文章编号:1000-6893(2007)04-0881-05

三维正交机织复合材料单胞特征单元及其应用

邢誉峰[1], 田金梅[1,2]

(1. 北京航空航天大学 固体力学研究所, 北京 100083)

(2. 核工业第二研究设计院, 北京 100084)

Unit Cell Eigen-element of 3-D Orthogonal Woven Composites and Its Applications

XING Yu-feng[1], TIAN Jin-mei[1,2]

(1. The Solid Mechanics Research Center, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

(2. Beijing Institute of Nuclear Engineering, Beijing 100084, China)

摘 要: 基于三维正交机织复合材料,提出了一种特征单元均匀化分析方法。用"特征单元"来表示能够反映单胞的几何构造细节和材料构造细节的单元。首先用一般有限元方法对三维正交机织复合材料单胞进行分析得到总体刚度矩阵,利用该矩阵的特征向量建立了单胞的特征单元。通过比较特征单元的刚度矩阵元素和利用传统均匀化方法得到的刚度矩阵元素,说明了特征单元能够反应单胞的几何构造和材料构造细节。为了验证特征单元的有效性,分别用特征单元、传统均匀化方法和一般有限元方法计算了三维正交机织复合材料梁的固有频率,结果表明特征单元精度比传统均匀化方法高,而计算量比一般有限元方法大幅度降低。

关键词: 三维正交机织复合材料; 均匀化方法; 特征单元; 固有频率

中图分类号: V258 **文献标识码**: A

Abstract: As for 3-D orthogonal woven composite, a new homogenized eigen-element method is proposed in this paper. The term 'eigen-element' means that the element can depict the characteristics of geometry and material configurations. The global stiffness matrix of 3-D orthogonal woven composite unit cell is obtained using the ordinary finite element method with the eigenvectors of the global stiffness matrix and the eigen-element of the unit cell is constructed. After comparing the stiffness matrix elements of the eigen-element with those obtained by conventional homogenization method, it's shown that the eigen-element can depict the details of geometric and material configuration of the unit cell. In order to validate the eigen-element, the inherent frequencies of 3-D woven composite beam are computed by eigen-element method, conventional homogenization method and ordinary finite element method respectively, the results demonstrate that the eigen-element is more precise than the conventional homogenization method, and the amount of computational work reduce greatly comparing with the ordinary finite element method.

Key words: 3-D orthogonal woven composite; homogenized method; eigen-element; inherent frequency

由于三维纺织复合材料的交织方式复杂,直接对整个结构进行分析通常是不切实际的,也是不必要的。为了有效地分析纺织复合材料的力学性能,通常先用解析方法如经典叠层理论[1-2]和均匀化方法[3-4]或用有限元方法[5-7]等求出单胞的弹性性能,并把它们作为材料的宏观弹性常数,再把整个结构看做宏观均匀材料进行分析。由于对纺织复合材料进行宏观分析时无法考虑单胞的几何构造和材料构造细节,因此其刚度计算结果必然存在误差,而强度结果误差会更大。

针对上述问题,本文以三维正交机织复合材料为研究对象,用一般有限元方法对三维正交机织复合材料单胞进行分析得到单胞总体刚度矩阵。以能量原理为基础,利用该刚度矩阵的特征向量构造了三维正交机织复合材料单胞的特征单元。计算了特征单元的刚度矩阵和传统均匀化方法的单胞刚度矩阵,通过比较这些刚度矩阵元素,发现特征单元能够反应单胞的几何构造和材料构造细节。为了验证特征单元的有效性,分别用特征单元、传统均匀化方法和一般有限元方法计算了三维正交机织复合材料梁的固有频率,数值结果表明特征单元精度比传统均匀化方法高,而计算量比一般有限元方法大幅度降低。

1 特征单元

三维正交机织复合材料的典型单胞如图1所

收稿日期:2006-06-22; **修订日期**:2006-11-01
基金项目:国家自然科学基金(19932030)
通讯作者:邢誉峰 E-mail:xingyf@buaa.edu.cn

示，胞体的材料性能是不均匀的，按一般的有限元方法可以将单胞看做由 8 个 20 结点六面体单元构成，如图 2(a) 所示。这样，每个单元内只包含一种材料，即纤维或基体。每个单元有 20 ×3 个结点位移自由度，整个单胞共有 81 ×3 个结点位移自由度。

