文章编号: 1000-8349(2005)04-0318-13

判定轨道混沌的几个指标

伍 歆[1,2]，黄天衣[1]
(1. 南京大学 天文系，南京 210093； 2. 南昌大学 物理系，南昌 330047)

摘要: 评述判定天体轨道混沌性质的几个指标，包括 Poincaré 截面方法、 Lyapunov 指数、局部 Lyapunov 指数及其谱分布、快速 Lyapunov 指标、较小排列指标、 0-1 指标和频谱分析法等，讨论它们的优缺点和适用范围；强调相对论系统中建立坐标不变指标的重要性，例如，利用投影算符实现 “1 + 3” 时空分解而建立的独立于坐标规范的 Lyapunov 指数来处理弯曲时空是方便的。

关 键 词: 天体力学；混沌；综述；轨道； Lyapunov 指数；广义相对论
中图分类号: P139 **文献标识码:** A

1 引 言

微分动力系统分为可积系统和不可积系统两类。可积系统存在全局分析解，系统是有序的；不可积系统普遍存在混沌，其重要特征就是对初始条件具有指数敏感依赖性。

混沌思想萌芽于 Poincaré 时代，但直至现代数学理论和先进计算工具的使用才使人们对混沌系统产生深刻认识。它的理论建立始于 20 世纪 50~70 年代 Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) 环定理的提出，而数值探索历经 Lorentz [1] 模拟天气、 Hénon 和 Heiles [2] 研究第三积分的存在，以及 Sussman 和 Wisdom [3] 揭示冥王星的混沌运动等才显示出混沌动力学在天体力学中所取得的成果。另外， Kirkwood 空隙的成因采用引力假说似乎有其合理性 [4] 。与此同时，混沌的识别方法一直在充实和发展，其中有 Poincaré 截面方法、 Lyapunov 指数、局部 Lyapunov 指数及其谱分布 [5~9] 、快速 Lyapunov 指标 [10,11] 、频谱分析法 [12,13] 和 0-1 指标 [14,15] 等。

近 40 年来，尽管人们已对牛顿动力系统的混沌特征有相当清楚的了解，但对相对论引力系统的混沌特征却知之甚少。所有研究主要限于强引力天体轨道动力学和宇宙动力学演化两方面。前者是在已知度规里讨论粒子的动力学性质，该性质在牛顿和广义相对论两种引力理论中存在一定差别，甚至有根本性的不同。例如，双不动黑洞中心问题 [8,16~18] 和黑洞加偶极晕系统 [19,20] 在牛顿情形下均可积，但在相对论框架里具有较强的混沌行为。近几年，基于引力波探测计划如 LISA (Laser Interferometer Space Antenna) 、 LIGO (Laser Interferometer Gra-

收稿日期: 2005-04-28； **修回日期:** 2005-06-05
基金项目: 国家自然科学重点基金资助项目 (10233020)；国家自然科学基金资助项目 (10303001 、10447112)；江苏省博士后科研计划资助项目

vitational Wave Observatory) 以及 ASTROD (Astrodynamical Space Test of Relativity using Optical Devices) [24] 等在理论上的准备，致密双星轨道动力学 [21~23] 已成为研究热点。至于第二个方面是考察宇宙度规的动力学演化，其中均匀各向异性 Mixmaster 闭宇宙模型 [25] 尤受关注。

另一方面，鉴别相对论引力系统的混沌方法还相当不成熟，基本上是套用牛顿情形的传统方法，所以一般来说是有问题的。因为描述动力学特征的物理量在这些方法中采用坐标量而非固有量，它们在相对论框架内不再保持不变。例如，牛顿框架下建立的 Lyapunov 指数定义采用坐标时间和欧氏距离，而这两个量都是坐标量，与坐标系的选择有关。混沌作为物理现象，是系统本身所固有的，应当与坐标系选择无关。作为描述混沌的重要指标 Lyapunov 指数也应当以不变形式定义。 Wu 和 Huang [26] 建立的相对论框架下不变形式的 Lyapunov 指数定义能够方便地处理相对论引力体中的问题。 Imponente 和 Montani [27] 从 Jacobi 度规出发，采用协变方式理解 Mixmaster 宇宙演化行为。

2　混沌的识别方法

目前混沌一词还没有一个公认的普适定义。不同文献对混沌定义的描述可能存在差异，但都揭示了一些共同的基本特征：对初始条件的指数敏感性、确定性的随机性、不可预测性和非周期性。这里给出 Devany 对混沌的一个定义 [28] ：设 V 为一集合，动力系统 $f:\ V \to V$ 若满足条件 (1) f 有对初始条件指数式的敏感依赖性； (2) f 是拓扑传递的； (3) 周期点在 V 中稠密，则称 f 是混沌的。当然，这个定义本身也存在一些不足之处，即 (1) 和 (2) 可以导出 (3)，似乎条件 (3) 过剩了，但 (1) 和 (3) 一般导不出 (2)，类似地， (2) 和 (3) 也导不出 (1)。

在实际识别混沌系统时，条件 (1) 的验证可通过 Lyapunov 指数来实现，它是两邻近轨道分离程度的指标。它大于 0，表示紧致系统混沌；等于 0，表示紧致系统有序；小于 0，表示该运动轨道有吸引子存在。后两种情形统称有序。条件 (2) 的直观表现可利用 Poincaré 截面映射方法。下面介绍近几年来混沌的识别方法及其应用于相对论系统中的可行性。

2.1　Poincaré 截面

Hénon 和 Heiles [2] 用 Poincaré 截面研究第三积分的存在。这一方法的优点在于直观反映系统的动力学性质。若截面上只得到一个点，表明系统的运动是严格周期的；若得到一或多条封闭曲线，则表明系统是拟周期的；若点呈面随机分布，则表明系统是混沌的。

$2n$ 维动力系统映射到 Poincaré 截面上的维数为 $2n-1$，因此， Poincaré 截面最适宜研究具有两自由度的保守系统。例如 $H=\dfrac{1}{2}(\dot\rho^2+\dot z^2)-U(\rho,z)\equiv E$，可将其转化为两维离散映射来研究。假定轨道能反复穿过平面 $z=z_0$，记录每次按同一方向 (例如 $\dot z<0$) 跨过此平面时两侧各一点，且这两点只相差一积分步长，则这两点按演化顺序先后为 $P_1(\rho_1,\dot\rho_1,\ddot\rho_1,z_1)$ $(z_1>z_0)$、$P_2(\rho_2,\dot\rho_2,\ddot\rho_2,z_2)$ $(z_2<z_0)$。为得到 $z=z_0$ 时对应的 ρ 和 $\dot\rho$，采用 Hermite 插值，方法如下 [29] ：

$$l_1(z)=\frac{z-z_2}{z_1-z_2}\ ,\qquad l_2(z)=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ ;$$

$$l_1'(z)=\frac{1}{z_1-z_2}\ ,\qquad l_2'(z)=\frac{1}{z_2-z_1}\ ;$$

$$\begin{aligned}
A_1(z) &= [1-2(z-z_1)\ l_1'(z)]\ l_1^2(z)\ ,\\
A_2(z) &= [1-2(z-z_2)\ l_2'(z)]\ l_2^2(z)\ ;\\
B_1(z) &= (z-z_1)\ l_1^2(z)\ ,\\
B_2(z) &= (z-z_2)\ l_2^2(z)\ ;\\
\rho(z) &= \rho_1 A_1(z)+\rho_2 A_2(z)+\dot\rho_1 B_1(z)+\dot\rho_2 B_2(z)\ ,\\
\dot\rho(z) &= \dot\rho_1 A_1(z)+\dot\rho_2 A_2(z)+\ddot\rho_1 B_1(z)+\ddot\rho_2 B_2(z)\ .
\end{aligned}$$

