

文章编号: 1000-8349(2006)04-0380-07



## 恒星内部电荷屏蔽对 $\beta$ 衰变率的影响

孙庆强<sup>1</sup>, 黄增光<sup>1</sup>, 朴红光<sup>1</sup>, 罗志全<sup>2</sup>

(1. 淮海工学院 数理科学系, 连云港 222005; 2. 西华师范大学 物理与电子信息学院, 南充 637002)

**摘要:** 针对低能反应和共振跃迁, 分析了在恒星内部电荷屏蔽对  $\beta$  衰变率的影响。对共振跃迁的分析是基于核的壳层模型。作为例子, 详细计算了电荷屏蔽对  $^{56}\text{Cr}$  的  $\beta$  衰变的影响。结果表明: 在较低温度和高密度下, 电荷屏蔽使  $\beta$  衰变率有明显的增加。这对恒星晚期演化和超新星爆发研究可能会有重要的影响。

**关键词:** 天体物理学;  $\beta$  衰变率; 电荷屏蔽; 核合成; 恒星演化

**中图分类号:** P142; P144      **文献标识码:** A

### 1 引 言

大质量的恒星晚期演化与其内部的弱相互作用密切相关, 因为弱相互作用决定了超新星核心区的熵和电子的丰度: 电子俘获的结果使电子数减少, 而  $\beta$  衰变正好是相反的影响; 同时两者都会产生中微子, 中微子在密度  $\rho \leq 10^{11} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  时逃离恒星, 从而带走核心区的熵和能量。弱相互作用率的大小会直接影响到恒星晚期演化和核心区坍缩过程中的中子化及中微子损失率, 研究它对于进一步探讨恒星晚期演化及冷却具有重要的意义。20 世纪 80 年代初, Fuller 等人<sup>[1~3]</sup>(FFN) 采用简单壳层模型讨论了共振跃迁的共振能量和共振跃迁的强度, 给出恒星内部  $21 \leq A \leq 60$  的 226 种原子核在不同温度和密度点上的电子俘获率; 90 年代, Aufderheide 等人<sup>[4]</sup>(AFWH) 扩展了 FFN 的工作, 采用了与 FFN 壳层模型相似的技巧, 而在跃迁几率的计算中, 对子核可能的跃迁终态划分为基态附近的低能区与远离基态较高能量的共振区, 分别做了近似处理, 讨论了  $A > 60$  的核 GT(Gamow-Teller) 跃迁, 给出了 150 个具有较强跃迁的最丰核素在一些较重要的温度和密度点上的  $\beta$  衰变率; Kar 等人<sup>[5]</sup> 用  $\beta$  平均强度函数讨论了前身星阶段  $A > 60$  核素的  $\beta$  衰变率; 罗志全和彭秋和<sup>[6]</sup> 讨论了在恒星高密环境下电荷屏蔽对电子俘获率的影响, 结果表明这一影响是较显著的, 并指

收稿日期: 2005-11-14; 修回日期: 2006-5-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10347008)

出超新星的前身星的结构及后来核心区的坍缩等演化模式的理论研究应考虑电荷屏蔽的影响。近年来,  $\beta$  衰变的研究更加广泛和深入, Heger 和 Woosley<sup>[9]</sup> 详细地列出了不同质量的恒星晚期演化过程中大部分重要核素的电子俘获和  $\beta$  衰变率表, Itoh 和 Tomizawa<sup>[10]</sup> 研究恒星高密度环境下简并电子屏蔽对电子俘获、 $\beta$  衰变率的修正以及束缚态的  $\beta$  衰变, 中国原子能科学研究所的白希祥<sup>[11]</sup> 的研究也取得了一些新进展。本文讨论了电荷屏蔽对整个弱相互作用的影响, 充分考虑了电荷屏蔽效应, 分析其对恒星内部  $\beta$  衰变率的影响, 作为例子, 详细计算电荷屏蔽对反应  $^{56}\text{Cr} \rightarrow \text{Mn}(e^{-1}, \nu_e)$  的衰变率的影响。本文中能量以  $m_e c^2$  为单位, 动量以  $m_e c$  为单位, 温度  $T$  以  $10^9$  K 为单位。