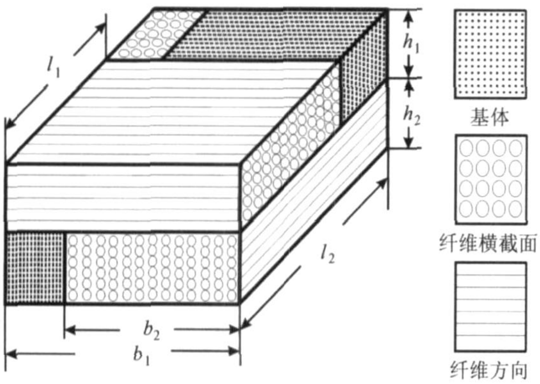


图 1　三维正交机织复合材料单胞

Fig. 1　3-D orthogonal woven composite unit cell

用一般有限元方法很容易得到单胞的 8 个单元的总体刚度矩阵 K，用 Λ 表示其特征值对角矩阵，用 Φ 表示其特征向量矩阵，并有如下关系成立

$$\mathrm{K}\Phi = \Phi\Lambda \tag{1}$$

$$\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{K}\Phi = \Lambda \tag{2}$$

$$\Phi^{\mathrm{T}}\Phi = \mathrm{I} \tag{3}$$

由于单胞总体刚阵 K 的特征向量构成一个完备的特征向量空间，因此单胞的任何一个结点位移向量 d 都可以用刚阵 K 的特征向量来表示，即

$$\mathrm{d} = \Phi\mathrm{q}, \quad 或 \quad \mathrm{q} = \Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{d} \tag{4}$$

式中：$\mathrm{q}^{\mathrm{T}} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots q_{243}]$ 为广义坐标列向量。

另一方面，可以把单胞看做一个具有 20 个结点的"特征单元"，如图 2(b) 所示，特征单元的含义将在下面介绍。图 2(b) 中实心圆为特征单元结点，空心圆表示在由一般有限单元合成特征单元的过程中被缩聚掉的结点。根据式(4) 有如下关系

$$\mathrm{N} = \Phi\mathrm{Q}, \quad 或 \quad \mathrm{Q} = \Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{N} \tag{5}$$

式中：N 为由 20 结点特征单元的位移形函数在各结点的数值构成的矩阵，其元素 N_{ij} 表示第 j 个位移形函数在结点 i 上的值；Q 为特征单元的 20 个形函数与矩阵 K 的特征向量之间的系数矩阵；Q_{kl} 为第 l 个形函数与第 k 个特征向量之间的系数。把特征单元的位移场写成为

$$\begin{bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{v} \\ \mathrm{w} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{20} N_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \tag{6}$$

式中：u，v 和 w 分别为特征单元 x，y 和 z 坐标方向的位移函数；u_i，v_i 和 w_i 为特征单元的结点位移参数；N_i 为结点位移形函数。因此单胞一般有限单元结点位移列向量 d 与特征单元的结点位移列向量 $\mathrm{d_G}$ 有如下关系

$$\mathrm{d} = \mathrm{N}\,\mathrm{d_G} \tag{7}$$

式中：

$$\mathrm{d_G^T} = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \cdots \quad u_{20} \quad v_{20} \quad w_{20}]。$$

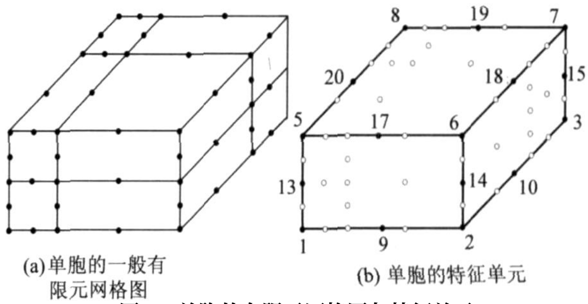


图 2　单胞的有限元网格图与特征单元

Fig. 2　The elements of FEM and eigen-element

根据矩阵 N 的性质，在特征单元的 20 个结点上有

$$d_i = d_{\mathrm{G}i}$$

对其他的结点有

$$d_i = \sum_{j=1}^{60} N_{ij}\, d_{\mathrm{G}j}$$

这说明单胞一般有限单元其他结点的位移可以由特征单元结点位移的加权平均得到。根据能量等效原理，单胞一般有限单元的应变能与特征单元的应变能应该相等，即

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathrm{d^T}\mathrm{K}\mathrm{d} = \frac{1}{2}\mathrm{d_G^T}\mathrm{N^T}\mathrm{K}\mathrm{N}\,\mathrm{d_G} = \frac{1}{2}\mathrm{d_G^T}\mathrm{K_G}\,\mathrm{d_G} \tag{8}$$