于是，可以得到截面 $z=z_0$ 上的点 $P(\rho(z_0),\dot\rho(z_0))$ 。如果积分步长足够小，那么内插点就是比较好的近似。实践表明，采用 Hermite 插值比线性插值更有效，收敛性好且节约时间。

Poincaré 截面方法也适合研究静态相对论轴对称时空 (如见 Vieira 与 Letelier [20] 文章)，这是因为该时空正好对应 3 个运动积分，即能量、角动量和 4 速度条件，使得此四维时空系统实际维数是 3 。 Poincaré 截面上顺次相继两点时间间隔一般与该系统的“周期” (对于严格周期运动必有周期存在；对于拟周期运动有类似周期存在；对于混沌运动根本无周期可谈) 有关，而“周期”依赖于时间坐标的选择。当状态量随原时演化时，这个问题有望得到解决，但坐标的选择还可能影响计算时间。如把 Schwarzschild 坐标变换到 Kruskal 坐标，那么两者时间对应是指数关系。具体来说，若在 Schwarzschild 坐标内的周期为 100 (接近固有周期)，则在 Kruskal 坐标内的周期变为 e^{100} 。于是，在 Kruskal 坐标内 Poincaré 截面上只能得到非常有限的几个点，不便观察其动力学行为。此外，考虑到几何上的直观， Poincaré 截面方法的应用受到局限。对高于三维的动力系统， Lyapunov 指数是识别混沌强有力的工具之一。

2.2 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数是衡量两邻近轨道随时间平均分离比的指标，能够反映混沌的强度。它的计算方法主要有变分方程法 [30,31] 和两粒子法 [32,33] ，有时两种方法结合使用 [34] 。在牛顿框架下，对于一个以 $\boldsymbol{q}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 为广义坐标和动量的 $2n$ 维自治系统，记 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ ，描述动力系统的演化方程则写作 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{f}$ 为函数向量)，其变分方程为 $\delta\dot{\boldsymbol{x}}=(\partial\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})/\partial\boldsymbol{x})\cdot\delta\boldsymbol{x}$ 。随机选取初始条件和初始切向量，可获得最大 Lyapunov 指数：

$$\lambda_v=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{\|\boldsymbol{\xi}(t)\|}{\|\boldsymbol{\xi}(0)\|}\ ,\tag{1}$$

其中切向量 $\boldsymbol{\xi}=(\delta\boldsymbol{q},\delta\dot{\boldsymbol{q}})$ 是所讨论的轨道变分方程的解； $\|\boldsymbol{\xi}\|$ 为 $\boldsymbol{\xi}$ 的欧氏范数。在笛卡尔系内，可写为

$$\|\boldsymbol{\xi}\|=\sqrt{\delta\boldsymbol{q}\cdot\delta\boldsymbol{q}+\delta\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{q}}}\ ,\tag{2}$$

这里 “·” 取欧氏内积， $\delta\boldsymbol{q}$ 与 $\delta\dot{\boldsymbol{q}}$ 分别是广义坐标和广义速度的变分。为了获得 $\boldsymbol{\xi}$ ，必须同时积分运动方程和变分方程。构造变分方程及求其解一般不容易，考虑应用方便，文献广泛采用两粒子法。为了考察一条轨道的演化行为，随机选取与其邻近的一条轨道，可得到 t 时刻两条轨道在相空间内的距离：

$$d(t)=\sqrt{\Delta\boldsymbol{q}(t)\cdot\Delta\boldsymbol{q}(t)+\Delta\dot{\boldsymbol{q}}(t)\cdot\Delta\dot{\boldsymbol{q}}(t)}\ ,\tag{3}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{q}(t)$ 与 $\Delta\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ 分别表示两轨道位置和速度向量偏差。经典的最大 Lyapunov 指数表为

$$\lambda_N = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{d(t)}{d(0)}\ , \tag{4}$$

其中 $d(0)$ 为两轨道初始偏离。它太大，偏差向量 $(\Delta\boldsymbol{q},\Delta\dot{\boldsymbol{q}})$ 与切向量 $\boldsymbol{\xi}$ 差别也太大；它过小，计算机误差可能超过 $d(0)$ 使结果失真。故 Tancredi 与 Sánchez [33] 指出 $d(0)$ 相对大小的最佳选择为 10^{-8} 。对混沌轨道， (2) 或 (3) 式随时间指数增大，会出现计算机溢出现象，这时计算机终止工作，用重整化处理这一问题。每当 $d(t)$ 达到 $d(0)$ 的 k (k 不能太大) 倍时，邻近轨道上的点沿着向量 $\boldsymbol{\xi}$ 或 $(\Delta\boldsymbol{q},\Delta\dot{\boldsymbol{q}})$ 被拉回到与轨道相距为 $\|\boldsymbol{\xi}(0)\|$ 或 $d(0)$ 的位置。就两粒子法来说，重整化的另一个重要目的是保持两轨道在一短暂时间间隔内仍处于同一切空间里。

含 n 个自由度的动力系统具有 $2n$ 个 Lyapunov 指数。就一般的 m 维动力系统而言，所有 Lyapunov 指数也可计算出来。 (2) 式的 $\|\boldsymbol{\xi}\|$ 可以视为切空间内的一个一维子空间的体积， (1) 式称为一阶 Lyapunov 指数。 Oseledec [35] 推广到高阶 Lyapunov 指数，并将其描述成 m 维切空间内一个 p $(p=1,2,\cdots,m)$ 维体积指数增长的平均比。 Benettin 等人 [36] 给出了所有 Lyapunov 指数的计算方法。为避免切向量的演化彼此接近，选取正交初始切向量组，每经过一次积分，均实施 Gram-Schmidt 正交归一过程 (相当于重整化) 。从每个方向的 Lyapunov 指数可以了解此方向的动力学性质。