## 2 恒星内部无电荷屏蔽时的 $\beta$ 衰变率

我们对恒星内部总的  $\beta$  衰变率的计算, 分为包含母核基态附近的低能区衰变率  $\lambda_0$  和包含共振跃迁支配的高能区衰变率  $\lambda_{\text{BGT}}$ , 文中  $i, j$  分别表示粒子的初态和终态, 根据文献 [4] 中的讨论,  $\beta$  衰变率可表示为

$$\begin{aligned} \lambda_k(\rho, T, Y_e) &\approx \ln 2 \frac{2J_0 + 1}{G(Z, A, T)} \exp[-E_{\text{peak}}/K_B T] \times \frac{1}{f t_{\text{eff}}} \xi(\rho, T, Y_e, E_{\text{peak}} + Q_{00}) + \\ &\ln 2 \exp\left[-\frac{E_{\text{BGT},0}}{K_B T}\right] \frac{G(Z+1, A, T)}{G(Z, X, T)} \times \frac{\xi(\rho, T, Y_e, Q_{00} + E_{\text{BGT},0})}{f t_{0 \rightarrow \text{BGT},0}} = \\ &\lambda_0 + \lambda_{\text{BGT}}. \end{aligned} \quad (1)$$

上式中  $J_0$  为母核的初态角动量,  $G(Z, A, T)$  是核配分函数:

$$G(Z, A, T) \approx (2J_0 + 1) + \int_0^\infty dE \int_{j\pi} dJ d\pi (2J + 1) \times \rho(E, J, \pi) \exp[-E/K_B T], \quad (2)$$

$\rho(E, J, \pi)$  为标准密度:

$$\rho(E, J, \pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{\sqrt{\pi}}{12a^{1/4}} \times \frac{\exp[2\sqrt{a(E-\sigma)}]}{(E-\sigma)^{5/4}} f(E, J, \pi), \quad (3)$$

其中:

$$f(E, J, \pi) = \frac{1}{2} \frac{(2J+1)}{2\sigma^2} \exp\left[-\frac{J(J+1)}{2\sigma^2}\right], \quad (4)$$

$\sigma$  是标准密度参数,  $\sigma = (2m_u A R^2 / 5h^2)^{1/2} [E - \sigma/a]^{1/4}$  ( $R$  是半径,  $m_u = 1/N_A$  是原子物质单位)。当温度在  $0.3 \sim 0.8$  MeV, 电子的化学势能在  $0.5 \sim 8$  MeV 范围内时,  $E_{\text{peak}}$  被估算为<sup>[4]</sup>

$$E_{\text{peak}} \approx E_{\text{peak}}^0 + \delta(T, \mu_e), \quad E_{\text{peak}}^0 = 5T - Q_{00} + \mu_e, \quad (5)$$

$\mu_e$  为电子的平均分子量,  $\delta$  函数表示能量守恒, 可表示为

$$\begin{aligned} \delta(T, \mu_e) = &-0.6604 + 0.9429T - 0.02119\mu_e - \\ &0.9432T\mu_e - 0.0009542\mu_e^2 + 0.06224T\mu_e^2, \end{aligned} \quad (6)$$

$ft_{\text{eff}}$  是对应跃迁终态为基态附近的低能区的  $ft$  有效值, FFN 给出其数值为  $ft_{\text{eff}} = 6.06 \times 10^4$ ;  $ft_{0 \rightarrow \text{BGT},0}$  是对应跃迁终态为远离基态的共振区的有效值, 其数值完全由共振跃迁决定:

$$ft_{0 \rightarrow \text{BGT},0} = \frac{10^{3.596}}{|M_{\text{BGT},0}|^2}, \quad (7)$$

$\xi(\rho, T, Y_e, Q_{ij})$  是  $\beta$  衰变的相空间积分, 表示为 [5]

$$\xi(\rho, T, Y_e, Q_{ij}) = \frac{c^3}{m_e c^2} \int_1^{Q_{00}} dP \cdot \rho^2 (Q_{00} - E_e)^2 \times \frac{F(Z+1, E_e)}{1 + \exp[(E_e - u_e)/K_B T]}, \quad (8)$$