因此，20 结点特征单元的刚度矩阵可由下式计算

$$\mathrm{K_G} = \mathrm{N^T}\mathrm{K}\mathrm{N} = \mathrm{Q^T}\Lambda\mathrm{Q} \tag{9}$$

式中：矩阵 $\mathrm{K_G}$ 为单胞的特征单元的刚度矩阵。由于 $\mathrm{K_G}$ 不但反映了单胞的宏观弹性性能，而且反映了单胞的几何构造和材料构造特征，因此把与 $\mathrm{K_G}$ 对应的单胞单元称之为单胞特征单元。值得指出的是，$\mathrm{K_G}$ 是直接由矩阵 K 或根据其特征向量和特征值得到的，而不是直接通过数值积分得到的。在传统的均匀化方法中，如刚度平均化方法，其刚度矩阵是根据等效弹性张量 $\bar{\mathrm{C}}$ 和形函数计算得到的。

可以验证，特征单元是满足收敛性要求的，即：①若 $\mathrm{d_G}$ 代表刚体位移，则 $\Pi = 0$；②当 $\mathrm{d_G}$ 表示的是等应变状态时，Π 等于应变能；③在特征单元之间和单胞内部，位移都是连续的。

在实际计算中,所选择的特征向量个数依赖于求解问题的性质,一般来说,特征向量选择的愈多,其精度就愈高。如果选择全部特征向量,对于小规模问题,采用 $K_G = N^T KN$ 式和 $K_G = Q^T \Lambda Q$ 式的计算量差别不大;但对于大规模问题,采用 $K_G = N^T KN$ 式的计算量可以大幅度减小。若选择部分特征向量,则只能用 $K_G = Q^T \Lambda Q$ 式计算。

2　数值计算

(1) 单胞的刚度矩阵

对于图 1 所示的单胞,令 L, B 和 H 分别为单胞的长、宽和高。设基体为各向同性材料,纤维为横观各向同性材料,材料性能列于表 1 中。在计算中取单胞长、宽和高均为 1 mm。

表 1　基体及纤维束的弹性性能

Table 1　Elastic properties of fiber and matrix

树脂(Epoxy)		纤维(AS-4 碳纤维)				
E/ GPa	μ	E_1/ GPa	E_2/ GPa	G_{12}/ GPa	G_{23}/ GPa	μ_{12}
2.97	0.34	234.6	13.8	13.8	5.47	0.22

把单胞看做是一个 20 结点特征单元,根据在 x(结点 1-2 方向), y(结点 2-3 方向)和 z 3 个坐标方向的位移 u, v 和 w,可以把刚度矩阵 K_G 分成 9 个子阵,分别是 K_{uu}, K_{vv}, K_{ww}, K_{uv} 等。限于篇幅,这里只给出了 $b_2 = l_1 = 0.50B$ 的子阵 K_{vv} 对应 8 个顶点的元素,同时给出了用传统均匀化方法得到的刚度矩阵子阵 K_{vv}^{UNI},参见表 2。

表 2　刚度矩阵比较

Table 2　Comparison of stiffness matrices of two methods

$K_{vv1\text{-}8}$

$$\begin{bmatrix} 8.97 & 9.92 & 8.54 & 5.00 & 4.72 & 4.91 & 0.94 & 1.72 \\ & 34.6 & 24.1 & 8.81 & 4.53 & 10.0 & 8.55 & 2.31 \\ & & 34.6 & 10.0 & 2.31 & 8.81 & 9.92 & 4.53 \\ & & & 10.8 & 1.98 & 1.35 & 4.90 & 5.26 \\ & & & & 7.29 & 5.26 & 1.72 & 2.82 \\ & & & & & 10.8 & 5.00 & 1.98 \\ & & & & & & 8.97 & 4.72 \\ & & & & & & & 7.29 \end{bmatrix}$$

$K_{vv1\text{-}8}^{UNI}$

$$\begin{bmatrix} 15.41 & 7.48 & 5.27 & 9.24 & 7.49 & 4.72 & 1.73 & 5.27 \\ & 15.4 & 9.24 & 5.27 & 4.72 & 7.49 & 5.27 & 1.73 \\ & & 15.4 & 7.49 & 1.73 & 5.27 & 7.49 & 4.72 \\ & & & 15.4 & 5.27 & 1.73 & 4.72 & 7.49 \\ & & & & 15.4 & 7.49 & 5.27 & 9.24 \\ & & & & & 15.4 & 9.24 & 5.27 \\ & & & & & & 15.4 & 7.49 \\ & & & & & & & 15.4 \end{bmatrix}$$

