

新型 6-PRRS 并联机器人运动学和动力学研究

刘玉斌, 赵 杰, 蔡鹤皋

(哈尔滨工业大学 机器人研究所, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 利用旋量理论和指数积方法求解了 6-PRRS 并联机构主动关节与被动关节的位置逆解。根据该并联机构的输入输出映射关系, 推导出一种基于速度投影的雅可比矩阵求解方法。提出一种解决新型 6-PRRS 并联机器人逆动力学问题的系统方法, 采用 Lagrange 法建立并联机器人的刚体动力学关系, 应用虚功原理最终获得动力学模型。解决了 6-PRRS 并联机器人一系列运动学和动力学问题, 这些方法具有一定的通用性, 适用于类似并联机构的分析与研究。

关键词: 自动控制技术; 并联机器人; 指数积; 逆运动学; 动力学; 雅可比矩阵

中图分类号: TP242 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5497(2008)05-1220-05

Study on kinematics and dynamics of a novel 6-PRRS parallel robot

LIU Yu-bin, ZHAO Jie, CAI He-gao

(Robot Research Institute, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Based on screw theory and exponential product method, the inverse kinematics of the passive and active joints of the 6-PRRS parallel robot was resolved. According to the mapping relation of input and output of the parallel robot, Jacobian matrix of this robot was obtained on the basis of velocity projection method. A systematic approach was developed to solve the inverse dynamics of a novel 6-PRRS parallel robot. The dynamics equation of the robot constructed on the basis of Lagrange method by using the principle of virtual work was achieved. A series of kinematics and dynamics issues of this kind robot were solved. These methods also have adaptability to the research for similar parallel robots.

Key words: automatic control technology; parallel robot; exponential product; inverse kinematics; dynamics; jacobins matrix

6-PRRS 机构是众多并联机构构型中的一类, 其特点是驱动部分为 6 个直线运动输入, 而驱动部分的空间布置又有多种形式。本文讨论的 6-PRRS 并联机构采用最近才出现的将驱动部分布置成平行形式, 而其特点是直线驱动采用螺旋

驱动的形式, 这是一种新的驱动组合方式。这种布置形式从结构上决定该机构具有较大的运动空间, 也因其驱动的平行布置, 为其快速运动奠定了基础, 运动学、动力学相关问题是该机构能否体现其结构优势的前提。该并联机器人主要应用在加

收稿日期: 2007-01-08.

基金项目: “863” 国家高技术研究发展计划项目(2001AA422250); 长江学者和创新团队发展计划项目(IRT0423).

作者简介: 刘玉斌(1976-), 男, 博士研究生. 研究方向: 并联机器人技术. E-mail: liuyubin@hit.edu.cn

通信作者: 蔡鹤皋(1934-), 男, 教授, 博士生导师, 中国工程院院士. 研究方向: 机器人技术. E-mail: hgcai@hit.edu.cn

工机床与医疗领域^[1]。与串联机构相反,并联机构的逆解比正解更容易求得^[2]。本文描述的运动学逆解不是简单地求取驱动端输入量,而是要获得驱动关节和各个被动关节的变化量,可以称其为一种完全意义的运动学逆解。该求解方法建立在运动旋量与指数积公式基础上,完全意义上的运动学逆解是研究机构的误差、标定、静刚度、动力学等相关问题的基础。

对并联机器人进行高精度的控制首先需要建立高效算法的动力学方程。机械系统动力学建模方法有很多,典型的有 Newton-Euler 方程、Lagrange 方程、高斯最小拘束原理法及 Kane 方程等^[3-4],这些方法具有不同的特点,分别适合特定的机械系统。本文采用拉格朗日方法,它能以简单的形式求得非常复杂的系统动力学方程,且具有显式结构^[5]。

1 基于运动旋量的位置逆解求解

6-PRRS 并联机器人属双平台并联多支路结构,主要有固定平台、动平台以及连接两个平台的固定长度的连杆组成。如图 1 所示,每个分支包含的运动副数目及结构相同,其构成为:沿固定平台作直线运动的移动副 M,移动副的移动部分(滑块)通过两个转动副 R 与连杆连接,连杆通过球副 S 与动平台连接。该并联机构的驱动关节为 6 个移动关节,具有 6 个自由度。

