

文章编号: 1001-4322(1999)05-0633-06

多腔谐振腔中渡越时间效应的线性理论

范植开, 刘庆想, 刘锡三, 周传明, 胡海鹰

(中国工程物理研究院应用电子学研究所, 四川省绵阳市 919-1015 信箱, 621900)

摘 要: 以小信号条件下入射相位为 φ_0 的单个电子在驻波电场中的运动为基础, 研究了电子束在多腔谐振腔 π 模驻波场中的渡越时间效应, 导出了多腔谐振腔的电子负载电导的表达式, 讨论了腔数 N 对渡越时间效应的影响。

关键词: 多腔谐振腔; 渡越时间效应; 线性理论

中图分类号: TN751.2+3 文献标识码: A

小信号条件下, 电子束在单腔及两腔谐振腔中的渡越时间效应国外学者已进行过研究^[1~4], 电子束在三腔谐振腔中的渡越时间效应我们在文献[5]中研究过。研究表明, 从提高输出微波功率来看, 三腔谐振腔比单腔和两腔有明显优势, 这一优势在刘庆想博士 97 年进行的三腔渡越时间效应高功率微波振荡器的原理性实验中得到了证实^[6]。

那么, 电子束在四腔、五腔或更多谐振腔中的渡越时间效应怎么样呢? 束波转换效率会更高吗? 为了解答这些问题, 我们采用文献[5]中所用的一套物理量和基本假定, 建立了 N 腔谐振腔系统中渡越时间效应的线性理论, 分析了腔数 N 对渡越时间效应的影响。

1 N 腔谐振腔 π 模驻波电场中电子运动的基本方程

1.1 N 腔谐振腔结构示意图及本征模场表达式

多腔谐振腔的基本结构如图 1 所示。 π 模驻波场在 N 腔谐振腔第 n ($n=1, 2, \dots, N$) 腔中的电场为

$$E_n = (-1)^{n-1} E_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (n-1)d < z < nd \quad (1)$$

1.2 电子在 N 腔谐振腔第 n 腔中运动的基本方程 速度方程

$$v_n(t, \varphi_0) = v(\tau_{n-1}, \varphi_0) + (-1)^{n-1} (eE_m/m\omega) [\cos(\omega t + \varphi_0) - \cos(\omega\tau_{n-1} + \varphi_0)], \quad (n-1)d < z < nd \quad (2)$$

位移方程

$$z_n(t, \varphi_0) = (n-1)d + [v(\tau_{n-1}, \varphi_0) - (-1)^{n-1} (eE_m/m\omega) \cos(\omega\tau_{n-1} + \varphi_0)](t - \tau_{n-1}) + (-1)^{n-1} (eE_m/m\omega^2) [\sin(\omega t + \varphi_0) - \sin(\omega\tau_{n-1} + \varphi_0)], \quad (n-1)d < z < nd \quad (3)$$

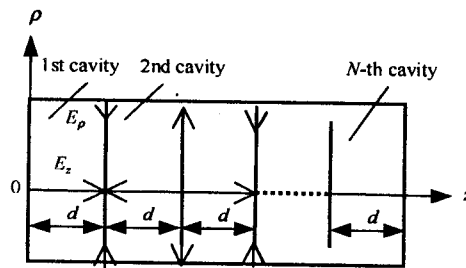


Fig. 1 Schematic of a N -cavity resonator
图 1 N 腔谐振腔示意图

• 国家 863 激光技术领域资助课题

1999 年 6 月 20 日收到原稿, 1999 年 9 月 20 日收到修改稿。第五届全国激光科学技术青年学术交流会优秀论文
范植开, 男, 1965 年 2 月出生, 博士, 讲师

2 N 腔谐振腔中渡越时间效应的线性理论

利用以上基本方程经过繁杂推导可以得出下面的公式, 推导过程见文献[7].