这里  $dP$  是单位能量间状态数,  $m_e$  为电子静止质量. 令  $G(Z+1, E_e) = F(Z+1, E_e)P/E_e$ , (8) 式可进一步表示为

$$\xi(\rho, T, Y_e, Q_{ij}) = \frac{c^3}{m_e c^2} \int_1^{Q_{00}} dE_e E_e^2 (Q_{00} - E_e)^2 \times \frac{G(Z+1, E_e)}{1 + \exp[(E_e - u_e)/K_B T]}, \quad (9)$$

式中  $K_B T$  为电子的热运动能量, 在本文单位制下为  $0.1688 T_9 (T_9 \text{ 温度是以 } 10^9 \text{ K 为单位}) \cdot u_e$  为电子的化学势, 其值满足下式 [7]:

$$\rho/\mu_e = 1/(\pi^2 N_A \lambda_e^3) \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1 + \exp[(E_e - u_e)/K_B T]} - \frac{1}{1 + \exp[(E_e + u_e + 2)/k_B T]} \right\} P^2 dP. \quad (10)$$

### 3 强电荷屏蔽下的 $\beta$ 衰变率

当电子的费米能远大于电子的平均库仑能时, 电子的分布几乎是均匀的. 这时电子对核的屏蔽为强屏蔽, 通常取其条件:  $\eta_e > 10^{23} Z^3$ ,  $\eta_e$  为电子气体的数密度. 天体物理中大多数兼并电子气体满足条件:  $\rho/\mu_e > 5 \times 10^3 \text{ mol/cm}^3$ . 在强屏蔽下, 一个 Wengert-seiz 离子球总的屏蔽势为 [7]:  $1.764 \times 10^{-5} Z^{5/3} (\rho/\mu_e)^{1/3} \text{ MeV}$ . 故对某一核而言, 平均每个电子的屏蔽势为

$$D = 1.764 \times 10^{-5} Z^{2/3} (\rho/\mu_e)^{1/3} \text{ MeV}. \quad (11)$$

当忽略屏蔽对电子波函数的影响, 仅考虑电荷屏蔽对电子能量的影响, 在强屏蔽下相空间因子应修正为

$$\xi'(\rho, T, Y_e, Q_{ij}) = \frac{c^3}{m_e c^2} \int_{+D}^{Q'_{00}} dE'_e E'^2_e (Q'_{00} - E'_e)^2 \times \frac{G(Z+1, E'_e)}{1 + \exp[(E'_e - u_e)/K_B T]}, \quad (12)$$

所以强屏蔽下的  $\beta$  衰变率应为

$$\begin{aligned} \lambda'_k(\rho, T, Y_e) &\approx \ln 2 \frac{2J_0 + 1}{G(Z, A, T)} \exp[-E'_{\text{peak}}/K_B T] \times \frac{1}{ft_{\text{eff}}} \xi'(\rho, T, Y_e, E_{\text{peak}} + Q_{00}) + \\ &\ln 2 \exp\left[-\frac{E_{\text{BGT},0}}{K_B T}\right] \frac{G(Z+1, A, T)}{G(Z, X, T)} \times \frac{\xi'(\rho, T, Y_e, Q_{00} + E_{\text{BGT},0})}{ft_{0 \rightarrow \text{BGT},0}} = \\ &\lambda'_0 + \lambda'_{\text{BGT}}, \end{aligned} \quad (13)$$

这里  $E'_e = E_e + D$ ,  $Q'_{00} = Q_{00} + d$ ,  $D$  为电子的屏蔽势能。为了便于讨论电荷屏蔽对  $\beta$  衰变率的影响, 定义屏蔽因子:  $C_1 = \lambda'_0/\lambda_0$ ,  $C_2 = \lambda'_{\text{BGT}}/\lambda_{\text{BGT}}$ ,  $C = \lambda'_k/\lambda_k$ , 可以看出,  $C_1$  反映电荷屏蔽对低能跃迁  $\beta$  衰变率的影响,  $C_2$  反映电荷屏蔽对共振跃迁  $\beta$  衰变率的影响, 而  $C$  的大小反映了电荷屏蔽对总  $\beta$  衰变率的影响程度。