广义相对论仍然沿用上述 Lyapunov 指数算法，即变分法和两粒子法。前者须用到测地偏离方程 [37] ，也须推导复杂的曲率张量。 Nieto 等人 [38] 给出了不做测地运动的相对论陀螺的偏离方程，也可以类似地求解有自旋的试验粒子在 Schwarzschild 时空中的运动 [37] 的偏离方程，但这一过程相当繁杂。应当指出，这种由偏离向量 (其长度采用黎曼内积定义) 和原时来构造的 Lyapunov 指数必然与坐标系的选择无关。两粒子法因其应用上的便捷，在相对论中成为探测混沌的常用工具。可是将经典 Lyapunov 指数定义直接应用到相对论中，可能会与坐标规范有关。文献 [26,29] 已将牛顿的两粒子法的 Lyapunov 指数建立成相对论框架下的不变指标，使它真正成为在广义相对论中鉴定混沌的客观尺度。

考虑到经典 Lyapunov 指数所用到的 (2) 或 (3) 式在根号内前后两项单位不一致 (前者有长度量纲，而后者表现为速度量纲) ，文献 [26,29] 首先把经典 Lyapunov 指数定义由相空间更改为构形空间，也就是将 (2) 或 (3) 式中的速度项略去。容易验证两空间内的 Lyapunov 指数在刻划动力系统行为时完全等价。在此基础上，利用广义相对论的观测量理论 [39] 即可建立与坐标系无关的 Lyapunov 指数定义。

在四维时空 $\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta$ (希腊指标从 0 取遍 3 ，依次表示时间坐标 t 和空间三分量坐标 x 、 y 、 z ；拉丁指标从 1 到 3 只表示空间三分量坐标 x 、 y 、 z) 内运动但不一定做测地运动的粒子，称为“观测者”。“观测者”能够观测附近的粒子 (称为“邻居”) 与其固有距离是否随其固有时间指数增长，从而确定它的运动是否混沌。“邻居”的初始条件应当随机选择，但要求它与观测者的四维距离足够小，以使它近似地处于“观测者”所在的切空间里。在任意时空坐标系 x^α 内，可建立“观测者”和其“邻居”的运动方程。在坐标时间 t 时刻，“观测者”位于 O 点，其坐标和 4 速度分别为 x^α 、 U^α ，并对应原时 τ 。 U^α 指向“观测者”的时间轴方向 (亦即其原时增加方向) 。在相同坐标时间 t 时刻，另一轨道上的“邻居”达到点 P ，位置坐标为 y^α 。于是得坐标时间 t 时刻从点 O 到点 P 的位移矢量 $\boldsymbol{OP}$ 的分量为

$\delta x^\alpha = y^\alpha - x^\alpha$ 。定义“观测者”的空间投影算符 $h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + c^{-2}U^\alpha U^\beta$ (其中 c 为真空中的光速) [39] 。将 $\boldsymbol{OP}$ 通过投影算符 $h^{\alpha\beta}$ 映射到“观测者”在点 O 正交于其时间轴的三维局部空间里，得投影向量 $\boldsymbol{OP}'$ 的分量为 $\delta x^\alpha_\perp = h^\alpha_\beta \delta x^\beta$ ，其长度为

$$\|\boldsymbol{OP}'\| = \Delta L(\tau) = \sqrt{g_{\alpha\beta}\delta x^\alpha_\perp \delta x^\beta_\perp} = \sqrt{h_{\alpha\beta}\delta x^\alpha \delta x^\beta}\ , \tag{5}$$

其中 $g_{\alpha\beta}$ 在 x^α 处计算。 $\Delta L(\tau)$ 就是“观测者”在它的原时 τ 所测得的“邻居”与它的固有距离，这是一个标量。因此用来揭示“观测者”和“邻居”两轨道在构形空间内随“观测者”原时 τ 的分离程度的最大 Lyapunov 指数表示为 [26]

$$\lambda_R = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \ln \frac{\Delta L(\tau)}{\Delta L(0)}\ . \tag{6}$$

对于 λ_R 的数值计算，应把握以下 3 点： (1) 由于“观测者”和“邻居”有不同的原时，只能选坐标时间 t 作为两者共同的时间变量； (2) 众所周知，在计算 Lyapunov 指数时，每经过一定时间就实施重整化是十分必要的，它可以保证“观测者”和“邻居”的距离在整个计算过程中始终保持足够小。另外，尽管在构形空间里计算 Lyapunov 指数，但是重整化必须在相空间里进行； (3) 重整化应当沿 $\boldsymbol{OP}$ 方向而不能沿 $\boldsymbol{OP}'$ 方向进行。

λ_R 可研究任何坐标时空内粒子的测地运动，而且利用它来讨论不做测地运动如致密双星系统 [21~23] 也较方便。求解不变的最大 Lyapunov 指数方案也可推广到找所有的不变 Lyapunov 指数，但需要作相应改变。对于相对论模型，切向量演化的计算仍用上述方法，而基底 Gram-Schmidt 正交化过程中的内积和范数由欧氏的改为黎曼的；对于一给定的相对论系统，原则上选择任意坐标系，用该方案可得不变的 Lyapunov 指数。但不恰当的坐标系不便于计算并且影响计算精度，可能带来严重的计算机舍入误差；对于 Kruskal 坐标，与前面一样通过数值手段也不能取得相应的不变 Lyapunov 指数。此外，上面定义的 λ_R 不能处理宇宙度规的演化问题。

从理论上看， Lyapunov 指数是极限值，而数值计算是通过积分相当长时间取得的，为节省时间，有时采用有限时间 Lyapunov 指数 [5~9] 和快速 Lyapunov 指标 [10,11] 。

2.3 局部 Lyapunov 指数及其谱分布

计算 Lyapunov 指数的 (1) 或 (6) 式，在时间趋于无穷时的收敛性要求系统的运动保持在一个有界区域内。然而讨论实际天体系统混沌性时，该系统的相空间不一定是紧致的，也就是说，天体的运动不一定能保持在一个有界区域内。例如，对于一般三体问题，在总能量小于零的情况下，三体的演化结果通常形成一个双星系统和一个远离或逃逸的第三体。这时，系统的 Lyapunov 指数在时间趋于无穷时总是为零，造成用 Lyapunov 指数来讨论系统的混沌性似乎没有意义。但是，三体系统在达到最终状态前往往经过相互紧密交会，遭受强烈摄动的剧烈变化阶段，可以说系统在那时出现了暂时性的混沌。显然，需要建立一种指标来描述天体系统演化过程的定性状态。以下将在牛顿力学框架中讨论，相对论中的陈述完全类似。