2.1 电子在 N 腔谐振腔的实际渡越时间 τ_N 与直流渡越时间 $N\tau_0$ 相差的微小量 δ_N

$$\delta_N = -\frac{\eta}{\omega} \left[(-1)^{N-1} \sin(\theta_0 + \varphi_0) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{i-1} \sin(i\theta_0 + \varphi_0) - \sin\varphi_0 \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{i-1} (N-i) \theta_0 \cos(i\theta_0 + \varphi_0) - N\theta_0 \cos\varphi_0 \right] \quad (4)$$

由 $\tau_N(\varphi_0) = N\tau_0 + \delta_N(\varphi_0)$ 即可求出不同初相 φ_0 的电子在 N 腔谐振腔中的实际渡越时间 τ_N .

2.2 电子离开 N 腔谐振腔的速度 $v(\tau_N, \varphi_0)$

$$\frac{v(\tau_N, \varphi_0)}{v_0} = 1 + \eta [A_N(\theta_0, \varphi_0) + B_N(\theta_0, \varphi_0, \eta)] \quad (5)$$

$$\text{式中} \begin{cases} A_N(\theta_0, \varphi_0) = (-1)^{N-1} \cos(N\theta_0 + \varphi_0) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^{n-1} \cos(n\theta_0 + \varphi_0) - \cos\varphi_0 \\ B_N(\theta_0, \varphi_0, \eta) = 2\omega \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \delta_n \sin(n\theta_0 + \varphi_0) + (-1)^N \omega \delta_n \sin(N\theta_0 + \varphi_0) \end{cases}$$

式中 δ_n 为电子在前 n 个腔的实际渡越时间与直流渡越时间相差的微小量, 由(4)令 $N=n$ 式给出.

2.3 电子离开 N 腔谐振腔的动能 E_K

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2(\tau_N, \varphi_0) = \frac{1}{2} m v_0^2 \{1 + \eta [A_N(\theta_0, \varphi_0) + B_N(\theta_0, \varphi_0, \eta)]\}^2 \\ \approx \frac{1}{2} m v_0^2 \{1 + 2\eta [A_N(\theta_0, \varphi_0) + B_N(\theta_0, \varphi_0, \eta)] + \eta^2 A_N^2(\theta_0, \varphi_0)\} \quad (6)$$

计算 E_K 时, 只保留 2 阶微小量, 忽略 $\eta^2 B_N$ 及 $\eta^2 B_N^2$ 项. B_N 是一个关于 η 的微小量.

2.4 单个电子对任意初相 φ_0 的平均动能 \bar{E}_K

$$\bar{E}_K = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_K d\varphi_0 = \frac{m v_0^2}{4\pi} \left\{ 2\pi + 2\eta \int_0^{2\pi} [A_N(\theta_0, \varphi_0) + B_N(\theta_0, \varphi_0, \eta)] d\varphi_0 + \eta^2 \int_0^{2\pi} A_N^2(\theta_0, \varphi_0) d\varphi_0 \right\}$$

经过十分繁杂的计算, 可得

$$\int_0^{2\pi} A_N(\theta_0, \varphi_0) d\varphi_0 \equiv 0; \\ \int_0^{2\pi} B_N(\theta_0, \varphi_0, \eta) d\varphi_0 = \pi\eta \left[(2N-1) + 4 \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n (N-n) \cos(n\theta_0) + \right. \\ \left. (-1)^N \cos(n\theta_0) + 4\theta_0 \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n n (N-n) \sin(n\theta_0) + (-1)^N N\theta_0 \sin(N\theta_0) \right]; \\ \int_0^{2\pi} A_N^2(\theta_0, \varphi_0) d\varphi_0 = \pi \left[(4N-2) + 8 \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n (N-n) \cos(n\theta_0) + (-1)^N 2\cos(N\theta_0) \right] \\ \text{故有 } \bar{E}_K = \frac{m v_0^2}{2} [1 + \eta^2 \theta_0^2 F_N(\theta_0)] \quad (7)$$

$$\text{式中 } F_N(\theta_0) = \left[(4N-2) + 8 \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n (N-n) \cos(n\theta_0) + (-1)^N 2\cos(N\theta_0) \right.$$

$$\left. + 4\theta_0 \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n n (N-n) \sin(n\theta_0) + (-1)^N N\theta_0 \sin(N\theta_0) \right] / \theta_0^2 \quad (8)$$

