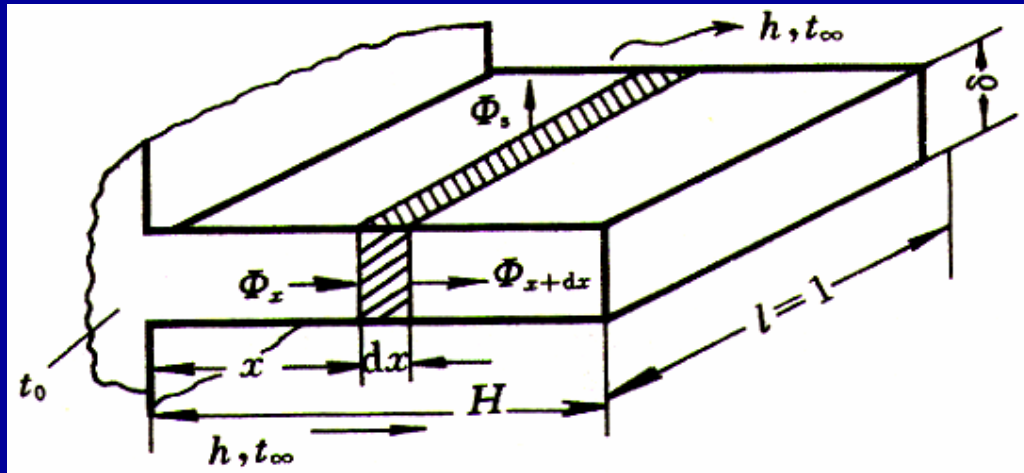


(3) 敷设肋片不一定就能强化传热，只有满足一定的条件才能增加散热量。设计肋片时要注意这一点。

(参考有关书)

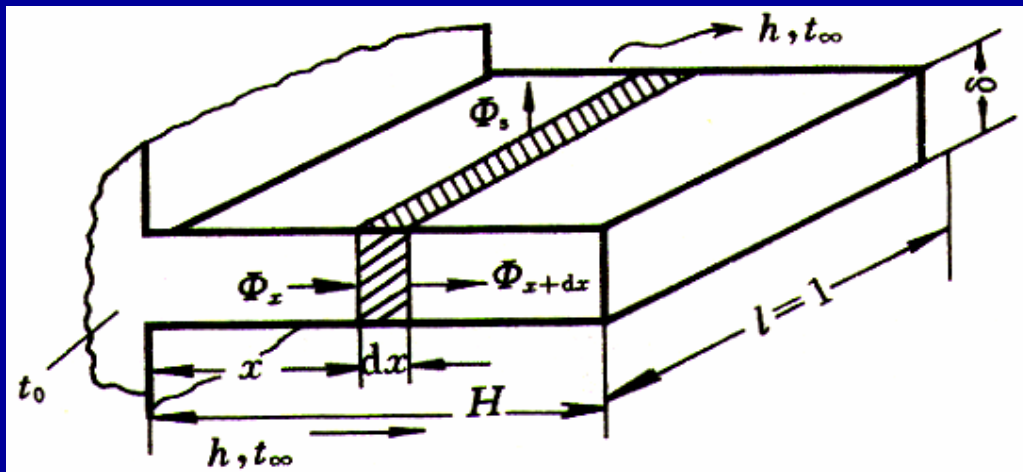
三、肋片效率 从散热的角度评价加装肋片后换热效果

肋片效率：在肋片表面平均温度 T_m 下，肋片的实际散热量 Q 与假定整个肋片表面都处在肋基温度 T_0 时的理想散热量 Q_0 的比值



$$\eta_f = \frac{Q}{Q_0} = \frac{hPH(T_m - T_\infty)}{hPH(T_0 - T_\infty)} = \frac{\theta_m}{\theta_0} < 1$$