从方程 (1) 或 (4) 来看，区间 $[t, t+\Delta t]$ 内可以定义局部 $\lambda_{\rm loc}(t) = (1/\Delta t)\cdot \ln[{\rm d}(t+\Delta t)/{\rm d}(t)]$ [5~9] 。显然它可以显示在这一时间段内的混沌状况。沿着给定轨道，以 Δt 为固定时间间隔，计算一系列局部 Lyapunov 指数 $\lambda_{\rm loc}(t_i)$ 时，它们随时间的变化图像能展示系统演化历程。容易看到它的充分大时间的平均值就是 $\lambda_n = (\sum_{i=1}^n \lambda_{\rm loc}(t_i))/n$ ，这正是实际编程计算最大 Lyapunov 指数所使用的公式。

Contopoulos 等人还引入 Lyapunov 指数的谱分布 [5~9]：设沿一给定轨道的 $\lambda(t_i)$ 是 t_i $(i=1,2,3\cdots,N)$ 时刻的局部 Lyapunov 指数，给定充分小 $\delta>0$，若 $\lambda(t_i)$ 落在 $(\lambda,\lambda+\delta)$ 内的个数为 ΔN，则 $\widetilde{P}(\lambda)=\Delta N/(\delta N)$ 就是 Lyapunov 指数的概率分布密度函数。这样该轨道的 Lyapunov 指数为正的概率 [9]，即 $F_+=\int_0^{+\infty}\widetilde{P}(a)\mathrm{d}a$，类似地可得负概率 F_-。于是，局部 Lyapunov 指数落在 $(\lambda,\lambda+\delta)$ 内的概率 $P(\lambda)=\widetilde{P}(\lambda)\cdot\delta=\Delta N/(N)$ 称为 Lyapunov 指数的谱。

2003 年 Vallejo 等人 [9] 用 Lyapunov 指数的谱分布详细研究了 Hènon 和 Heiles [2] 的简化星系模型。他们指出谱分布能快速识别轨道的性质及其稳定性，稳定和不稳定的周期轨道、拟周期轨道、轨道的粘滞性和混沌性等都使轨道的 Lyapunov 指数谱分布具有不同形态和特征，与此同时还能得到局部 Lyapunov 指数随时间的变化。值得一提的是，在传统的用数值方法计算 Lyapunov 指数时，必须要计算这些局部 Lyapunov 指数，因此谱分布的应用并没有增加多少工作量，而是给出了更多的信息。

Vallejo 等人 [9] 发现，谱分布的形态与 Δt 的大小和整个积分的时间范围有一定关系。他们试图找出最小适用的 Δt 值和数值积分时间范围，以尽可能地节约计算时间，但没有得到非常明确的结论。显然。对于周期性和拟周期性的轨道，可以用较小的 Δt 值和数值积分时间范围加以确定，否则会有一定困难。这一问题尚待进一步研究。保守系统的混沌轨道在其混沌区内常有各态历经的性质，随时间的分布等同于随空间位置的分布，因此也可以计算待研究轨道邻近一族轨道的局部 Lyapunov 指数，用其谱分布来决定混沌轨道的性质。

上述叙述表明，从一条轨道出发，把整个积分时间分成若干小时间区间来分别计算每区间内的 Lyapunov 指数，可获得一系列局部 Lyapunov 指数，从而给出局部 Lyapunov 指数谱分布。也可从某区域内许多初始条件出发，独自得到其相应的有限时间的 Lyapunov 指数，以获得有限时间的 Lyapunov 指数谱分布 [53]。所谓有限时间的 Lyapunov 指数就是方程 (1) 中的 t 不取极限所得的 Lyapunov 指数。这种有限时间的 Lyapunov 指数谱尽管比局部 Lyapunov 指数谱的计算耗费大，但它处理粘滞轨道相当有效。Szezech 等人 [53] 指出，粘滞轨道的最大有限时间的 Lyapunov 指数谱主要分布在两处：概率最大部分在某正值处，表明该区域总的来说是混沌的；其次在零处，表明拟周期轨道岛的存在。如果岛消失，那么有限时间的 Lyapunov 指数谱主要分布在某正值处。这种谱一般不受积分时间长短的影响，它不会出现如局部 Lyapunov 指数谱分布形态受 Δt 大小和整个积分时间影响的那种现象。

2.4　快速 Lyapunov 指标

在用数值方法计算 Lyapunov 指数时，理论上要求时间尽可能长，使该指数收敛于一个稳定的数值。每算一个指数都将耗费大量的计算时间，以至于几乎不能用 Lyapunov 指数来研究整个相空间的结构。Froeschlé 等人 [10] 提出，在给定计算时间段内不采用重整化，也不对时间平均，而快速计算某个指标 (如切向量的模或一组切向量之间的夹角) 的值。该指标的数值一般随时间变化，并且在这一限定时间内它虽然还没有收敛到终值，但对于混沌、拟周期、共振轨道和不动点，这一指标值将有很大不同，这样可以研究相空间的全局结构。他们还指出，由于哈密顿相流的保体积性质和部分切向量长度的快速增加，初始相互正交的一组切向量之间的夹角会急剧减小，这也可以用作混沌的判别指标。

按上述思想，Froeschlé 等人 [10] 设计了识别有序和混沌的 3 种指标。对一初始条件 $\boldsymbol{X}_n(0)=(x_1(0),x_2(0),x_3(0),\cdots,x_n(0))$，设初始时刻 n 维切空间一组线性独立的切向量基底为 $\boldsymbol{V}_n(0)=(\boldsymbol{v}_1(0),\boldsymbol{v}_2(0),\boldsymbol{v}_3(0),\cdots,\boldsymbol{v}_n(0))$，定义 3 个指标 [10]：

$$\psi_1(t) = 1/\|\boldsymbol{v}_1(t)\|^n ,$$

$$\psi_2(t) = 1/(\prod_{j=1}^{n} \|\boldsymbol{v}_j(t)\|) , \tag{7}$$

$$\psi_3(t) = 1/(sup_j \|\boldsymbol{v}_j(t)\|^n) .$$

对于混沌轨道，显然 $\psi_1(t)$ 应当指数地快速趋于零。由于 $\boldsymbol{v}_1$ 是随机选择的，它大小的增长受最大 Lyapunov 指数控制。 $\psi_2(t)$ 与 $\psi_1(t)$ 比较，能用切向量之间夹角的变化更好地消除切向量方向选择的特殊性。 $\psi_3(t)$ 则以所有切向量大小增长的上确界为指标。由于这 3 个指标都与每个切向量的模演化有关，故对于有序轨道，这 3 个指标都代数式地趋于零 (例外情况是对于切向量演化呈周期振动的有序轨道，这 3 个指标均在某正值范围内波动) 。而对于混沌轨道，这 3 个指标都应指数地快速趋于零。 Froeschlé 等人把它们统称为快速 Lyapunov 指标。注意在实际计算时，切向量不应当作任何重整化，积分时间算多长要根据试算而定，但是对所有的初始条件应当采用同样的积分时间。文献 [10] 把这些指标用于标准映射和 Hènon 和 Heiles [2] 简化的星系模型，得到 $\psi_3(t)$ 能够最好地区分混沌和有序轨道的结论。然而， $\psi_2(t)$ 和 $\psi_3(t)$ 的计算要比 $\psi_1(t)$ 花费更多的时间。