2.5 电子平均动能的增量 $\Delta\bar{E}_K$

$$\Delta\bar{E}_K = \bar{E}_K - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\eta^2\theta_0^2 F_N(\theta_0) = \frac{1}{2}m(eE_m/m\omega)^2\theta_0^2 F_N(\theta_0) \quad (9a)$$

由上式知, $F_N(\theta_0)$ 的大小直接影响电子与场之间能量交换 $\Delta\bar{E}_K$ 的大小, 且 $F_N(\theta_0)$ 的表达式随腔数 N 的不同而不同(见(8)式), 我们不妨称其为能量交换的腔数因子。

若把 N 腔谐振腔一维模型每个间隔上高频电压的幅值记为 U_m , 则 $U_m = E_m d$, 电子直流加速电压为 U_0 , 则 $(1/2)mv_0^2 = eU_0$, 又 $\theta_0 = \omega d/v_0$, 由这些关系式可将上式改写为

$$\Delta\bar{E}_K = eU_0(U_m/2U_0)^2 F_N(\theta_0) \quad (9b)$$

2.6 电子束得到的功率 P 及束波功率转换效率 η_P

$$P = \Delta\bar{E}_K n = \Delta\bar{E}_K I_0/e = I_0 U_m^2/(4U_0) F_N(\theta_0) \quad (10)$$

$$\eta_P = -P/(I_0 U_0) = -(U_m/2U_0)^2 F_N(\theta_0) \quad (11)$$

2.7 N 腔谐振腔电子负载电导 G_{bN}

若把电子注从高频电场中得到的功率 P 等效为 N 腔谐振腔中任一间隙上的高频电压 $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ 供给电子负载电导 G_{bN} 的功率, 则有

$$P = (1/2)U_m^2 G_{bN} = (1/2)(G_0/2) F_N(\theta_0) \quad (12)$$

式中 $G_0 = I_0/U_0$ 电子注直流电导。

3 不同腔数谐振腔中渡越时间效应的对比分析

由(9)、(10)、(11)及(12)式知, 能量交换腔数因子 $F_N(\theta_0)$ 不仅能相对地表示电子束与场净能量交换 $\Delta\bar{E}_K$, 而且能相对表示电子束得到功率 P 、电子负载电导 G_{bN} 及束波功率转换效率 η_P 等物理量, 它的特性能体现出电子束在不同腔数谐振腔系统中渡越时间效应的规律。

令 $N=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, 由 $F_N(\theta_0)$ 的计算公式得出 $F_1(\theta_0)$ 至 $F_7(\theta_0)$, 画出它们的曲线图(见图 2)。图 2 和表 1 中, PCR、NCR 及 CR 分别表示正电导区(Positive Conductance Region)、负电导区(Negative Conductance Region)及电导区(Conductance Region)。 $F_1(\theta_0)$ 至 $F_3(\theta_0)$ 的表达式及图形见文献[5], 这里从略。

$$F_4(\theta_0) = [14 - 24\cos\theta_0 + 16\cos(2\theta_0) - 8\cos(3\theta_0) + 2\cos(4\theta_0) - 12\theta_0\sin\theta_0 + 16\theta_0\sin(2\theta_0) - 12\theta_0\sin(3\theta_0) + 4\theta_0\sin(4\theta_0)]/\theta_0^2$$

$$F_5(\theta_0) = [18 - 32\cos\theta_0 + 24\cos(2\theta_0) - 16\cos(3\theta_0) + 8\cos(4\theta_0) - 2\cos(5\theta_0) - 16\theta_0\sin\theta_0 + 24\theta_0\sin(2\theta_0) - 24\theta_0\sin(3\theta_0) + 16\theta_0\sin(4\theta_0) - 5\theta_0\sin(5\theta_0)]/\theta_0^2$$