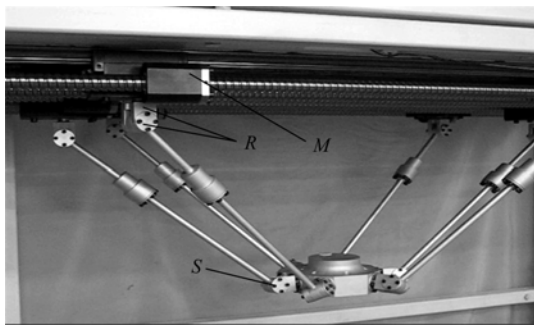


图 1 6-PRRS 并联机器人
Fig. 1 6-PRRS parallel robot

假设机器人的第一个分支运动链(包括末端执行器)有 n_1 个关节,第二个分支运动链(包括末端执行器)有 n_2 个关节,则运动学正解可用指数坐标表示为

$$g_{st} = e^{\xi_{11} \theta_{11}} \dots e^{\xi_{1n} \theta_{1n}} g_{st}(0) = e^{\xi_{21} \theta_{21}} \dots e^{\xi_{2n} \theta_{2n}} g_{st}(0) \quad (1)$$

式中: g_{st} 、 $g_{st}(0)$ 别表示最终位姿和初始位姿; ξ 表

示移动关节或转动关节对应的运动旋量;与之对应的 θ 表示该运动旋量的转动量或移动量。式中所有的参数都是相对于工具坐标系和基础坐标系描述的。式(1)称为并联机器人的结构方程,它建立了机器人关节转角之间的约束。由于这些约束的存在,仅从需确定关节变量的子集就能控制末端执行器的位置,而其余关节变量的取值必须满足式(1)。

定义工具坐标系 T 中表示的动平台的位姿为

$$g_{st}(\theta) = e^{\xi_{11} \theta_{11}} \dots e^{\xi_{1n} \theta_{1n}} g_{st}(0) = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =: g_d \quad (2)$$

式中: R 为动平台相对于固定平台的姿态; P 为动平台的位置;此处定义 $g_d \in SE(3)$ 为动平台的期望位形。

式(2)右乘 $g_{st}^{-1}(0)$ 可得指数映射 $g_{st}(0)$, 即

$$e^{\xi_{11} \theta_{11}} \dots e^{\xi_{1n} \theta_{1n}} = g_d g_{st}^{-1}(0) =: g_1 \quad (3)$$

图 2 定义了各运动旋量,以下以一个分支为例分步骤来确定所要求的关节转接或位移。

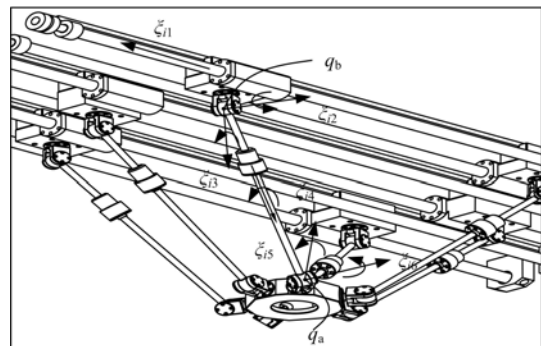


图 2 运动旋量定义

Fig. 2 Definition of motion screw

第一步(求移动关节 θ_1) 由动平台的期望位形可知动平台上一点在惯性坐标系中的坐标, q_a 在惯性坐标系中的坐标为 $g_d q_a$, 滑块在导轨上的位置为 $q_b(x, y, z, 1)$, 其中 y, z 为已知量, 故有

$$\| g_d q_a - q_b \|^2 = l_0^2$$

由此方程可以解出唯一未知量 x , 并能够求出与 $\xi_1 \theta_1$ 相对应的 θ_1 。

第二步(求关节角 θ_2 与 θ_3) 将式(1)两边作用于 $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ 的交点 q_a 处, 因为 q_a 位于运动旋量 ξ 上, 故 $\exp(\xi \theta) q_a = q_a$, 则有

$$e^{\xi_{11} \theta_{11}} e^{\xi_{22} \theta_{22}} e^{\xi_{33} \theta_{33}} q_a = g_1 q_a \quad (4)$$