显然，这些指标能够区分有序和混沌轨道，但问题是它们能否用来区分有序轨道的各种类型，例如作为不变 KAM 环的拟周期轨道和陷入岛链中的共振轨道。对于所有的有序轨道，Lyapunov 指数应当全为零，并不能进一步区分各种有序轨道的类型。 2000 年 Froeschlé 和 Lega [11] 指出，共振轨道的快速 Lyapunov 指标值远比拟周期轨道的相应值小得多。他们将上面的快速 Lyapunov 指标作了改进，即采用切向量 $\boldsymbol{\xi}(t)$(见方程 (2)) 的演化来估计：

$$FLI(t) = \ln \|\boldsymbol{\xi}(t)\| , \tag{8}$$

其中， $\|\boldsymbol{\xi}(0)\| = 1$ 且计算时间间隔取为时间单位 1，它类似于局部 Lyapunov 指数，但这里没有采用重整化。利用 FLI 来识别有序或混沌轨道不只是留意 FLI 的数值结果，更重要是观察 FLI 与时间 t 的变化关系，也就是看 FLI 随时间 $\ln t$ 是线性增长 (即图线近似直线) 还是指数增长。由于切向量 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 的计算没有实施重整化过程，特别是对混沌情况，其指数发散速度极快，故 FLI 称为识别有序和混沌轨道的快速指标。应当指出，它比 (7) 式中定义的 3 个指标计算简便。此外， FLI 可区分有序和弱混沌轨道，还能识别共振和非共振轨道。

由此可见，就离散情形来看，FLI 即是没有重整化的每次映射的局部 Lyapunov 指数。前面还指出，当需要计算相空间内的所有 Lyapunov 指数时，对一条给定轨道须再选取正交初始切向量组，并每经过一次积分后实施 Gram-Schmidt 正交归一过程，否则，特别针对混沌轨道切向量的演化将彼此趋于一条直线，因为切向量总是朝最大 Lyapunov 指数方向演化。此外，Froeschlé 等人 [10] 在建立快速 Lyapunov 指标时注意到，由于哈密顿相流的保体积性质和部分切向量长度的快速增加，初始相互正交的一组切向量之间的夹角会急剧减小，因此想用这种性质来建立判断混沌的一种指标。但是从方程 (7) 给出的 3 个指标来看，其包含的切向量之间的夹角含义不明显。 Skokos [47] 正是采用这个夹角随时间的变化程度，提出用较小排列指标 (Smaller Alignment Index, SALI) 来识别有序和混沌轨道。

2.5 较小排列指标

给定初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$ 、两个初始偏离向量 $\boldsymbol{\xi}_1(0)$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2(0)$ 的积分运动方程和依次求解变分方程，可获得 t 时刻两个偏离向量 $\boldsymbol{\xi}_1(t)$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2(t)$ ，每积分一个固定的时间段都进行规一化。记规一化后的 2 个单位向量为 $\boldsymbol{\eta}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2(t)$ ，定义 SALI 为 [47]

$$SALI(t)=\min\{\|\boldsymbol{\eta}_1(t)+\boldsymbol{\eta}_2(t)\|,\ \|\boldsymbol{\eta}_1(t)-\boldsymbol{\eta}_2(t)\|\}\ . \tag{9}$$

不难知道 $SALI(t)\in[0,\sqrt{2}]$ ，还可以发现 $SALI(t)=2\sin(\theta/2)$ $(\theta\in[0,\pi]$ 为两偏离向量 $\boldsymbol{\eta}_1(t)$ 与 $\boldsymbol{\eta}_2(t)$ 的夹角。若 θ 较小，则 $SALI(t)\approx\theta)$ 。当 $\boldsymbol{\eta}_1(t)$ 与 $\boldsymbol{\eta}_2(t)$ 排成一列即同或反方向时，$SALI(t)=0$ 。理论和数值实验表明，对于两维辛映射或含一个自由度的自治哈密顿系统的有序轨道，一般情况下两偏离向量 $\boldsymbol{\eta}_1(t)$ 与 $\boldsymbol{\eta}_2(t)$ 最终将演化到一维不变闭曲线的切线方向，亦即 $SALI(t)\to0$ [48] (例外情况是对于切向量演化呈周期振动的有序轨道，$SALI(t)$ 在某正值范围内波动) 。当然，混沌轨道因切向量总是朝最大 Lyapunov 指数方向演化则必有 $SALI(t)\to0$ 。但上述两者趋于零的方式截然不同，前者是代数式的，而后者是指数式的。对于 $2n$ 维辛映射或含 n $(n>1)$ 个自由度的自治哈密顿系统的有序轨道，因存在 n 个互相对合的独立孤立积分，故相轨道限于 n 维不变环面上，从而两偏离向量 $\boldsymbol{\eta}_1(t)$ 与 $\boldsymbol{\eta}_2(t)$ 一般处于不同方向，使得 $SALI(t)$ 在某正值范围内波动 [49] 。当然，例外情况也有，有可能 $SALI(t)\to0$ ，但趋于零的方式是代数式的 (这个例外情况并没有被原作者注意到，并且原作者着重强调用 $SALI(t)$ 的最终结果来作为识别有序和混沌的判定依据。我们的研究表明，用 $SALI(t)$ 随时间是代数还是指数变化来作为识别有序和混沌的判定依据更为合理) 。就混沌轨道而言，总是有 $SALI(t)$ 指数趋于零 [50] 。 SALI 能够快速有效识别有序和混沌轨道。

SALI 是通过利用积分运动方程和同时积分两次变分方程取得的，而采用两邻近轨道及其各自的变分方程获得两邻近轨道有限时间的 Lyapunov 指标的差也可以作为鉴定有序和混沌轨道的指标。 Sándor 等人 [51] 把这个差称为相对有限时间的 Lyapunov 指标 (Relative Finite Time Lyapunov Indicator, RLI) 。

2.6 相对有限时间的 Lyapunov 指标

方程 (1) 中的 t 不取极限所得的 Lyapunov 指标称为有限时间的 Lyapunov 指标，记作 $L(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\xi}_0,t)$ (其中 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{\xi}_0$ 分别表示初始轨道状态量和初始偏离向量) 。如果只给初始轨道状态量有稍许偏差 $\Delta\boldsymbol{x}$ (最佳选择为 $\|\Delta\boldsymbol{x}\|=10^{-8}$) ，此时初始状态量变为 $\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x}$ ，那么所得有限时间的 Lyapunov 指标为 $L(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_0,t)$ 。于是，记两邻近轨道有限时间的 Lyapunov 指标的差为 [51]

$$RLI(t)=|L(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_0,t)-L(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\xi}_0,t)|\ . \tag{10}$$