$$F_6(\theta_0) = [22 - 40\cos\theta_0 + 32\cos(2\theta_0) - 24\cos(3\theta_0) + 16\cos(4\theta_0) - 8\theta_0\cos(5\theta_0) + 2\cos(6\theta_0) - 20\theta_0\sin\theta_0 + 32\theta_0\sin(2\theta_0) - 36\theta_0\sin(3\theta_0) + 32\theta_0\sin(4\theta_0) - 20\theta_0\sin(5\theta_0) + 6\theta_0\sin(6\theta_0)]/\theta_0^2$$

$$F_7(\theta_0) = [26 - 48\cos\theta_0 + 40\cos(2\theta_0) - 32\cos(3\theta_0) + 24\cos(4\theta_0) - 16\theta_0\cos(5\theta_0) + 8\cos(6\theta_0) - 2\cos(7\theta_0) - 24\theta_0\sin\theta_0 + 40\theta_0\sin(2\theta_0) - 48\theta_0\sin(3\theta_0) + 48\theta_0\sin(4\theta_0) - 40\theta_0\sin(5\theta_0) + 24\theta_0\sin(6\theta_0) - 7\theta_0\sin(7\theta_0)]/\theta_0^2$$

将一至七腔谐振腔的 $F_N(\theta_0)$ 函数的主要特性列于表 1。最佳工作点处的 $F_N(\theta_0)$ 值, 即为 $F_N(\theta_0)$ 的负最大值, 也是负能量交换的最大值。

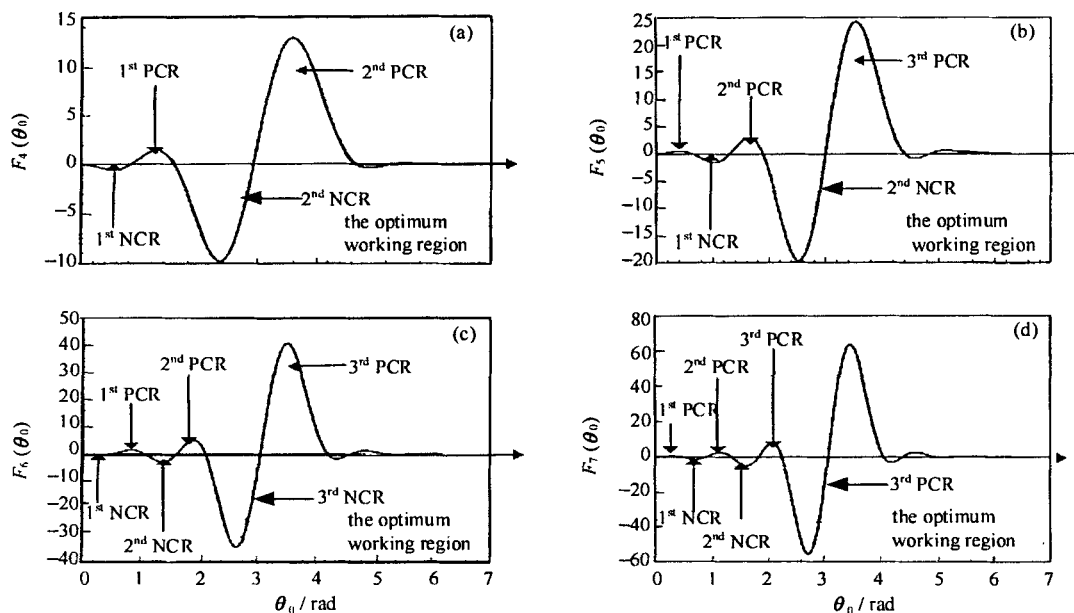


Fig. 2 Plots of $F_N(\theta_0)$ of the multiple-cavity resonator vs θ_0 , corresponding to (a) the four-cavity resonators (b) the five-cavity resonators (c) the six-cavity resonators (d) the seven-cavity resonators