#### 4 $E_{\text{BGT},0}$ 和 $M_{\text{BGT},0}$ 的计算

为了计算 (1) 式, 应求出  $E_{\text{BGT},0}$  和  $M_{\text{BGT},0}$ ,  $E_{\text{BGT},0}$  为共振态的位置,  $M_{\text{BGT},0}$  为共振点的 GT 跃迁矩阵元, 采用壳层模型,  $E_{\text{BGT},0}$  为<sup>[4]</sup>

$$E_{\text{BGT},0} = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3, \quad (14)$$

其中  $\Delta E_1$  为核的共振态和基态之间的单粒子轨道能量差,  $\Delta E_2$  为子核中的粒子-空穴排斥能,  $\Delta E_3$  为当子核是偶中子与偶质子时的对能,  $\Delta E_2$  通常取 2MeV,  $\Delta E_3 = 12A^{-1/2}$ ,  $A$  为核子数。而 GT 跃迁矩阵元满足<sup>[8]</sup>:

$$\left| M_{\text{BGT},0} \right|^2 = \frac{1}{2} \times \frac{n_i^p n_f^h}{2j_f + 1} \left| M_{\text{GT}}^{\text{sp}} \right|_{\text{if}}^2. \quad (15)$$

这里  $n_i^p$  和  $n_f^h$  分别是母核初始轨道上的质子数和子核终态轨道上的空穴数,  $j_f$  为终态轨道总角动量。  $|M_{\text{GT}}^{\text{sp}}|_{\text{if}}^2$  为单粒子 GT 跃迁矩阵元的平方, 表 1 中给出了它的数值<sup>[2]</sup>。

表 1 单粒子 GT 跃迁矩阵元值

$j_i$	$j_f$	
	$l + 1/2$	$l - 1/2$
$l + 1/2$	$\frac{l + 3/2}{l + 1/2}$	$\frac{2l}{l + 1/2}$
$l - 1/2$	$\frac{2l + 2}{l + 1/2}$	$\frac{l - 1/2}{l + 1/2}$

#### 5 电荷屏蔽对 $^{56}\text{Cr} \rightarrow ^{56}\text{Mn}(e^{-1}, \nu_e)$ 的影响及其结论

对于  $\beta$  衰变, 实质上是一个中子由 GT 跃迁转化为一个质子的过程, 对母核  $^{56}\text{Cr}$  而言, 最外层的 4 个中子都位于  $2p_{3/2}$  轨道上, 因此满足选择定则允许的跃迁只能是跃迁到  $2p_{3/2}$  的质子态, 而子核  $^{56}\text{Mn}$  的基态最外质子壳层是  $1f_{7/2}$ , 故:

$$E_{\text{BGT},0} = (\varepsilon_{2p_{3/2}} - \varepsilon_{1f_{7/2}}) \Big|_n + 2.0 + 12A^{-1/2} = \left[ \frac{112.6 - 94.7}{56^{1/3}} + 2.0 + \frac{12}{\sqrt{56}} \right] \text{MeV} =$$

$$16.186424 \text{ MeV}.$$

由 (15) 式 GT 跃迁矩阵元为

$$\left| M_{\text{BGT},0} \right|^2 = \frac{1}{2} \times \frac{n_i^p n_f^h}{2j_f + 1} \left| M_{\text{GT}}^{\text{sp}} \right|_{\text{if}}^2 = \frac{1}{2} \times \frac{4 \times 6}{4} \times \frac{5}{3} = 5.$$

对反应  $^{56}\text{Cr} \rightarrow ^{56}\text{Mn}(e^-, \nu_e)$  而言, 其放出  $\beta$  粒子的最大能量值  $Q_{00} = 4.2096619$ 。