表中:数字 1～8 表示对应 8 个顶点,这里的传统均匀化方法指刚度平均化方法,其材料弹性矩阵

$$\overline{C} = \frac{1}{V}\int_V C\mathrm{d}v = \sum v_{(k)} C_{(k)}$$

显然, K_{vv}^{UNI} 的对角线元素是相同的,而 K_{vv} 的对角线元素是不同的。在特征单元中,结点 2 和结点 3 均位于纤维处,且纤维的主方向沿 y 方向,而其余结点位于基体处或虽然位于纤维处但纤维的主方向沿 x 或 z 方向,所以这两个结点的对角线元素大于其余结点的对角线元素。分析 K_G 的其他子阵的元素也可以发现类似的现象,因此特征单元刚度矩阵可以反映出单胞的几何构造和材料构造细节。

表 3 给出了 b_2 和 l_1 变化时 4 种单胞 3 个方向的刚度矩阵对角线元素,其中 UNI 是由传统均匀化方法得到的刚度矩阵对角线元素, AVE 是由特征单元中各结点对角线元素平均得到。由表 3 中数据可以看出二者的值接近。对于 $b_2 = l_1 = 0.50B$ 的单胞,二者的值完全相同。这就说明传统均匀化方法的刚度矩阵对角线元素近似等于特征单元刚度矩阵对角线元素的平均值,这不但说明特征单元不但可以反映单胞的宏观特性,还可以说明特征单元方法也是一种均匀化方法。

表 3　两种方法刚度矩阵对角线元素值比较(kN/ mm)

Table 3　Comparison of diagonal elements of the two stiffness matrices

单　胞	方　法	$K_{uu1\text{-}8}$	$K_{vv1\text{-}8}$	$K_{ww1\text{-}8}$
$b_2 = l_1 = 0.25B$	UNI	10.519	10.519	28.724
	AVE	11.344	11.344	26.029
$b_2 = l_1 = 0.50B$	UNI	15.406	15.406	15.406
	AVE	15.406	15.406	15.406
$b_2 = 2l_1 = 0.50B$	UNI	10.205	15.406	20.608
	AVE	11.174	15.406	19.639
$b_2 = l_1 = 0.75B$	UNI	20.922	20.922	7.919
	AVE	19.808	19.808	9.100

(2) 梁的固有振动频率

为了进一步验证特征单元的有效性,考虑由单胞组成长高比为 10 的自由梁,长度方向(x 方向)取 20 个单胞长度,另外两个方向分别取 2 个单胞长度。先根据一般有限元方法对每个单胞按材料不同划分为 8 个 20 结点六面体单元,共得到 $80 \times 8 = 640$ 个单元,再将每个单胞合成为一个特征单元,共得到 80 个特征单元。下面用 80 个特征单元和 80 个均匀化单元分别计算了梁的固有频率。为了便于比较,还用 NASTRAN 有限元程序对 640 个单元模型进行了计算。单胞尺寸和材

料属性如上文,基体密度为 1.24 g/cm^3,纤维密度为 1.74 g/cm^3。

计算中质量矩阵采用集中质量矩阵和一致质量矩阵两种处理方法。用一致质量矩阵时,特征单元的质量矩阵按照刚度矩阵的合成方法得到,传统均匀化方法的质量密度为纤维和基体的平均密度。用两种质量矩阵计算的两种不同单胞的频率结果分别如图 3 和图 4 所示。图中 PRESENT 表示特征单元方法,UNI 表示传统均匀化方法,FEM 表示作者编写的一般有限元方法,方法名称后的数字表示所划分的单元个数。

图 3 中 $\bar{\omega} = \omega\sqrt{M}$, M 为梁的质量,单位为 kg;图 4 中 $\bar{\omega} = 10^{-3}\omega$, ω为实际频率。由图 3 可知,特征单元方法与一般有限元方法的结果非常一致,图 4 中特征单元模型的结果位于一般有限元方法和传统均匀化方法之间,但更接近一般有限元方法的结果。而特征单元模型的单元规模只有一般有限元方法的 1/8,这说明特征单元在能够反映单胞几何和材料构造细节的前提下,大幅度减小了计算量。传统均匀化方法虽然减少了单元规模,结果的准确性却有所降低,尤其是较高阶的频率。