图 2 多腔谐振腔的能量交换 $F_N(\theta_0)$ 与 θ_0 的关系曲线

表 1 一至七腔谐振腔的 $F_N(\theta_0)$ 函数主要特性对照表

Table 1 Comparison of the main characteristics of $F_N(\theta_0)$ for single-cavity to seven-cavity resonators

cavity number N	1	2	3	4	5	6	7
The plus-minus property of the 1 st CR	positive	negative	positive	negative	positive	negative	positive
The number of PCR, NCR and CR in the range 0 to 2π	1; 0; 1	1; 1; 2	3; 2; 5	3; 3; 6	5; 4; 9	5; 5; 10	7; 6; 13
CR corresponding to the optimum working region	1 st NCR	1 st NCR	1 st NCR	2 nd NCR	2 nd NCR	3 rd NCR	3 rd NCR
θ_0 range of the optimum working region/rad	6.29~8.98	0~2.33	1.05~2.75	1.58~2.91	1.89~2.99	2.10~3.03	2.25~3.06
width of the optimum working region/rad	2.69	2.33	1.70	1.33	1.10	0.93	0.81
θ_0 of the optimum working point/rad	7.52	1.47	2.06	2.35	2.53	2.64	2.72
$F_N(\theta_0)$ of the optimum working point	-0.10	-0.94	-3.90	-9.79	-19.66	-34.54	-55.44

4 结 论

将表 1 中最后两行数据画成曲线示于图 3。结合图 3 及表 1,分析 $F_1(\theta_0)$ 至 $F_7(\theta_0)$ 的曲线图,可得出如下结论:

(1) 随着渡越角 θ_0 的增大,正、负能量交换区交替出现。 N 为奇数,最先出现正能量交换区; N 为偶数,最先出现负能量交换区。

(2) 随着腔数 N 的增加,负能量交换的最大值迅速增大,在 $N \geq 2$ 时,其对应的渡越角 θ_0 也在逐渐增大,但都小于单腔管的渡越角。

(3) 随着腔数 N 的增加,正、负能量交换区的区间长度在缩短、数目在增加,这表明腔数 N 越多,谐振腔最佳工作点附近的可工作范围越来越窄。

(4) 当 $N > 1$ 时,最佳工作区出现在第 $N/2$ (N 为偶数)或 $(N-1)/2$ (N 为奇数)负能量交换区。

(5) 不管腔数 N 为何值,当 $\theta_0 = 2n\pi, (n=0,1,2,\dots), F_N(\theta_0) \equiv 0$ 。

(6) 在 $[0, 2\pi]$ 区间内,函数 $F_N(\theta_0)$ 正、负电导区的个数及电导区的总数分别为: N 为奇数时, $N-1$ 个、 N 个和 $2N-1$ 个; N 为偶数时, $N-1$ 个、 $N-1$ 个和 $2N-2$ 个。

5 结 束 语

本文建立了电子束在 N 腔 (N 为任意正整数) 谐振腔系统中渡越时间效应的线性理论。令 $N=1,2$, 易得出与国外学者建立的电子束在一腔, 二腔谐振腔中渡越时间效应线性理论相同的结论。

本文采用的是一维模型, 假定电场幅度 E_m 与径向坐标 ρ 无关, 实际谐振腔中的 E_m 一般是径向坐标 ρ 的函数, 对这种情况可用两种方法处理。一种是求出电子束截面上 $E_m(\rho)$ 对 ρ 的平均值作为一维模型中的 E_m , 用一维模型线性理论来近似处理; 另一种是把电子注看成是

是很多个很薄的空心电子注组合而成, 每一个空心电子注中 ρ 的变化很小, 因而 $E_m(\rho)$ 的变化也很小, 可视作常数。这样可用一维线性理论来处理, 求出该空心电子注动能的变化 $\Delta E_k(\rho)$, 然后将它对 ρ 积分得出 ΔE_k , 进而导出其它相关的公式, 这种处理方法是精确的。