$T_m = T_0$ 时， $\eta_f = 1$ — 相当于热导率 $\lambda \rightarrow \infty$ 的情况

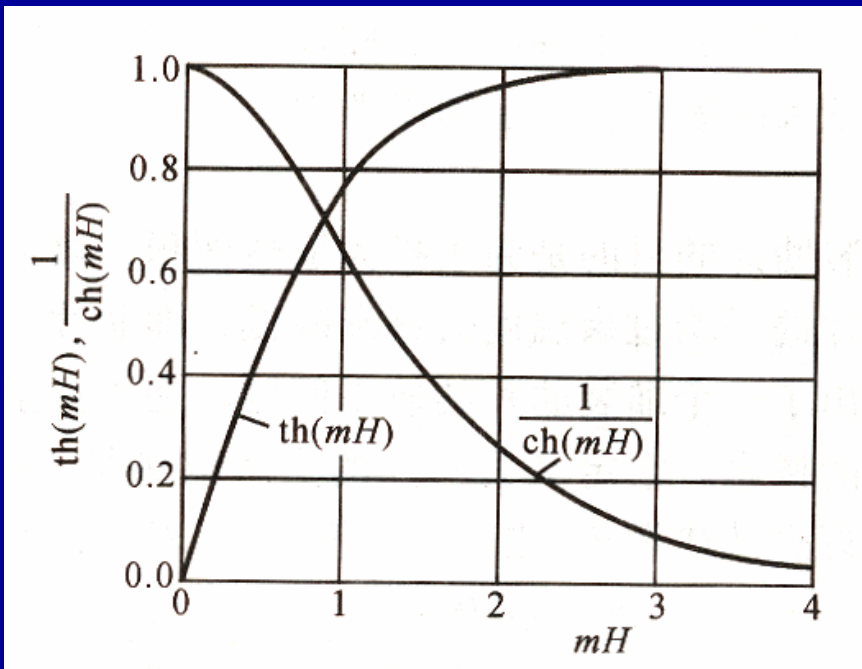


$$\eta_f = \frac{Q}{Q_0} = \frac{hPH(T_m - T_\infty)}{hPH(T_0 - T_\infty)}$$

$$= \frac{\theta_m}{\theta_0} < 1$$

$$\theta_m = \frac{1}{H} \int_0^H \theta dx = \frac{1}{H} \int_0^H \theta_0 \frac{\text{ch}[m(H-x)]}{\text{ch}(mH)} dx = \frac{\theta_0}{mH} \text{th}(mH)$$

$$\therefore \eta_f = \frac{\text{th}(mH)}{mH}$$



th(mH)的数值随 mH 的增加而趋于一定值 ($mH \sim 3$)

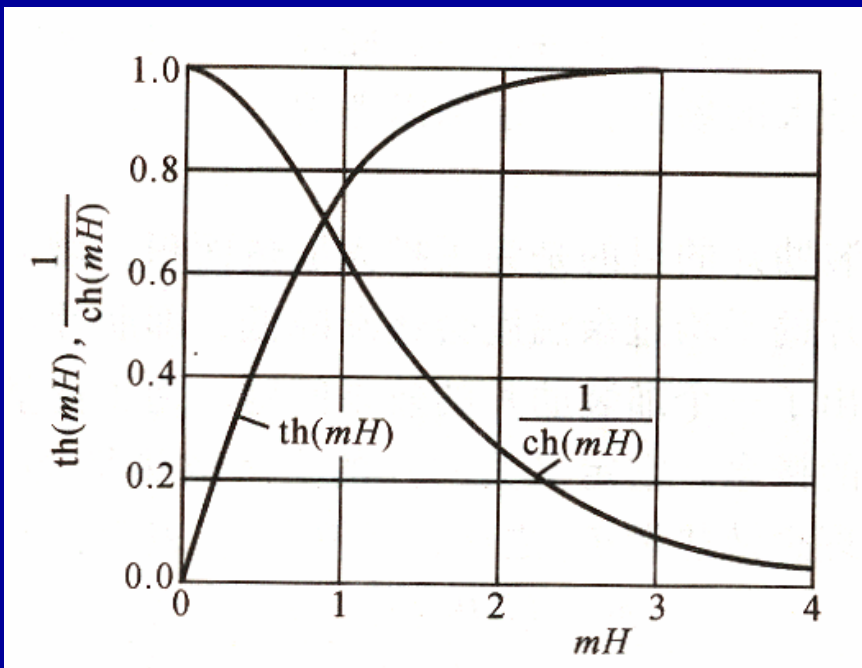
$$Q = \sqrt{hP\lambda A\theta_0} \cdot \text{th}(mH)$$

$$\eta_f = \frac{\text{th}(mH)}{mH} \quad m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}}$$

当 m 数值一定时，随着肋片高度 H 增加， Q 先迅速增大，但逐渐增量越来越小，最后趋于一定值。说明：当 H 增加到一定程度，再继续增加 $H \Rightarrow \eta_f \downarrow$

$$mH \uparrow \rightarrow \frac{1}{\text{ch}(mH)} \downarrow \quad \theta_H = \theta_0 \frac{1}{\text{ch}(mH)}$$