对于有序轨道， $RLI(t)$ 随时间 t 在某较小正值附近波动；而对于混沌轨道， $RLI(t)$ 先有一段时间上升达到最大值 (达到最大值的时间记为 τ) ，然后下降趋于零，因为随着时间充分大，$L(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\xi}_0,t)$ 和 $L(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_0,t)$ 都变成最大 Lyapunov 指标，而它与初始轨道状态量和初始偏离向量的选择无关。 τ 与混沌程度有关，混沌越剧烈， τ 就越小。 Sándor 等人 [52] 还考察了 $RLI(t)$ 与初始状态量偏差 $\|\Delta\boldsymbol{x}\|$ 的关系，发现在有序轨道中 $RLI(t)$ 随 $\|\Delta\boldsymbol{x}\|$ 线性增长，而在混沌轨道中 $RLI(t)$ 受 $\|\Delta\boldsymbol{x}\|$ 的变化影响不大。这是因为有序轨道区两邻近轨道基本上保持原初始偏差不变，尽管两者都有趋于零的演化，但演化步调基本一致；而对于混沌轨道，$L(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\xi}_0,t)$ 和 $L(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_0,t)$ 都要向最大 Lyapunov 指标步调不一致地迅速靠近。

尽管 $RLI(t)$ 能够作为识别有序和混沌轨道的指标，但其不足之处也是明显的，它的数值计算需要对运动方程和变分方程各积分两次，效率欠佳。上述几个指标都与 Lyapunov 指数有紧密关系，下面介绍与 Lyapunov 指数关系不很紧密的两个识别有序和混沌轨道的方法。

2.7 0-1 指标

文献 [14,15] 提出一种新的识别混沌的“ 0-1 ”测试法。该方法的理论基础来源于文献 [44,45]，其基本思路是将所要考察的时间序列 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 进行欧几里德群 SE(2) 扩张 (extension)：

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega_0 \ , \\ \dot{p} &= \phi(\boldsymbol{x})\cos\theta \ , \\ \dot{q} &= \phi(\boldsymbol{x})\sin\theta \ . \end{aligned} \tag{11}$$

这里 $\phi(\boldsymbol{x})$ 是关于 $\boldsymbol{x}$ 的任意给定函数 (例如，取 $\boldsymbol{x}$ 的第一个分量 x_1，则有 $\phi(\boldsymbol{x})=x_1$)，频率 ω_0 是任意非零常数。欧几里德群 SE(2) 扩张理论涉及动力系统各态历经理论、泛涵、拓扑和群论等抽象数学理论，这里不作详细介绍，只给出文献 [44,45] 的一个结论。文献 [44,45] 论证表明，p 的平方平均位移

$$M(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[p(t+s)-p(s)]^2\mathrm{d}s \ , \tag{12}$$

满足关系

$$M(t)=K_0t+o(t) \quad t\to+\infty \ , \tag{13}$$

并且所考察的动力系统若不混沌，则 $K_0=0$；否则，K_0 为非零常数。具体地说，对于有序轨道，$p(t)$ 有界，从而 $\Delta p(t)$ 有界，即 $|\Delta p(t)|\le C$ (C 为常数)，于是 $0\le M(t)\le C^2$；而对于混沌情况，$p(t)$ 呈布朗扩张，使得 $|\Delta p(t)|\to t^{1/2}$，因此 $M(t)\to t$。在这理论基础上，Gottwald 和 Melbourne [14] 定义 K 指标为

$$K=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln M(t)}{\ln t} \ . \tag{14}$$

显然，若 $K=0$，则系统有序；若 $K=1$，则系统混沌。

这种方法不必知道运动方程，只需获得关于 $\boldsymbol{x}(t)$ 的时间序列即可。它能快速识别混沌，但不能提供详细的动力学定性性质，也不像 Lyapunov 指数那样反映不规则程度。计算表明，“ 0-1 ”测试法对于相当弱的混沌 (如暂态混沌) 无效，只能识别强混沌。

2.8 频谱分析

1982 年 Binney 与 Spergel [12] 用每个坐标时间序列的傅里叶变换，即频谱分析讨论了星系动力学问题。频谱分析是在频率域上揭示信号隐含的变化规律，以便对信号进行特征分析的一种手段 [40]，也是清晰描述多维系统全局动力学特征的数值工具 [41,42]，近年来在天文尤其天文时间序列分析中得到广泛应用。

一个任意的拟周期信号可以展成傅里叶级数，亦即视为多个或无穷个简谐振动的叠加。一个非周期信号 $x(t)$ ($t\in(-\infty,+\infty)$) 可以认为是一个周期 T 趋向于无穷大的周期信号，故也能展开成傅里叶级数，形如

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\exp^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \ , \tag{15}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \exp^{-i\omega u} \, \mathrm{d}u \ . \tag{16}$$

这里 i 为虚数单位，ω 为频率。$X(\omega)$ 称为 $x(t)$ 的傅里叶变换，也称作 $x(t)$ 的频谱。$X(\omega)$ 是复数，所以可以得到它的振幅 $A(\omega)$ (称为 $x(t)$ 的振幅谱) 和相位 $\Phi(\omega)$ (称为 $x(t)$ 的相位谱)。这里频谱分析只是描述 Nyquist 频率段 $1/(2\Delta)$ (Δ 为取样时间间隔) 内的振幅和相位等分布情况。 Carpintero 和 Aguilar [13] 就是采用振幅谱和相位谱对二维和三维轨道进行分析的。用功率谱得到的频谱分析对于区分周期和拟周期信号所表示的有序轨道是明显的，因为周期和拟周期信号 $x(t)$ 的频谱是离散的线谱；但用功率谱来识别混沌轨道要特别谨慎 [43]，因为非周期信号 (包括混沌轨道和非周期的非混沌轨道) $x(t)$ 的频谱都是连续谱。当初始条件随机选取时，只要频谱定常且连续并可重现，就可断定系统是混沌的。

Robutel 和 Laskar [41]、 Laskar [42] 对频谱分析方法作了理论和适用性研究。对于与一条轨道相联的时间信号 $x(t)$，假定它是一个拟周期函数

$$x(t) = a_1 e^{i\nu_1 t} + \sum_k a_k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu})t} \ , \tag{17}$$

