

光束质量标准中传输方程的研究

邱服民

(中国工程物理研究院西南流体物理研究所, 成都 523 信箱 59 分箱, 610003)

摘 要 讨论了传输方程在 ISO 光束质量标准中的重要性, 给出了光束传输方程的一种证明方法, 在近轴条件下, 非高斯光束都满足传输方程, 这为选用理想高斯光束作为光束质量的度量基准奠定了基础。

关键词 光束质量 传输方程

ABSTRACT In the paper, the importance of the beam propagation equation in ISO standard draft is discussed, and a verifying method is given. The beam propagation equation is applied to not only Gaussian beam but also the other non-Gaussian beam on the paraxial condition, and it lays the foundation for Gaussian beam to become the measured standard of beam quality.

KEY WORDS beam quality, propagation equation

0 引 言

随着激光在诸如激光加工等方面的广泛应用, 激光束的发散性已引起了激光器设计人员, 应用人员及性能检测人员的重视, 人们用不同的参数来描述它, 如模式、发散角、衍射极限倍数、桶中的能量百分比, 也形成了多种测量方法, 但没有统一标准和方法。这种状况影响激光器的进一步推广应用, 也影响激光器性能提高, 为了改变这种状态, 国际标准化组织 (ISO) 于 1991 年公布了光束质量标准草案^[1]。该草案通过光强和角谱的一阶矩确定光束中心和传输方向; 通过二阶矩确定光束束宽及发散角度, 从而导出了形式上类似于理想高斯光束的传输方程, 这样为选用理想高斯光束作为光束质量的度量基准奠定了基础, 用泰勒展式给出了传输方程的一种证明方法。

1 光束传输方程的导出

如图 1 所示, 一束任意的非衍射极限单色光束由 $z = z_1$ 平面向束腰面 $z = z_0$ 传播, 在任意一个截面上光波场的分布为 $\hat{E}(x, z)$, 其角谱为 $\hat{P}(s, z)$, 且

$$\hat{P}(s, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}(x, z) \exp(j2\pi sx) dx \quad (1)$$

$$\hat{E}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{P}(s, z) \exp(j2\pi sx) ds \quad (2)$$

1995 年 8 月 31 日收到原稿, 1996 年 10 月 20 日收到修改稿。

$$\frac{\partial \hat{P}(s, z)}{\partial s} = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi j x) \hat{E}(x, z) \exp(+j2\pi s x) dx \quad (3)$$

$$\frac{\partial \hat{P}^*(s, z)}{\partial s} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi j x) \hat{E}^*(x, z) \exp(-j2\pi s x) dx \quad (4)$$

空间域的一阶矩表示为

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\hat{E}(x, z)|^2 dx \quad (5)$$

空间域的二阶矩表示为

$$\sigma^2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 |\hat{E}(x, z)|^2 dx \quad (6)$$

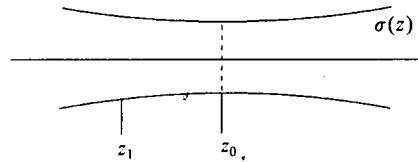


Fig.1 Optical beam propagating in direction z

图 1 光束从 $z = z_1$ 平面向束腰面 $z = z_0$ 传播

频率域中的一阶矩为

$$\bar{s} = \int_{-\infty}^{+\infty} s |\hat{P}(s, z)|^2 ds \quad (7)$$

频率域中的二阶矩为

$$\sigma_s^2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (s - \bar{s})^2 I(s, z) ds \quad (8)$$

式中, $I(s, z) = |\hat{P}(s, z)|^2$ 。为简化计算, 把坐标原点在空间域和频率域中都定在一阶矩等于 0 的地方, 即所谓“重心”上。把(6)式展成在 $z = z_1$ 处的幂级数, 首先将(6)式写成

$$\sigma^2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \hat{E}(x, z) x \hat{E}^*(x, z) dx \quad (9)$$

(9)式结合(3)、(4)式, 利用富氏变换中巴什划定理的推广形式^[2], 可得

$$\sigma^2(z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{P}(s, z)}{\partial s} \frac{\partial \hat{P}^*(s, z)}{\partial s} ds \quad (10)$$

而在近轴条件下, 光波的角谱满足下面关系, 即角谱的振幅不随 z 变化, 只是位相因子与 z 有关^[3], 即

$$\hat{P}(s, z) = \hat{P}(s, z_0) \exp[+j\pi \lambda s^2 (z - z_0)] \quad (11)$$

$$\frac{\partial \sigma^2(z)}{\partial z} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \left[\frac{\partial \hat{P}(s, z)}{\partial s} \frac{\partial \hat{P}^*(s, z)}{\partial s} \right]}{\partial z} ds \quad (12)$$

$$\frac{\partial \sigma^2(z)}{\partial z} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 \hat{P}(s, z)}{\partial s \cdot \partial z} \frac{\partial \hat{P}^*(s, z)}{\partial s} + \frac{\partial \hat{P}(s, z)}{\partial s} \frac{\partial^2 \hat{P}^*(s, z)}{\partial z \cdot \partial s} \right] ds \quad (13)$$

将(11)式代入(13)式进行比较复杂的偏导数运算, 得

$$\frac{\partial \sigma^2(z)}{\partial z} = \frac{j\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s \left[\hat{P}(s, z) \frac{\partial \hat{P}^*(s, z)}{\partial s} - \hat{P}^*(s, z) \frac{\partial \hat{P}(s, z)}{\partial s} \right] ds \quad (14)$$