$$mH \uparrow \rightarrow \text{端部温度} \downarrow \rightarrow \eta_f \downarrow$$



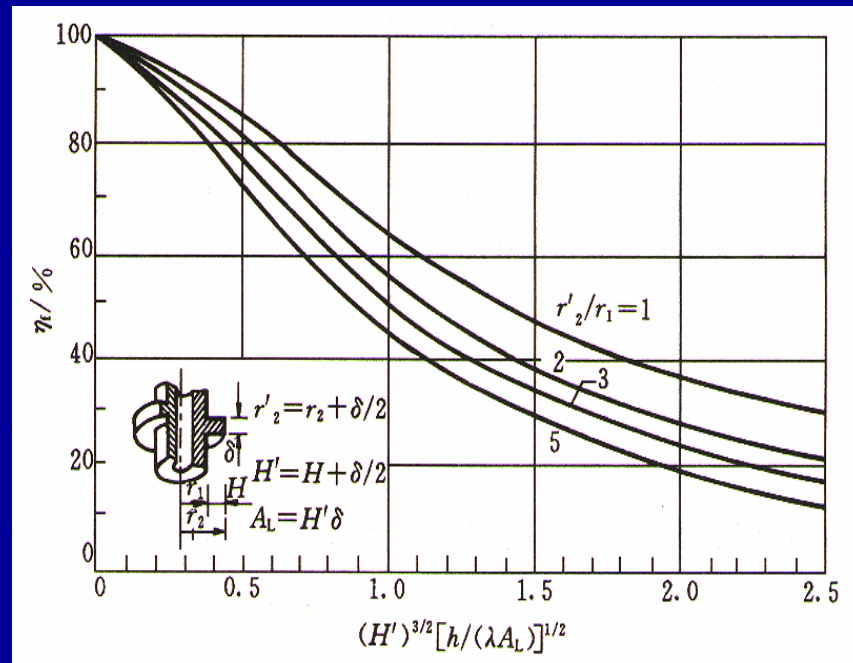
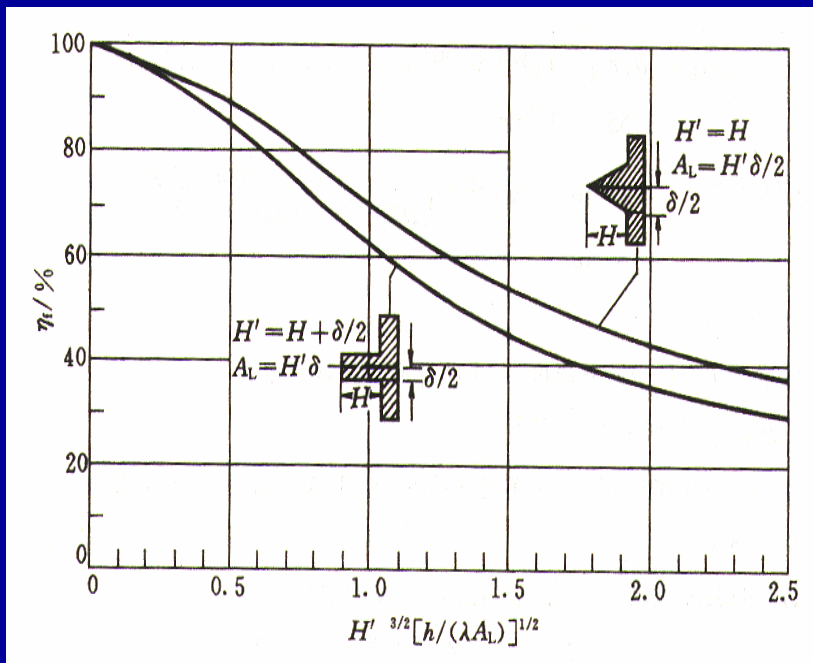
$$\eta_f = \frac{\text{th}(mH)}{mH} \quad m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}}$$

mH 的数值较小时, η_f 较高。在高度 H 一定时, 较小的 m 有利于提高 η_f

肋片应选用热导率较大的材料; 当 λ 和 h 都给定时 m 随 P/A 的降低而增大。 P/A 取决于肋片几何形状和尺寸

$\eta_f > 80\%$ 的肋片经济实用

变截面肋片: 保持散热量基本不变并减轻肋片重量、节省材料



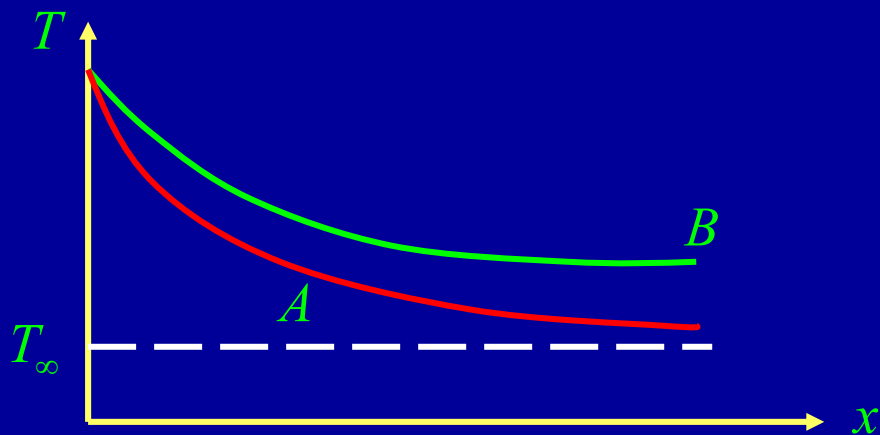
肋片散热量的计算方法:

- (1) 由图线或计算公式得到 η_f
- (2) 计算出理想情况下的散热量 $Q_0 = hPH(t_0 - t_\infty)$
- (3) 由式 $Q = \eta_f Q_0$ 计算出实际散热量 Q

设计肋片: 选择形状、计算; 考虑质量、制造的难易程度、价格、空间位置的限制等

思考题

- 有两根材料不同，厚度和长度均相同的等截面直肋A和B，处于相同的换热环境中。假设它们均满足于肋片一维导热的条件，现测得两者的温度分布如图所示，试分析A和B导热系数的大小。