由于 θ_1 已经解出, 式(3)对应的运动方程可以改写为

$$e^{\xi_{12} \theta_{12}} e^{\xi_{13} \theta_{13}} q_a = e^{-\xi_{11} \theta_{11}} g_1 q_a \quad (5)$$

式(5)符合文献[6]中的机器人逆运动学解法子问题 2,利用该解法即可求得关节角 θ_2 与 θ_3 。

第三步(求关节角 θ_4 与 θ_5) 剩下的运动方程可以改写为

$$e^{\xi_{14} \theta_{14}} e^{\xi_{15} \theta_{15}} e^{\xi_{16} \theta_{16}} = e^{-\xi_{13} \theta_{13}} e^{-\xi_{12} \theta_{12}} e^{-\xi_{11} \theta_{11}} g_d g_{st}^{-1}(0) =: g_2 \quad (6)$$

将式(5)作用于轴 ξ_{16} ,但不在轴 ξ_{14} 和 ξ_{15} 的一点 q_d 上,得到

$$e^{\xi_{14} \theta_{14}} e^{\xi_{15} \theta_{15}} q_d = g_2 q_d \quad (7)$$

式(7)符合文献[6]中的机器人逆运动学解法子问题 2,利用该解法即可求得关节角 θ_4 与 θ_5 。

第四步(求关节角 θ_6) 剩下未求出的仅为 θ_6 ,将运动方程重新整理,并将其两边作用于动坐标系原点 t_0 ,有

$$e^{\xi_{16} \theta_{16}} t_0 = e^{-\xi_{13} \theta_{13}} e^{-\xi_{14} \theta_{14}} e^{-\xi_{15} \theta_{15}} e^{-\xi_{12} \theta_{12}} e^{-\xi_{11} \theta_{11}} g_d g_{st}^{-1}(0) t_0 \quad (8)$$

式(8)符合文献[6]中的机器人逆运动学解法子问题 1,利用该解法即可求得关节角 θ_6 。

至此,通过运动旋量与指数积方法求得了机构完全意义上的运动学逆解。

下面给出一个计算实例,此实例根据图 1 所示机构的基本结构参数来计算,图中导轨间距 195 mm,杆长 320 mm;导轨高度差 26 mm。相对于零位姿,运动平台中心位于(0,20,20),姿态为零时,某一支链各个关节角输出如表 1 所示。

表 1 关节输出

Table 1 Output of joint

θ_1/mm	$\theta_2/(\text{^\circ})$	$\theta_3/(\text{^\circ})$	$\theta_4/(\text{^\circ})$	$\theta_5/(\text{^\circ})$	$\theta_6/(\text{^\circ})$
-17.2429	1.9692	-3.1530	2.1062	-1.7387	4.3558

2 基于速度投影方法的雅可比矩阵求解

刚体运动可以分解为跟随基点的平动与绕基点的转动,本文以并联机器人的第一个运动支链为分析对象,机器人动平台铰链点的运动速度可以表示为

$$\mathbf{V}_{A_1} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_1 \quad (9)$$

式中: $\mathbf{V}_{A_1} \in \mathbf{IR}^{3 \times 1}$,为铰点 A_1 的运动速度; $\mathbf{v} \in \mathbf{IR}^{3 \times 1}$,为动平台运动速度; $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{IR}^{3 \times 1}$,为动平台绕基点运动的瞬时角速度; $\mathbf{R}_1 \in \mathbf{IR}^{3 \times 1}$,为铰点到动平台的中心矢量。

由速度投影定理,将铰点 A_1 和 B_1 速度投影到这两点所在的向量 \mathbf{n}_1 上(见图 3),令方向向量

$\mathbf{n}_1 = A_1 - B_1$,则有投影关系

$$\mathbf{V}_{A_1} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{V}_{B_1} \cdot \mathbf{n}_1 \quad (10)$$

式中: $\mathbf{V}_{B_1} \in \mathbf{IR}^{3 \times 1}$,为铰点 B_1 的运动速度。

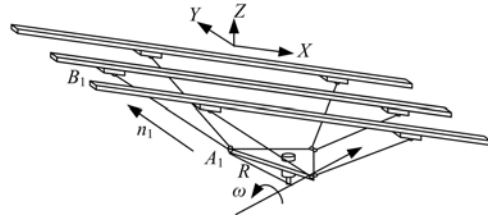


图 3 速度投影方法

Fig. 3 Velocity projection method

由式(9)及式(10)有

$$\mathbf{V}_{B_1} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{V}_{A_1} \cdot \mathbf{n}_1 = (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{n}_1 \quad (11)$$