图 1 给出了屏蔽因子  $C_1$ 、 $C_2$  和  $C$  在温度  $5 \times 10^9 \text{K}$  下随密度  $\rho/\mu_e$  ( $10^4 \sim 10^9 \text{mol/cm}^3$ ) 的变化情况, 其中虚线、短划线和实线分别表示  $C_1$ 、 $C_2$  和  $C$  在同一温度下的结果。从图中可以看出: 低密度下, 屏蔽因子趋近于 1, 即屏蔽对衰变率的影响很小, 但随着密度的增加, 屏蔽势越来越大, 其影响使衰变率逐渐升高, 就反映  $^{56}\text{Cr} \rightarrow ^{56}\text{Mn}(e^-, \nu_e)$  而言, 在某些温度-密度点上, 由于屏蔽会使  $\beta$  衰变率升高达到 30%; 但是高密度时不同温度下的屏蔽因子又趋于一致, 且对密度的依赖关系减小, 这是由于在高密度下电子的能量主要由其费米能决定而与温度的关系不大的缘故。还有, 在低密度下总的屏蔽因子  $C$  与  $C_1$  基本一致, 而在高密度下又趋近于  $C_2$ , 这是由低能跃迁和共振跃迁的比例决定的, 在低密度下电子的费米能较低, 因而低能跃迁占主导地位, 所以总的屏蔽因子主要由  $C_1$  决定; 但随着密度的增加, 电子的费米能增大, 共振跃迁所占比例逐渐增大, 甚至占绝对的主导地位, 故高密度下总的屏蔽因子  $C$  又逐渐趋近于  $C_2$  的值。

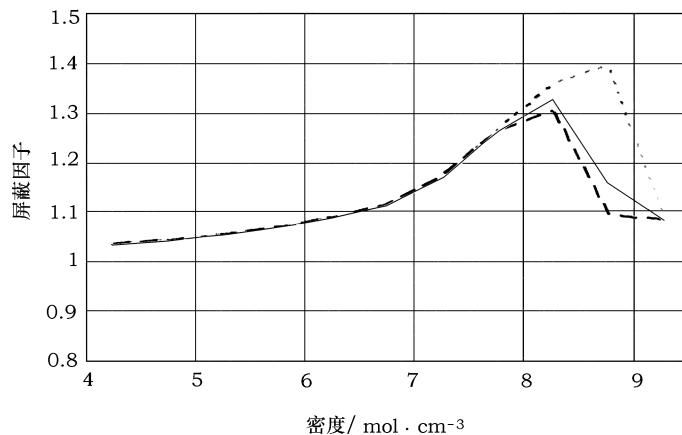


图 1 屏蔽因子  $C_1$ 、 $C_2$  和  $C$  在温度  $5 \times 10^9 \text{K}$  下随密度  $\rho/\mu_e$  ( $10^4 \sim 10^9 \text{mol/cm}^3$ ) (取对数) 的变化

图 2 中短划线和实线分别表示  $C$  在温度  $5 \times 10^9$  和  $10 \times 10^9 \text{K}$  下随密度  $\rho/\mu_e$  ( $10^4 \sim 10^9 \text{mol/cm}^3$ ) (取对数) 的变化情况。可以看出: 在温度不高时屏蔽势的作用比较明显, 但在温度很高的情况下屏蔽势的作用反而减小。这是不难理解的, 由于温度越高, 电子的平均能量越大, 屏蔽势就相对降低; 且在密度很低和很高的情况下, 屏蔽因子都是趋近于 1 的, 这和图 1 中的情况是一致的。

通过上面的分析可以看出, 电荷屏蔽对  $\beta$  衰变率的影响还是明显的, 特别是在较低的温度和一定的密度点上。当然, 其影响程度还与具体的核有关系, 原则上, 同样的方法可以求得

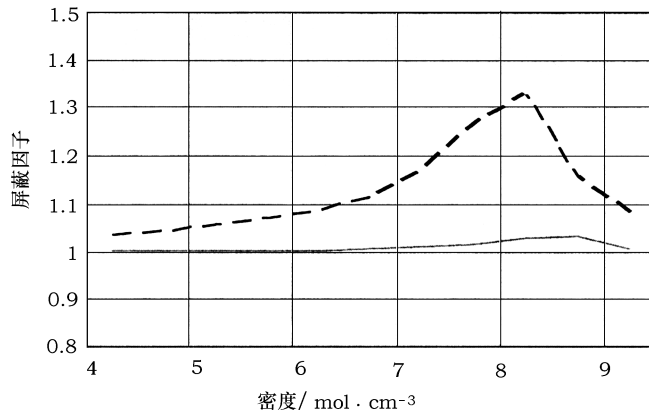


图 2  $C$  在温度是  $5 \times 10^9$  K 和  $10 \times 10^9$  K 时随密度  $\rho/\mu_e(10^4 \sim 10^9 \text{ mol/cm}^3)$ (取对数) 的变化