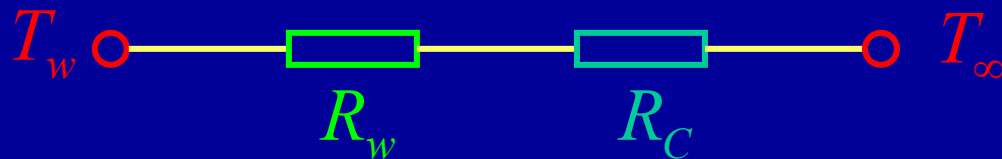


■ 分析方法一，采用肋片的有关结论

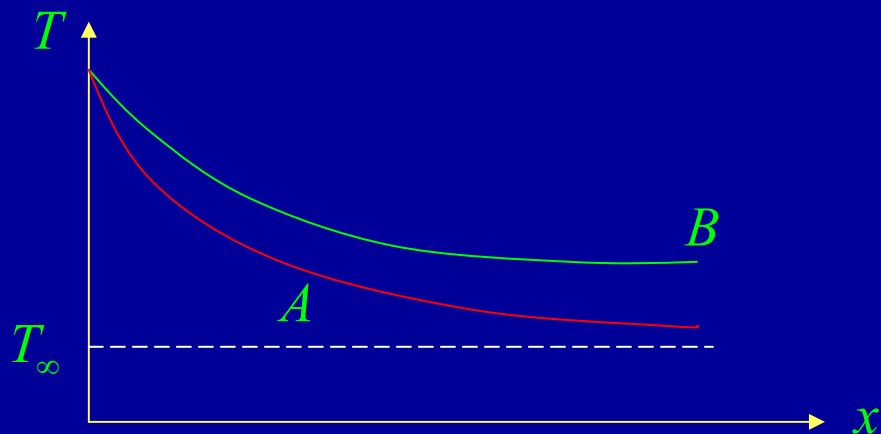
$$\lambda \uparrow \Rightarrow ml \downarrow \Rightarrow \eta_f \uparrow$$

比较A和B，显然B的肋效率高，故B的导热系数大。

■ 分析方法二，运用热阻的概念



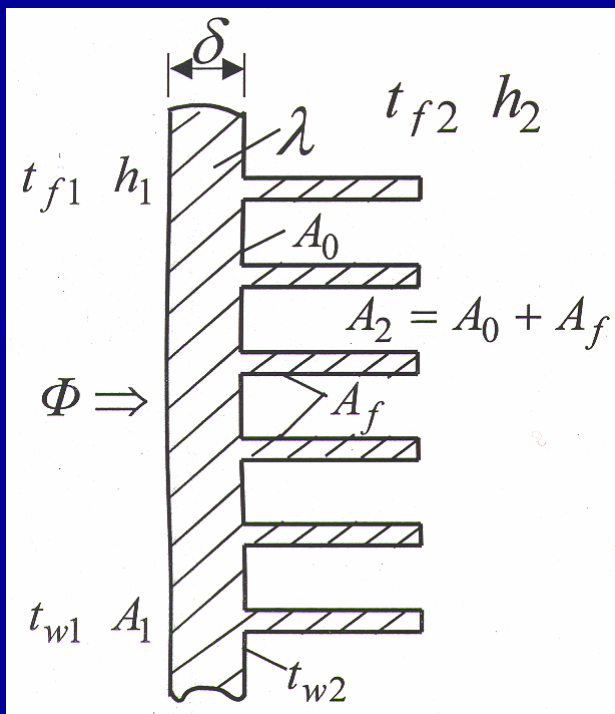
从热量传递的环节分析， $\lambda \uparrow \Rightarrow$ 内部有效导热热阻 $\downarrow \Rightarrow Q \uparrow$



四、肋化系数、肋壁效率

■ 肋化系数、肋片效率和肋壁效率是如何定义的？
在选用和设计肋片时有何用途？

通过肋壁的传热



平壁右侧肋化

A_0 — 基部面积

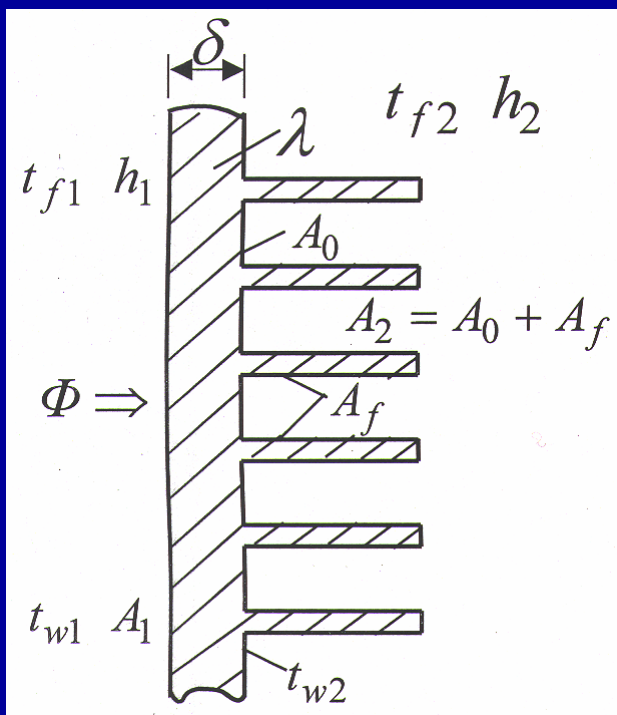
A_f — 肋片面积

平壁右侧总面积:

$$A_2 = A_0 + A_f$$

1、肋化系数

■ **假设**：整个肋表面的温度与根部温度相等，即肋片效率等于1。



$$Q = h_1 A_1 (T_{f1} - T_{w1}) \quad [\text{W}]$$

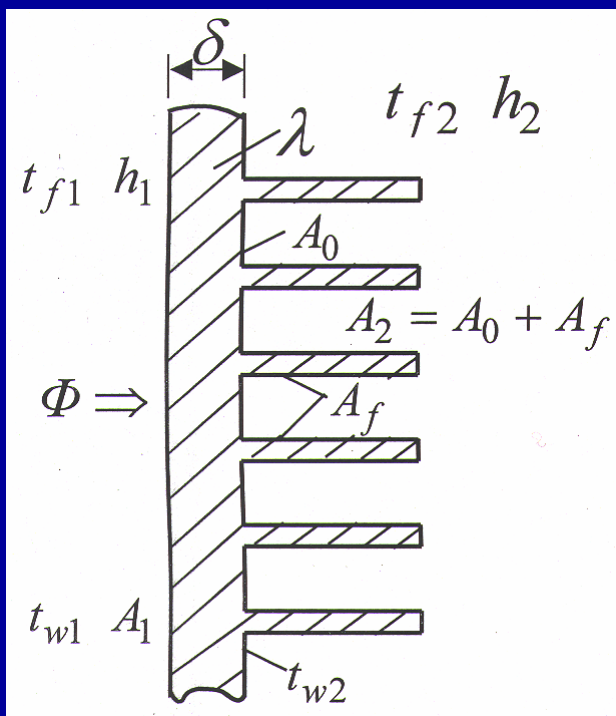
$$Q = \lambda A_1 (T_{w1} - T_{w2}) / \delta \quad [\text{W}]$$

$$Q = h_2 A_2 (T_{w2} - T_{f2}) \quad [\text{W}]$$

$$Q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 A_1} + \frac{\delta}{\lambda A_1} + \frac{1}{h_2 A_2}}$$

■ **肋化系数：** 加肋表面与光侧表面表面积之比

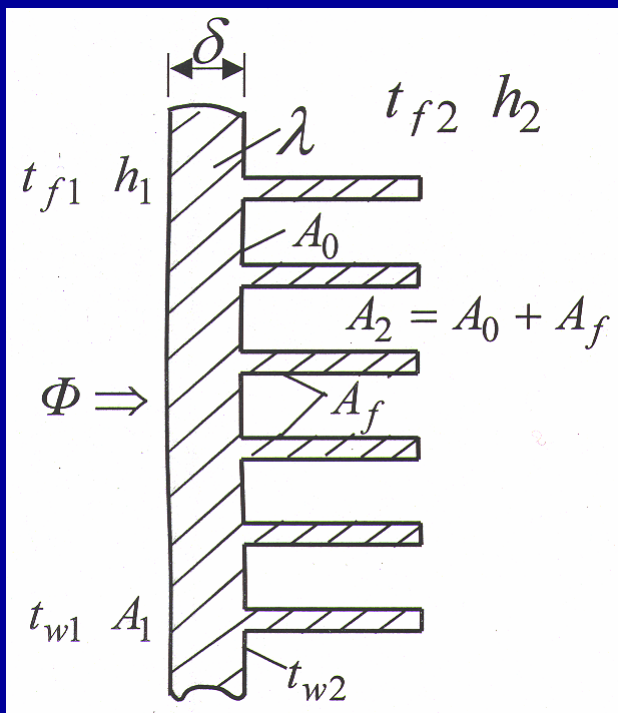
$$\beta = \frac{A_2}{A_1}$$



$$q = \frac{Q}{A_1} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2(A_2/A_1)}}$$

$$q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2\beta}}$$

肋化系数越大： 传热热阻越小，传热系数越大



肋化系数增大的途径:

(1) 采用薄肋, 缩小肋间距, 增加肋数目

(2) 采用长肋, 扩大每一肋片的表面面积

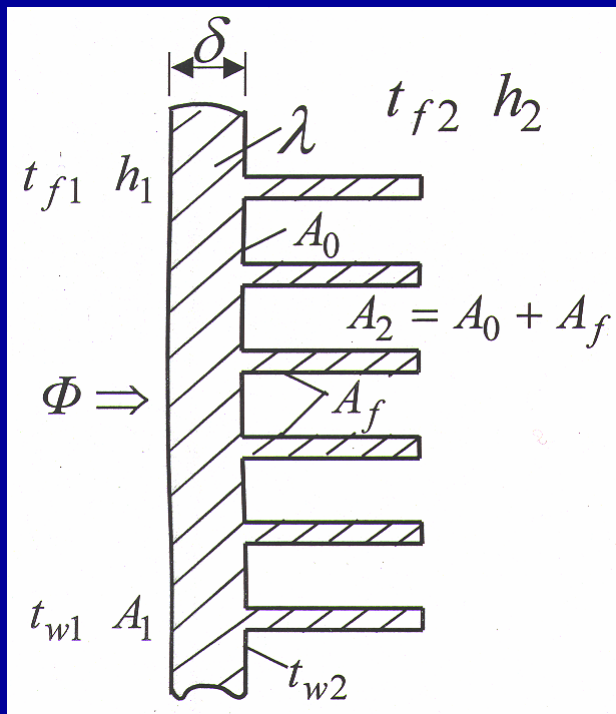
问题: 上述结论是在什么前提下得到的?
有什么不妥之处?

$$Q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2\beta}}$$

整个肋表面的温度与根部温度相等，即肋片效率等于1。

过高地估计了肋化增强传热的作用

引入肋片效率和肋壁效率的概念



2、肋壁效率

A_0 — 基部面积

A_f — 肋片面积

平壁右侧总面积:

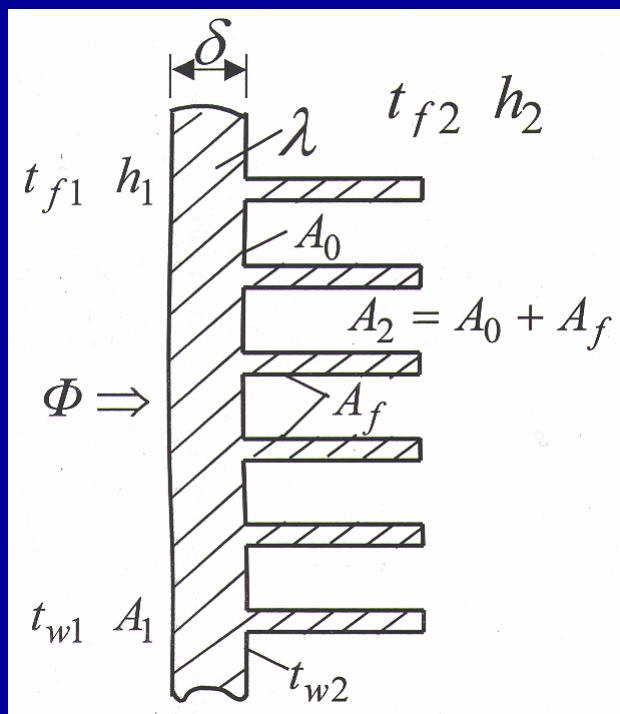
$$A_2 = A_0 + A_f$$

假设：传热过程处于稳态

$$Q = h_1 A_1 (T_{f1} - T_{w1}) \quad [\text{W}]$$

$$Q = \lambda A_1 (T_{w1} - T_{w2}) / \delta \quad [\text{W}]$$

$$\begin{aligned} Q &= h_2 A_0 (T_{w2} - T_{f2}) + h_2 A_f \eta_f (T_{w2} - T_{f2}) \\ &= h_2 A_2 \eta_t (T_{w2} - T_{f2}) \quad [\text{W}] \end{aligned}$$



$$\eta_t = \frac{A_0 + A_f \eta_f}{A_2} = \frac{A_0 + A_f \eta_f}{A_0 + A_f}$$

η_t — 肋壁效率
 η_f — 肋片效率

对于高肋：高度远大于肋片间距

$$A_0 \ll A_f$$

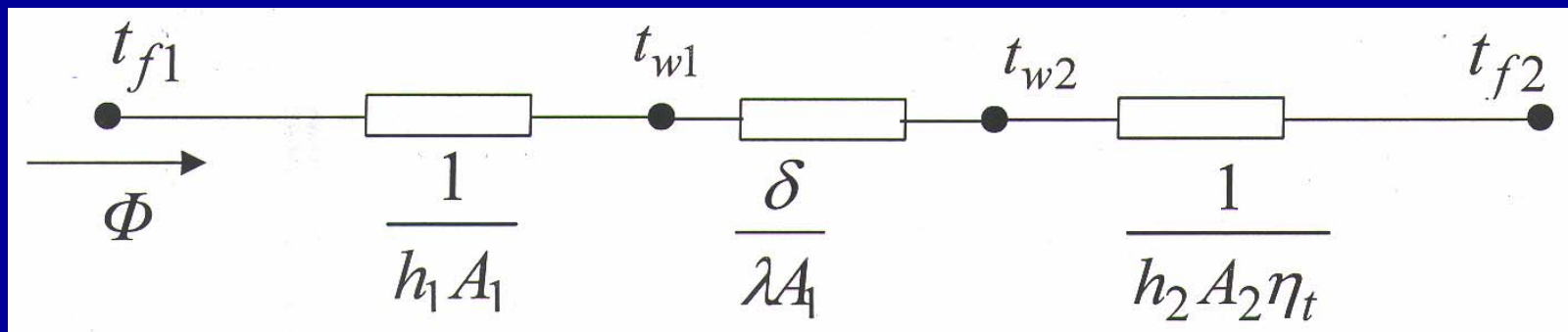
$$\eta_t = \frac{A_0 + A_f \eta_f}{A_0 + A_f} \approx \frac{A_f \eta_f}{A_f} \approx \eta_f$$

$$Q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 A_1} + \frac{\delta}{\lambda A_1} + \frac{1}{h_2 \eta_t \beta A_1}} = k_1 A_1 (T_{f1} - T_{f2})$$