线性理论自身存在局限性, 因为它是在小信号条件下建立起来的理论。实际谐振腔只是在自激起振的开始阶段才满足小信号条件, 严格地讲线性理论只能精确描述实际谐振腔自激起振开始阶段的束波相互作用。随着自激过程的深入, 微波场逐渐增大, 谐振腔将在大信号条件下工作, 此时, 应该用大信号理论 (即非线性理论) 进行研究。在大信号条件下, 表示束波净能量交换相对大小的 $F_N(\theta_0)$ 函数会发生变化, 它的形状及其最佳工作区的位置、宽度和最佳工作点的位置都与信号大小 (即 U_m 与 U_0 的相对大小) 相关, 并不是固定不变的^[6], 所以用线性理论会引起较大误差, 不过线性理论所预示的基本规律仍是正确的, 可以直接外推为非线性理论的物理解释提供依据。

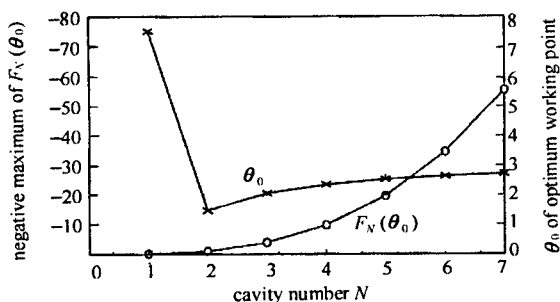


Fig. 3 Plots of the maximum negative energy exchange and its corresponding θ_0 vs the cavity number N
图 3 负能量交换最大值及对应 θ_0 随腔数 N 的关系曲线

本文的线性理论是在忽略空间电荷效应及相对论效应的条件下建立起来的,所以只有在这两种效应都较弱时,该理论才是精确的。当这两种效应较强时,该理论会引起一定的误差,应予以修正。

参考文献

- 1 列别捷夫 И В. 成都电讯工程学院译. 超高频电真空器件(上册). 北京:人民教育出版社,1960. 54~63
- 2 Marcum Jess. Interchange of Energy between an Electron Beam and an Oscillating Electric Field. *J Appl Phys*, 1946, 17,4~11
- 3 Marder Barry M, et al. The Split-Cavity Oscillator, A High-Power E-Beam Modulator and Microwave Source. *IEEE Trans Plasma Sci*, 1992, 20(3):312~331
- 4 Mostron M A, et al. Mission Res. Corp., Albuquerque. NM, Tech. Rep. MRC/ABQ-R-1030, 1988
- 5 范植开等. 三腔谐振腔渡越时间效应的小信号分析. 强激光与粒子束, 1999, 11(4):482~486
- 6 刘庆想. 三腔渡越时间效应高功率微波振荡器研究. 中国国防科学技术报告,中物院应用电子学研究所, 1998
- 7 范植开. 渡越管振荡器的理论研究与原理性实验[博士学位论文]. 北京:中国工程物理研究院北京研究生部, 1999

THE LINEAR THEORY OF THE TRANSIT-TIME EFFECT IN A MULTIPLE-CAVITY RESONATOR

FAN Zhi-kai, LIU Qing-xiang, LIU Xi-san, ZHOU Chuan-ming, and HU Hai-ying
Institute of Applied Electronics, CAEP, P. O. Box 919-1015, Mianyang Sichuan, 621900

ABSTRACT: Based on the motion of the single electron whose incident phase is ϕ_0 in standing wave electric field under the small signal condition, the transit-time effect of electron beam in π mode standing wave electric field in a multiple-cavity resonator is investigated, the expressions of electron load conductance in a multiple-cavity resonator are presented, and the effect of the cavity number N on transit-time effect in a multiple-cavity resonator is discussed.

KEY WORDS: multiple-cavity resonator; transit-time effect; linear theory