其二阶和三阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 \sigma^2(z)}{\partial z^2} = 2\lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 |\hat{P}(s, z)|^2 ds = 2\lambda^2 \sigma_s^2 \quad (15)$$

$$\frac{\partial^3 \sigma^2(z)}{\partial z^3} = 0 \quad (16)$$

高于三阶的偏导数都为 0, 那么如用 A_1 代替 (14) 式, (6) 式的泰勒展式为

$$\sigma^2(z) = \sigma^2(z_1) + A_1(z - z_1) + \lambda^2 \sigma_s^2 (z - z_1)^2 \quad (17)$$

由 (17) 式可知, 若 $\sigma^2(z)$ 在 $z = z_0$ 处有最小值, 那么

$$\sigma^2(z_0) = \sigma^2(z_1) - A_1/4\lambda^2\sigma_s^2 \quad (18)$$

$$z_0 = z_1 + A_1/2\lambda^2\sigma_s^2 \quad (19)$$

这样 (17) 式可以写成

$$\sigma^2(z) = \sigma^2(z_0) + \lambda^2 \sigma_s^2 (z - z_0)^2 \quad (20)$$

这个结果同文献[4]的结果一样。

2 传输方程在 ISO 光束质量标准中的重要地位

众所周知, 理想高斯光束光斑大小 $W(z)$ (以 $1/e^2$ 定义的) 满足传输方程

$$W^2(z) = W^2(z_0) + \frac{\lambda^2}{\pi^2 W^2(z_0)} (z - z_0)^2 \quad (21)$$

其中 $W(z_0)$ 是束腰处光斑的大小。

(21) 式与 (20) 在形式上是非常相似的, ISO 光束质量标准就是从传输方程出发, 利用二阶矩来统一光束束宽和发散角的定义, 用 M^2 因子的方法来统一光束质量标准,

$$M^2 = \frac{\text{实际光束束腰直径} \times \text{远场发散角}}{\text{理想高斯光束束腰直径} \times \text{远场发散角}} = \frac{\pi}{4\lambda} d_0 \theta_f \quad (22)$$

式中, d_0 是实际光束束腰直径, θ_f 是远场发散角。

由于理想高斯光束束腰直径与远场发散角之积比其它实际光束的相应量小, 所以将 $M_2 = 1$ 的理想高斯光束作为光束质量的度量基准。

在近轴条件下, 由于关于二阶矩的传输方程 (20) 式对理想高斯光束和其它实际光束都成立, 用二阶矩表示的光束束径使光束近场参数和远场参数的定义得到了统一, 用这种方法来定义束径, 有传输方程保证, 从而可以根据光束质量参数预示光束的传输特性。其它方例如老的衍射极限倍数 β , 有一个问题就是光束束径的定义不统一, 近场以 100% 能量含量定义束径, 而远场 (即衍射光斑处) 以第一暗环直径 (83.7% 能量含量) 定义束径。无统一的光束束径的定义, 就无法用光束传输方程来描述光束传输过程中的变化。总之, 有了传输方程的保证, 理想高斯光束作为光束质量的度量基准才有了基础, M^2 因子的定义才有实用意义, 这在理论上很有价值。当然用二阶矩表示束宽也有些问题, 例如对高空间频率的干扰太敏感, 对平面波的评价比较困难等, 因此也值得深入研究。

致谢 本文得到了杨成龙研究员的热情指导。

参考文献

- 1 ISO/SC 172/SX 9/WGI N14 Test method for width, divergence and radiation characteristic factor of laser beam
- 2 香帕尼 D C [英]. 傅立叶变换及其物理应用. 北京:科学出版社, 1980
- 3 朱自强, 王仕番, 苏显渝. 现代光学. 成都:四川大学出版社, 1989
- 4 Siegman A E. New development in laser resonators, *SPIE*, 1990, 1224: 2
- 5 ISO/TC 172/SC 9/WGI N56 Optics and optical instruments: Test method for laser beam parameter: beam widths, divergence angle, and beam propagation factor

STUDY ON THE BEAM PROPAGATION EQUATION IN ISO STANDARD DRAFT OF BEAM QUALITY

Qiu Fumin

Institute of Fluid Physics, CAEP, P.O.Box 523, Chengdu 610003

In this paper, the importance of the beam propagation equation in ISO standard draft of beam quality is discussed. A verifying method is given.

The complex amplitude distribution $\hat{E}(x, z)$ can be expressed as the Fourier transform in the transverse x coordinate of a spatial-frequency distribution $\hat{P}(s, x)$ in equation (2) when a monochromatic laser beams propagates primarily in the z direction in free space, and $\hat{P}(s, x)$ is given in equation (1) by the inverse transform. The first moments and the second moments of an arbitrary laser beam intensity in the transverse spatial coordinates are defined by equations (5) and (6), the first moments and the second moments in the spatial-frequency or angular domains can be similarly defined by equation (7) and (8). From more complicated manipulations of the transform relations (equations (3), (4), (9) ~ (19)) and Tailay formula it is possible to show that the variance $\sigma_2(z)$ of any arbitrary monochromatic beam will propagate in free space according to the equation (20). It is well known that the Gaussian beam spot size $W(z)$ also can be shown in equation (21).

The equation (20) has the same form as the equation (21), it lays the foundation for the ideal TEM₀₀ Gaussian beam to become the measured standard of beam quality instead of the uniform plane wave.