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2 \eta_t \beta}}$$

以光壁面面积为
基准的传热系数

热阻图：



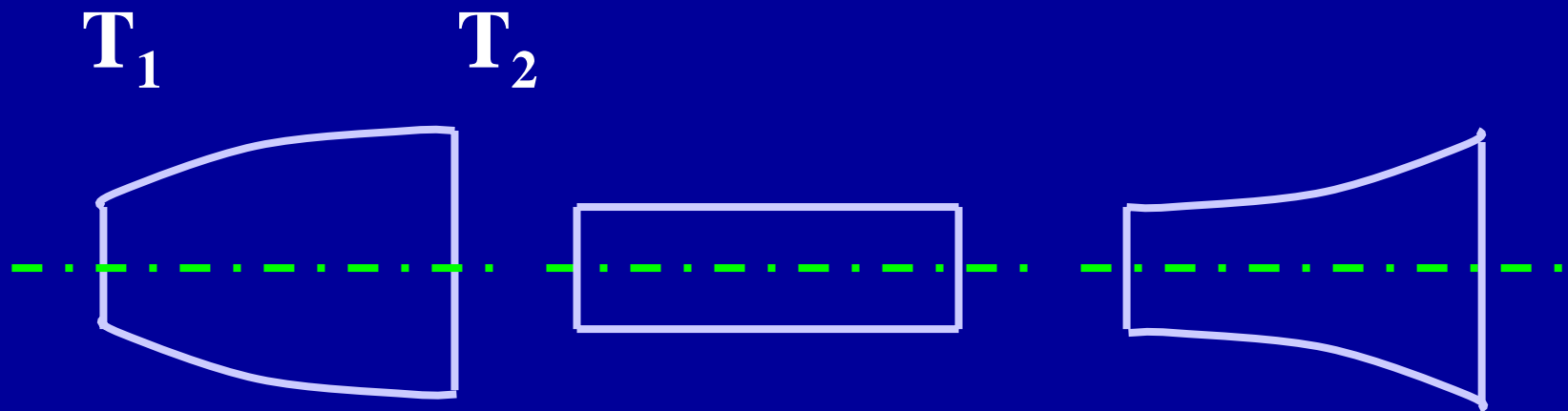
讨论

一维常物性稳态导热物体中，温度分布与导热系数无关的条件是什么？（东南大学期末考试试题）

发生在一个短圆柱中的导热问题，在哪些情形下可以按一维问题来处理？

讨论

试比较如图所示的三种一维稳态导热问题的热流量大小：凸面锥台、圆柱、凹面锥台。比较的条件是：无内热源，侧面绝热，两端面分别保持为恒温 ($T_1 > T_2$)。

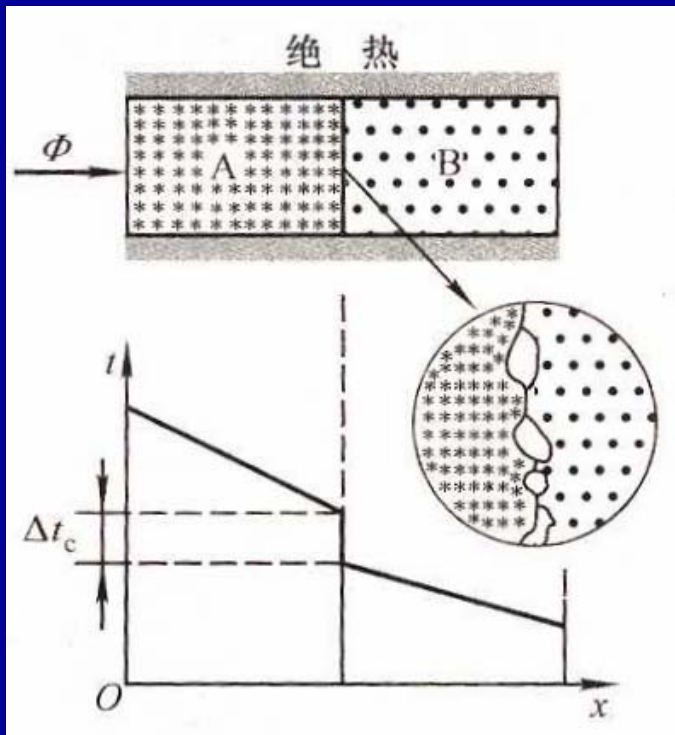


进一步思考：反之，情况又如何？

2-9 通过接触面的导热

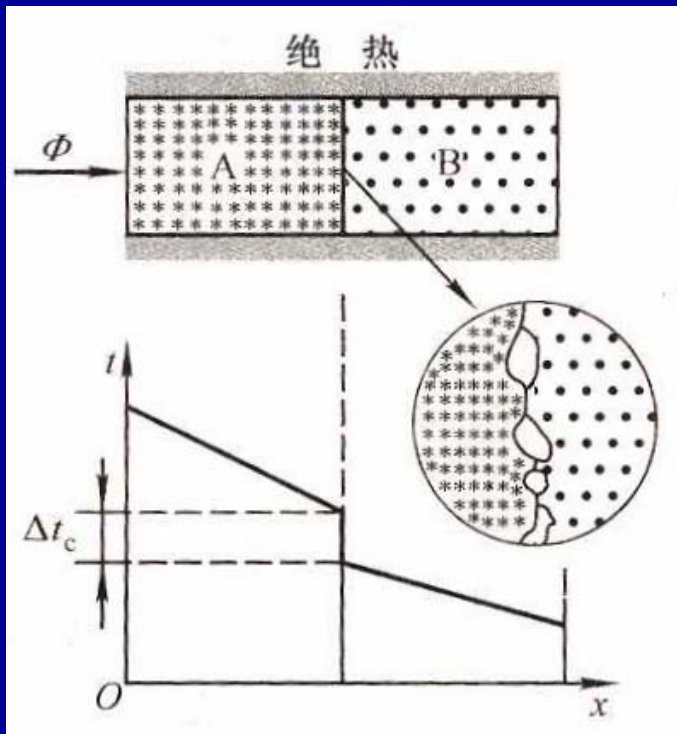
实际固体表面不是理想平整的，所以两固体表面直接接触的界面容易出现点接触，或者只是部分的而不是完全的和平整的面接触 —— 给导热带来额外的热阻