令 $\mathbf{n}_1 = [n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}]$,考虑到 \mathbf{V}_{B_1} 向量方向的特殊性, $\mathbf{V}_{B_1} = [V_{B_1X}, 0, 0]$,有

$$\mathbf{V}_{B_1} \cdot \mathbf{n}_1 = [V_{B_1X}, 0, 0][n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}]' = V_{B_1X} n_{1x} \quad (12)$$

根据式(11)及式(12)有

$$V_{B_1X} n_{1x} = (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{n}_1 = [\mathbf{n}_1, \mathbf{R}_1 \times \mathbf{n}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (13)$$

令 $\mathbf{n}'_1 = \mathbf{n}_1 / n_{1x}$,可推导出

$$V_{B_1X} = (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_1) \frac{\mathbf{n}_1}{n_{1x}} = [\mathbf{n}'_1, \mathbf{R}_1 \times \mathbf{n}'_1] \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (14)$$

以上分析是对一个分支而言,对于 6 个支链,令 V_{BX} 为 6 个滑块在 X 方向上的速度矩阵,则有

$$V_{BX} = [\mathbf{J}] \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中 $V_{BX} = [V_{B_1X} \cdots V_{B_6X}]'_{6 \times 1}$;矩阵 \mathbf{J} 为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}'_1 & \mathbf{R}_1 \times \mathbf{n}'_1 \\ \mathbf{n}'_2 & \mathbf{R}_2 \times \mathbf{n}'_2 \\ \mathbf{n}'_3 & \mathbf{R}_3 \times \mathbf{n}'_3 \\ \mathbf{n}'_4 & \mathbf{R}_4 \times \mathbf{n}'_4 \\ \mathbf{n}'_5 & \mathbf{R}_5 \times \mathbf{n}'_5 \\ \mathbf{n}'_6 & \mathbf{R}_6 \times \mathbf{n}'_6 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (16)$$

3 基于拉格朗日方法的机构动力学

采用拉格朗日方法来推导动力学公式,即依据机械系统的能量来建立运动方程。系统拉格朗日方程为

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

系统建模简化策略:导轨上的滑块无简化;运动中的杆质心位于与上平台铰链连接处,与动速度和铰链速度相同;假定运动平台质心位于平台中心;假定其他体积构件(轴承、套筒等)的质量已经包含在以上相应的构件当中。

3.1 系统动能

机构动能由以下 3 部分构成:动平台动能 $\frac{1}{2} m_c v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega_c^2$; 杆动能 $\frac{1}{2} m_b v_{hi}^2$; 滑块动能 $\frac{1}{2} m_a v_{hi}^2$ 。其中 v_c, ω_c 为运动平台的速度和角速度; J_c 为动平台转动惯量; v_{hi} 为滑块的速度,可表示为 $v_{hi}^2 = J \begin{bmatrix} v_c \\ \omega_c \end{bmatrix}$ 。

系统总动能 K 为

$$K = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega_c^2 + \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} m_a v_{hi}^2 + \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} m_b v_{hi}^2 = \frac{1}{2} m_c (v_{cx}^2 + v_{cy}^2 + v_{cz}^2) + \frac{1}{2} J_c (\omega_{cx}^2 + \omega_{cy}^2 + \omega_{cz}^2) + Q \quad (18)$$

令 $Q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 (m_a + m_b) (J_{i1} v_{cx} + J_{i2} v_{cy} + J_{i3} v_{cz} + J_{i4} \omega_{cx} + J_{i5} \omega_{cy} + J_{i6} \omega_{cz})$