其中 i 是虚数单位，ν_1 是对应最大振幅 a_1 的主频率，$\boldsymbol{\nu}$ 是其他次频组成的频率向量，$\boldsymbol{k}$ 是一个整数向量。Laskar 设计的寻找 ν_1 的算法如下：给一个试探频率 ω 和一个时间间隔 $(0,T)$，计算 ω 对应的振幅

$$a_\omega = \frac{1}{2T} \int_0^T x(t) \mathrm{e}^{-i\omega t} \chi(t) \mathrm{d}t \ , \tag{18}$$

其中 $\chi(t)$ 是一个权函数，通常有 $\chi(t) = 1 + \cos(\pi t/T)$。寻找使 $|a_\omega|$ 达到最大值的 ω_T，它应当是 ν_1 的近似值。 Laskar 认为，对于拟周期轨道，当 $T \to \infty$ 时，有 $\omega_T \to \nu_1$。用这种方法可逐步得到所有频率。

取定两个时间间隔 $[0,T]$ 和 $[T,2T]$，用上述方法在这两个间隔内分别得到 ω_T 和 ω_{2T}。对于一条拟周期轨道，当 T 足够大，应该有 $\omega_T = \omega_{2T}$。因此可以定义

$$\sigma = 1 - \frac{\omega_{2T}}{\omega_T} \tag{19}$$

为轨道混沌性的一个标志，称为频率弥散度。 Laskar 建议用 σ 偏离 0 的程度来表示混沌的强弱。 Robutel 和 Laskar [41] 用频率弥散度讨论了太阳系大行星间的频谱分析和全局动力学，非常好地区分了有序、共振和混沌区域。

3　归纳与讨论

综上所述，每种鉴别混沌的方法各有其优缺点。 Poincaré 截面能直观形象地描述动力系统的全局定性性质，但其应用限于实际维数为 3 的系统。处理多维系统的 Lyapunov 指数能反映两邻近轨道最终分离程度，识别有序和混沌轨道及混沌的程度，但其计算耗费大且不能反映有序轨道的细节。其他几个判定方法包括局部 Lyapunov 指数及其谱分布、快速 Lyapunov 指标、较小排列指标、相对有限时间的 Lyapunov 指标等，均与 Lyapunov 指数有紧密关系。局

部 Lyapunov 指数的和对充分大时间的平均就是 Lyapunov 指数。快速 Lyapunov 指标只不过是没有实施重整化的每时刻的 Lyapunov 指数。较小排列指标就是由一条参考轨道出发计算两个 Lyapunov 指数而没有实施 Gram-Schmidt 正交化的产物。相对有限时间的 Lyapunov 指标是两邻近轨道各自具有的最大有限时间的 Lyapunov 指数之差。尽管如此，它们与 Lyapunov 指数相比仍有些优越之处，如具有快速判断混沌 (尤其是弱混沌) 的能力，能表达动力系统的定性细节问题。这里特别强调，快速 Lyapunov 指标和较小排列指标在区分有序和混沌方面有相似之处。对于混沌轨道，快速 Lyapunov 指标和较小排列指标都随时间指数变化，而对于有序轨道，快速 Lyapunov 指标和有些较小排列指标都随时间代数变化。我们研究表明，如果将方程 (8) 的右边前面添加负号，那么 FLI 和 SALI 都朝零逼近并且两者几乎等价。这用动力系统的各态历经理论是很好理解的。切向量模的变化应当与两切向量的夹角变化有相似性。所以，在使用这两方法时，不应该只注意其最后数值，而应关注其变化过程是指数的还是代数的。另一方面，相对有限时间的 Lyapunov 指标因为需要对运动方程和变分方程各积分两次，效率欠佳，所以不建议采用。此外，如果不易给出变分方程的分析表达式，那么使用这些方法就相当不便利。已经知道计算 Lyapunov 指数可以采用两粒子方法。只要初始偏差选择适当并结合重整化，就能取得与变分法类似的结果。但初始偏离距离不能太大，否则将使两邻近轨道不同处于一个局部切空间内。当然，初始偏离距离也不能太小，否则舍入误差的影响将较大。这样若要将两粒子方法移植到快速 Lyapunov 指标中会遇到一定困难。如果不重整化，则会使两邻近轨道距离偏离越来越大，特别是由于有界混沌轨道的饱和性，两邻近轨道距离增大到一定程度就不再增加；另一方面，像 Lyapunov 指数计算那样实施重整化，就存在如何保证识别有序和混沌仍然快速的问题。原则上，用两邻近轨道的相空间坐标偏差矢量来代替切向量，即三粒子法也可运用于较小排列指标，但同样面临初始偏离距离选择适当问题。至于局部 Lyapunov 指数及其谱分布，应该可以用两粒子方法代替变分法。但这些做法存在的一些理论问题和具体操作细节均有待于数值实践探索。尚需指出，与 Lyapunov 指数似乎无关的快速判断混沌的方法还有 0-1 指标和频谱分析。 0-1 指标的应用最具有一般性，它不仅适合处理多维系统，而且可不必知道运动方程，只需获得有关量的时间序列即可。它能快速识别混沌，但不能提供详细的动力学定性性质。 Laskar 的频谱分析方法能对多维系统进行全局分析。

这些经典动力学识别混沌的方法一般能用来讨论相对论系统，但都不是时空坐标变换的不变量。 Poincaré 截面可用于轴对称四维静态时空，但跨过 Poincaré 截面的点与点的时间间隔与该系统的 “周期” 有联系，从而受时间坐标选择的影响。只有采用原时，该系统的 “周期” 才是固有 “周期”。经典 Lyapunov 指数定义早被人们注意到其不是一个协变量，值得庆幸的是，方程 (6) 建立了相对论框架下不变的 Lyapunov 指数定义，为判断四维时空中的粒子的混沌运动提供了一个客观标准。特别是这种不变的 Lyapunov 指数定义，由于回避变分方程 (粒子在相对论四维时空中的运动方程是测地线方程，其变分方程是相当繁杂的测地偏离方程) 而采用两粒子方法，处理相对论引力体运动方程特别方便。利用这种不变的 Lyapunov 指数定义所得的局部 Lyapunov 指数及其谱分布应该与时空坐标选择无关。因此，研究相对论引力系统 (例如，相对论框架下限制性三体问题) 最好采用我们提出的不变的 Lyapunov 指数定义或者相应的局部 Lyapunov 指数及其谱分布。考虑到快速 Lyapunov 指标和较小排列指标只有用变分方程才能取得较好效果，但因相对论引力系统的运动方程的测地偏离方程的复杂性约束了它们在相对论引力系统中的应用。另一方面，快速 Lyapunov 指标和较小排列指标受时空坐

标选择的影响也是相当明显的。使用快速 Lyapunov 指标和较小排列指标时，最重要的是注意它们的变化过程，然而在一时空坐标系里本来为指数变化有可能在另一坐标系里转化为代数变化，因而也必须建立坐标系不变的定义和操作。0-1 指标方法受坐标变换影响主要体现在两方面，即时间坐标和与时间序列有关的量。对于时间坐标可以用原时作为时间参量，但对与时间序列有关的量如何选择为一个固有量仍没有解决。若采用两邻近轨道固有距离 (5) 式来作为时间序列，则所得方程 (14) 所示的指标 K 是否为坐标变换的不变量还值得探索。频谱分析方法也是这样。