每个反应的屏蔽因子, 并估计出其影响程度。所以, 在较为精确讨论  $\beta$  衰变对恒星演化的影响时, 考虑电荷屏蔽的影响看来是必需的。

### 参考文献:

- [1] Fuller G M, Fowler W A, Newman M J. ApJ, 1982, 252: 715
- [2] Fuller G M, Fowler W A, Newman M J. ApJS, 1980, 42: 447
- [3] Fuller G M, Fowler W A, Newman M J. ApJS, 1982, 48: 279
- [4] Aufderheide M B, Fushiki I, Woosley S E *et al.* ApJS, 1994, 91: 389
- [5] Kar K, Ray A, Sarkar S. ApJ, 1994, 434: 662
- [6] 罗志全, 彭秋和. 中国科学 (A 辑), 1996, 26(7): 665
- [7] Woosley S E. Supernova. Amsterdam: Elsevier Science Publisher B V, 1990
- [8] Aufderheide M B, Brown G E, Kuot T S *et al.* ApJ, 1990, 362: 241
- [9] Heger A, Woosley S E. ApJ, 2001, 560: 307
- [10] Itoh N, Tomizawa N. ApJ, 2002, 579: 380
- [11] 白希祥. 原子核物理评论, 2003, 20(1): 11

## The Influence of Electron Screening on $\beta$ -Decay Rate in Stellar Interior

SUN Qing-qiang<sup>1</sup>, HUANG Zeng-guang<sup>1</sup>, PIAO Hong-guang<sup>1</sup>, LUO Zhi-quan<sup>2</sup>

(1. Department of Maths and Physics, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang 222005, China; 2. Institute of Physics and Electronic Information, China West Normal University, Nanchong 637002, China)

**Abstract:** Aiming at the low-energy reaction and Gamow-Teller resonant transition, the influence of electron screening on the  $\beta$ -decay rate in stellar interior is investigated in this paper. As an example, the effect of the screening on  $\beta$ -decay by  $^{56}\text{Cr}$  is calculated. It is shown that the screening increases the  $\beta$ -decay rate evidently in lower temperatures and higher densities. The screening effect may importantly influences the study of stellar late stage evolution and supernova burst.

**Key words:** astrophysics;  $\beta$ -decay rate; electron screening; nucleosynthesis; stellar evolution

\* \* \* \* \*

### 《天文学进展》 2007 年征订启事

《天文学进展》2007 年征订事宜委托天津市全国非邮发报刊联订服务部全权办理。刊物为季刊，每年的 3、6、9、12 月下旬出版，每期定价 25 元，全年 100 元(含邮寄费和包装费)。凡需订阅者请将订刊款通过邮局或银行直接按以下地址汇出即可：

**邮政编码:** 300385

**地 址:** 天津市大寺泉集北里别墅 17 号

**户头全称:** 天津市河西区联合征订服务部

**帐 号:** 605248-1046196

**开户银行:** 工商银行天津市尖山分理处

**电 话:** (022) 23973378; (022) 23962479

**传 真:** (022) 23973378

**网 址:** www.lhzd.com

**E - mail:** lhzd@public.tpt.tj.cn

汇款时请在汇款单上注明“订阅 2007 年《天文学进展》(编号 5155)”字样及订阅份数、订户名称、收件人姓名、地址、邮政编码。联合征订部收到订刊款后即会奉上发票。本编辑部在刊物出版时即及时奉寄，并为订户负责。

凡通过其他渠道订阅本刊者，如有延误或寄失，本编辑部概不负责，敬请谅解。

欢迎订阅，谢谢支持！

《天文学进展》编辑部

2006 年 12 月