式中: J 为机构雅可比矩阵。

用动平台位置参数表示雅可比矩阵各元素为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{T_{ix} - d_i}{D_{ix} - T_{ix}} \\ \frac{T_{iz}}{D_{ix} - T_{ix}} \\ \frac{T_{ix} - d_i}{D_{ix} - T_{ix}} R_{iz} - \frac{T_{iz}}{D_{ix} - T_{ix}} R_{iy} \\ \frac{T_{iz}}{D_{ix} - T_{ix}} R_{ix} - R_{iz} \\ R_{iz} - \frac{T_{ix} - d_i}{D_{ix} - T_{ix}} R_{ix} \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中: T_{ix}, T_{iy}, T_{iz} 为各铰点坐标。 R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} 为运动平台中心坐标; P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} 为第 i 个铰点的坐标; D_{ix} 为导轨与杆交点坐标; d_i 为各导轨 Y 轴坐标。

式(19)为雅可比矩阵一个分量的各元素比例情况,而各分量之间的比例因子为 1,即雅可比矩阵的第一列都为 1。

3.2 系统位能

系统各元件位能表示为:动平台位能 $m_c gZ$;

单个杆 0; 单个滑块 0; 系统总势能 $P = m_c gZ$ 。

对以上关于并联机器人构件动能与位能的分析可以得出,若由滑块的位置和速度为变量表示系统的动能和位能,最终需要求解并联机器人的位置正解,而对于本文的并联机器人的正解无明确的解析关系。因此,通过求取运动平台的动能和位能,由运动平台的位置信息来表示滑块与连杆的位置,并由其表示系统的动能和位能,通过拉格朗日方法求取作用在运动平台上的广义力,再由虚功原理最终可求得作用在驱动端上的作用力。

3.3 基于虚功原理求解动力学方程

根据式(17),结合动能项与位能项,分别求取各偏导数项

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v_{cx}} &= m_c v_{cx} + (m_a + m_b) (J_{11}^2 + J_{21}^2 + \dots + J_{61}^2) v_{cx} \\ \frac{\partial L}{\partial X} &= \frac{\partial Q}{\partial X} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_{cx}} &= \end{aligned}$$

$m_c \dot{v}_{cx} + (m_a + m_b) (J_{11}^2 + J_{21}^2 + \dots + J_{61}^2) \dot{v}_{cx}$ 则有

$$F_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_{cx}} - \frac{\partial L}{\partial X} = m_c \dot{v}_{cx} + (m_a + m_b) (J_{11}^2 + J_{21}^2 + \dots + J_{61}^2) \dot{v}_{cx} - \frac{\partial Q}{\partial X} \quad (20)$$

依此类推,各分力或力矩都可以求得。

表达式 Q 的偏导数因其长度较长仅给出其隐式方式。以上为作用在运动平台上的广义力分力,也可以求广义合力 F

$$F = [F_x, F_y, F_z, T_x, T_y, T_z]' = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} \quad (21)$$

在以笛卡尔广义坐标 q 建立方程时,广义驱动力 F 为分别作用在 $X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma$ 各方向上的假定力或力矩。而实际机构是通过作用在滑块上的驱动力来获得运动的。根据虚功原理^[7-9],有 $F = J^T \tau$,其中 τ 为驱动关节力, J 为机器人的雅可比矩阵。机器人的 6 个驱动力为

$$[F_1, \dots, F_6]' = \tau = (J^T)^{-1} F \quad (22)$$

至此,已经完全求得 6-PRRS 并联机器人的动力学关系和逆动力学关系,即给定运动平台的位置、运动速度、运动加速度就可以准确地求得作

用在力输入端(滑块)的驱动力。

3.4 仿真算例

给出两个仿真算例:①运动平台 Z 轴坐标—200 mm 处,运动平台由 Y 向—150 mm 运动至+150 mm 处,初速度为零,加速度为 0.2 m/s^2 ,仿真时间为 1.732 s。② Z 轴坐标 200 mm 处,运动平台以初速度为零,加速度为 0.2 m/s^2 向 Z 轴正向移动,仿真时间为 1.414 s。目标为求取导轨上 6 处滑块的驱动力,仿真结果如图 4 和图 5 所示。