总之，相对论框架下的混沌识别方法有待进一步发展和完善。

参考文献：

[1] Lorentz E N J. Atmos. Sci., 1963, 20: 130
[2] Hénon M, Heiles C. AJ, 1964, 69: 73
[3] Sussman G, Wisdom J. Science, 1988, 241: 433
[4] Murray C D, Dermott S F. Solar System Dynamics, Cambridge: Cambridge University Press, 1999: 409～471
[5] Voglis N, Contopoulos G. J. Phys. A, 1994, 27: 4899
[6] Smith H, Contopoulos G. A&A, 1996, 314: 795
[7] Voglis N, Contopoulos G. Phys. Rev. E, 1998, 57: 372
[8] Contopoulos G, Voglis N, Efthymiopoulos C. Celest. Mech. Dyn. Astron., 1999, 73: 1
[9] Vallejo J C, Aguirre J, Sanjuán M A F. Phys. Lett. A, 2003, 311: 26
[10] Froeschlé C, Lega E, Gonczi R. Celest. Mech. Dyn. Astron., 1997, 67: 41
[11] Froeschlé C, Lega E. Celest. Mech. Dyn. Astron., 2000, 78: 167
[12] Binney J, Spergel D. ApJ, 1982, 252: 308
[13] Carpintero D D, Aguilar L A. MNARS, 1998, 298: 1
[14] Gottwald G A, Melbourne I. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 2004, 463: 603
[15] Barrow J D, Levin J. 2003, preprint (arXiv: nlin.CD/0303070)
[16] Contopoulos G. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1990, 431: 185
[17] Contopoulos G. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1991, 435: 551
[18] Contopoulos G, Papadaki H. Celest. Mech. Dyn. Astron., 1993, 55: 47
[19] Vieira W M, Letelier P S. Phys. Lett. A, 1997, 228: 22
[20] Vieira W M, Letelier P S. ApJ, 1999, 513: 383
[21] Levin J. Phys. Rev. Lett., 2000, 84: 3515
[22] Schnittman J D, Rasio F A. Phys. Rev. Lett., 2001, 87: 121101
[23] Cornish N J. Phys. Rev. D, 2001, 64: 4011
[24] Ni W-T, Shiomi S, Liao A-C. Classical Quantum Gravity, 2004, 21: S641
[25] Landau L D, Lifshitz E M. The Classical Theory of Fields, Oxford: Pergamon Press, 1971: 358～399
[26] Wu X, Huang T Y. Phys. Lett. A, 2003, 313: 77
[27] Imponente G, Montani G. Phys. Rev. D, 2001, 63: 103501
[28] Devany R L. An Introduction to Chaotic Dynamical System, New York: Addison-Wesley Press, 1989: 48～49
[29] 伍歆．博士论文，南京：南京大学， 2003: 51～90
[30] Rasband S N. Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems, New York: A Wiley-Interscience Publication, 1990: 30～170
[31] Edward O. Chaos in Dynamical Systems, Cambridge: Cambridge University Press, 1993: 108～150
[32] Lichhtenberg A J, Lieberman M A. Regular and Chaotic Dynamics, New York: Springer-Verlag, 1990: 298～499
[33] Tancredi G, Sánchez A. AJ, 2001, 121: 1171
[34] Sano M, Sawada Y. Phys. Rev. Lett., 1985, 55: 1082

[35] Oseledec V I. Trans. Moscow Math. Soc., 1968, 19: 197
[36] Benettin G, Galgani L, Giorgilli A *et al.* Meccanica, 1980, 15: 9
[37] Suzuki S, Maeda K. Phys. Rev. D, 1997, 55: 4848
[38] Nieto J A, Saucedo J, Villanueva V M. Phys. Lett. A, 2003, 312: 175
[39] Sachs R K, Wu H. General Relativity for Mathematicians, New York: Springer-Verlag, 1977: 5～150
[40] 丁月蓉. 天文数据处理方法，南京：南京大学出版社， 1998: 170～230
[41] Robutel P, Laskar J. Icarus, 2001, 152: 4
[42] Laskar J. In: Gurdzadyan V, Ruffini R eds. Proc. of the Chaotic Universe, Rome, Pescara, Signapore: World Scientic, 1999: 115～126
[43] Hartl M D. Phys. Rev. D, 2003, 67: 024005
[44] Biktashev V N, Holden A V. Physica D, 1998, 116: 342
[45] Nicol M, Melbourne I, Ashwin P. Nonlinearity, 2001, 14: 275
[46] Szydlowski M. Gen. Relativ. Gravitation, 1997, 29: 185
[47] Skokos Ch. J. Phys. A, 2001, 34: 10029
[48] Vozikis Ch L. J. Phys. A, 2001, 34: 1513
[49] Skokos Ch, Antonopoulos Ch, Bountis T C *et al.* Prog. Theor. Phys. Suppl., 2003, 150: 439
[50] Skokos Ch, Antonopoulos Ch, Bountis T C *et al.* J. Phys. A, 2004, 37: 6269
[51] Sándor Z, Érdi B, Efthymiopoulos C. Celest. Mech. Dyn. Astron., 2000, 78: 113
[52] Sándor Z, Érdi B, Széll A *et al.* Celest. Mech. Dyn. Astron., 2004, 90: 127
[53] Szezech J D, Lopes S R, Viana R L. Phys. Lett. A, 2005, 335: 394

Several Diagnostic Indexes for Orbital Chaos

WU Xin[1,2], HUANG Tian-yi[1]

(*1. Department of Astronomy, Nanjing University, Nanjing 210093, China; 2. Department of Physics, Nanchang University, Nanchang 330047, China*)

Abstract: In this paper we review in detail some methods for distinguishing between a regular orbit and a chaotic one in a Newtonian dynamical system, which contain Poincaré section, Lyapunov exponents, local Lyapunov exponents and their spectral distributions, fast Lyapunov exponent index, smaller alignment index, 0-1 test, frequency map analysis, and so on. In particular, merits, demerits and application of these diagnostic indexes are discussed. In principle, these indexes from the Newtonian frame can also be applied to relativistic gravitational systems in general. However, there may still exist some problems because they are not coordinate invariant. As a result, it is vital to understand the behavior of a relativistic gravitational system by a covariant way. For example, it is convenient to employ our way for the calculation of Lyapunov exponents with gauge invariance by use of the "1+3" splitting of a curved spacetime and the projected norm.

Key words: celestial mechanics; chaos; review; orbit; Lyapunov exponent; general relativity