—— 接触热阻



当界面上的空隙中充满导热系数远小于固体的气体时，接触热阻的影响更突出

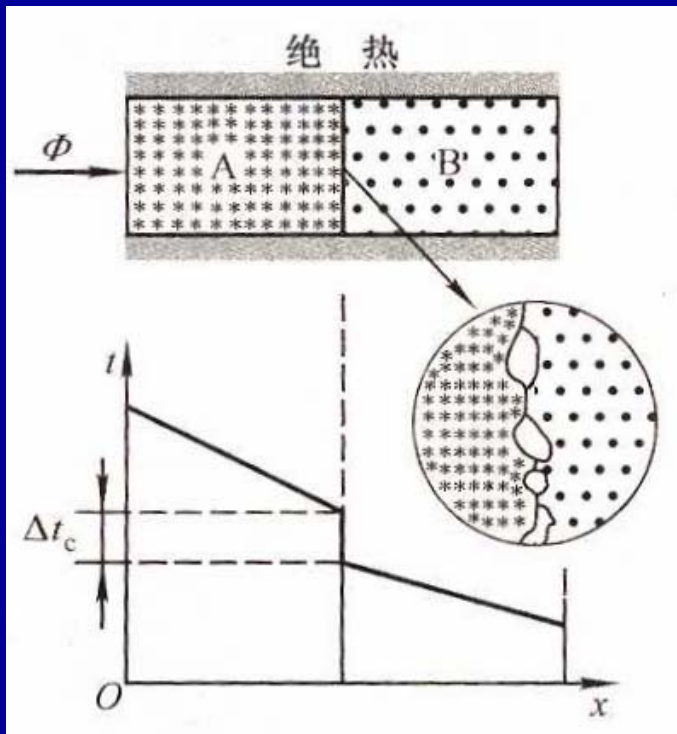
当两固体壁具有温差时，接合处的热传递机理为接触点间的固体导热和间隙中的空气导热，对流和辐射的影响一般不大



$$q = \frac{T_1 - T_3}{\frac{\delta_A}{\lambda_A} + r_c + \frac{\delta_B}{\lambda_{AB}}}$$

$$T_1 - T_3 = q \left(\frac{\delta_A}{\lambda_A} + r_c + \frac{\delta_B}{\lambda_{AB}} \right)$$

- (1) 当热流量不变时，接触热阻 r_c 较大时，必然在界面上产生较大温差
- (2) 当温差不变时，热流量必然随着接触热阻 r_c 的增大而下降
- (3) 即使接触热阻 r_c 不是很大，若热流量很大，界面上的温差是不容忽视的



例:

$$q = 6 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

$$r_c = 2.64 \times 10^{-4} \text{ m}^2\text{K/W}$$

$$\Delta T_c = q \cdot r_c = 158.4^\circ\text{C}$$

接触热阻的影响因素:

- (1) 固体表面的粗糙度
- (2) 接触表面的硬度匹配
- (3) 接触面上的挤压压力
- (4) 空隙中的介质的性质

在实验研究与工程应用中, 消除接触热阻很重要

导热姆 (导热油、硅油)、银

先进的电子封装材料 (AlN), 导热系数达400以上

本讲要点

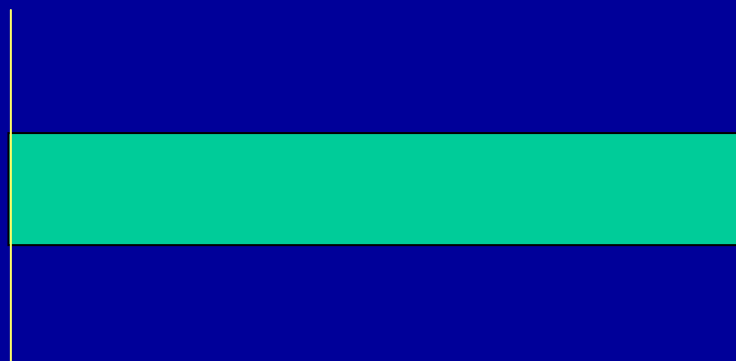
- 变截面导热问题(锥台)
- 掌握肋片导热过程分析的假设
一维的内涵
- 掌握肋片导热的分析方法
- 肋片效率、肋化系数、肋壁效率
理解肋片效率和肋壁效率之间的关系
- 了解接触热阻的概念
影响因素

作业:

1、 p.56 2-46

2、 p.56 2-48

3、 如图所示，一长为30cm，直径为12.5mm的铜杆，导热系数为386W/mK，两端分别紧固在温度为200°C的壁面上。温度为38°C的空气横向掠过铜杆，对流换热系数为17W/m²K。求铜杆散给空气的热量是多少？



作业:

1、 p.35 3

2、 p.36 16

3、 p.36 18

4、 p.36 21 “并简述理由。”

5、一高为0.3m的铝制锥台，导热系数为200W/MK，顶面直径为0.08m，底面直径为0.14m。顶面温度均匀，为540℃，底面温度均匀，为90℃，侧面绝热。求：

(1) 温度分布表达式

(2) 通过锥台的导热热量

■ 变截面导热问题(锥台)