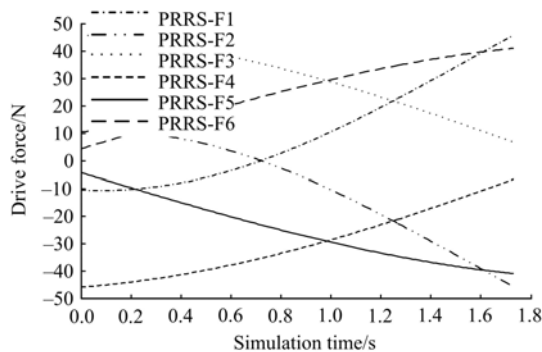


图 4 Lagrange 算法 Y 向运动结果

Fig. 4 Result of Y axis motion based on Lagrange method

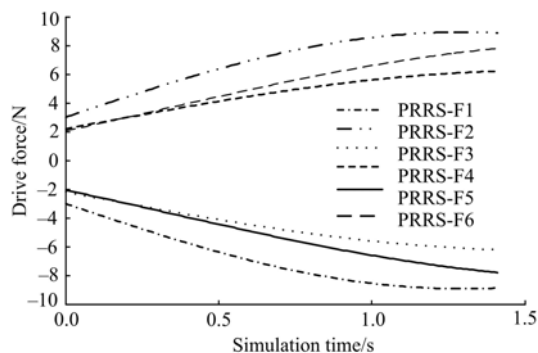


图 5 Lagrange 算法 Z 向运动结果

Fig. 5 Result of Z axis motion based on Lagrange method

4 结 论

(1) 指数积方法不仅可以求解 6-PRRS 并联机构主动关节位移,还可以求解相关的被动铰链位置情况,获得机构完全意义上的运动学逆解。

(2) 用速度投影方法求解 6-PRRS 并联机构雅可比矩阵是有效、易实现的方法,该方法可以应用于类似的并联机构。

(3) 采用 Lagrange 方法建立文中 6-PRRS 并联机器人的刚体动力学模型是适合的,因其可以以显示的方式表达预期的广义力,并最终利用虚功原理求得三维自然力。

参考文献:

[1] Liu Yu-bin, Gao Yong-sheng, Zhao Jie, et al. Singularity analysis of a 6-PRRS parallel robot based on geometrical method[C]//The Sixth World Congress on Intelligent Control and Automation, Dalian, 2006.

[2] 陈学生,陈在礼,孔民秀. 并联机器人研究的进展与现状[J]. 机器人, 2002, 24(5): 464-470.
Chen Xue-sheng, Chen Zai-li, Kong Min-xiu. Recent development and current status of Stewart platform research[J]. Robot, 2002, 24(5): 464-470.

[3] 刘敏杰,田涌涛,李从心. 并联机器人动力学的子结构 Kane 方法[J]. 上海交通大学学报, 2001, 35(7): 1032-1035.
Liu Min-jie, Tian Yong-tao, Li Cong-xin. Dynamics of parallel manipulator using sub-structure Kane method [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2001, 35 (7):1032-1035.

[4] 刘敏杰,李从心,刘海峰. 基于速度变换的 Stewart 平台机械手动力学分析[J]. 机械工程学报, 2000, 36(5):38-41.
Liu Min-jie, Li Cong-xin, Liu Hai-feng. Dynamics of Stewart platform manipulator using velocity transformation[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2000, 36(5):38-41.

[5] Codourey A, Burdet E. A body-oriented method for finding a linear form of the dynamic equation of fully parallel robots[C]// Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, New Mexico, 1997.

[6] Murray R M, Li Z X, Sastry S S. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation[M]. CRC Press, Inc, 1994.

[7] Tsai L W. Solving the inverse dynamics of a Stewart-Gough manipulator by the principle of virtual work[J]. ASME Journal of Mechanical Design,2000,122(1):3-9.

[8] 杨建新,汪劲松,郁鼎文. 空间并联机构运动学与动力学逆解的模块化计算方法[J]. 机械工程学报, 2005, 41(5):104-107.
Yang Jian-xin, Wang Jin-song, Yu Ding-wen. Modular computation method for inverse kinematics and dynamics of spatial parallel manipulator[J]. 2005, 41(5): 104-107.

[9] 陈丽. Stewart 平台 6-DOF 并联机器人完整动力学模型的建立[J]. 燕山大学学报, 2004, 28(3):228-232.
Chen Li. Wholly dynamic modeling of 6-DOF Stewart platform parallel robot[J]. Journal of Yanshan University, 2004, 28(3):228-232.