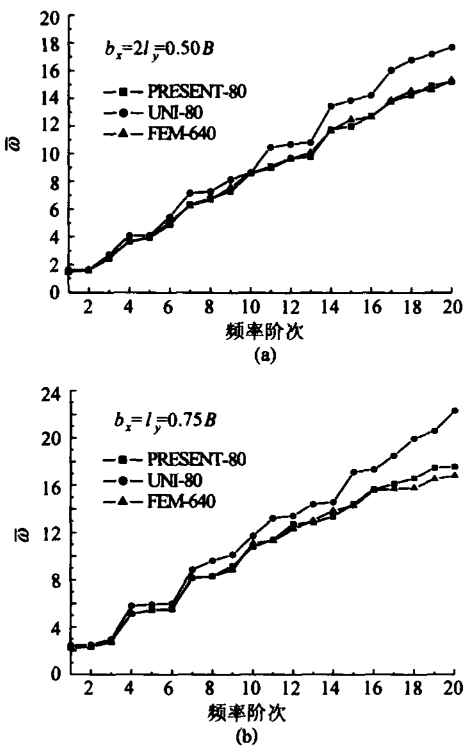
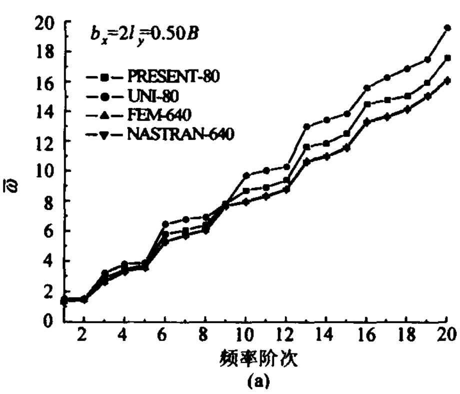


图 3 梁的前 20 阶频率(集中质量矩阵)

Fig. 3 The first 20 frequencies(lumped mass)



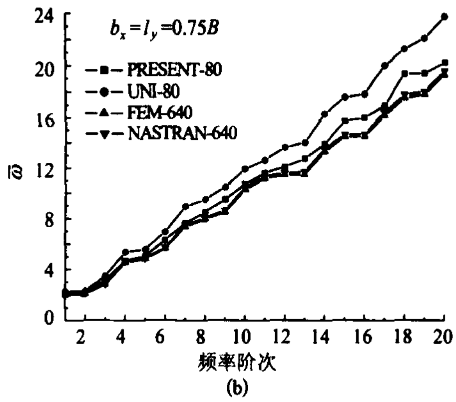


图 4 梁的前 20 阶固有频率(一致质量矩阵)

Fig. 4 The first 20 frequencies(consistent mass)

3 结束语

把一个单胞看成为一个特征单元,根据能量等效原理,用单胞一般有限单元总体刚度矩阵的特征向量和特征值构造了三维正交机织复合材料单胞的特征单元的刚度矩阵。从特征单元刚度矩阵元素的分析可以看出,特征单元能够反映单胞的几何构造和材料构造细节。

以三维正交机织复合材料单胞组成的梁为例,采用两种质量矩阵计算了其固有频率,结果表明特征单元的精度比传统均匀化方法高,计算量比一般有限元方法小。

值得指出的是,虽然本文借助三维正交机织复合材料构造了特性单元,事实上同样可以构造交织方式复杂的其他类型纺织复合材料的特征单元,如三维四步编织复合材料,还可以构造一维和二维特征单元。特征单元来自于一般有限单元,它与普通单元具有相同的适用性。况且特征单元大幅度减小了计算量并且能够保证计算精度,因此用特征单元可以更有效地分析结构的强度等其他力学性能,有关结果将在另外论文中给出。

参 考 文 献

[1] Yang J M, Ma C L, Chou T W. Fiber inclination model of three-dimensional textile structural composites[J]. Journal

of Composite Materials, 1986, 20(5): 472-483.

[2] Ishikawa T, Chou T W. Elastic behavior of woven hybrid composites[J]. Journal of Composite Materials, 1982, 16(1): 2-19.

[3] Li W, Hammad M, El-Shiekh A. Structural analysis of 3-D braided perform for composites, Part I: the four-step performs[J]. Journal of Textile Institute, 1990, 81(4): 491-514.

[4] Cheng Z R, Zhu D C, Meng L, et al. A homogenization scheme and its application to evaluation of elastic properties of three-dimensional braided composites[J]. Composites: Part B, 2001, 32(1): 67-86.

[5] 庞宝君,曾涛,杜善义. 三维多向机织复合材料有效弹性模量的细观计算力学分析[J]. 计算力学学报, 2001, 18(2): 231-234.
Pang B J, Zeng T, Du S Y. Meso-scopic computing mechanics analysis of three-dimensional multi-directional braided composites[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2001, 18(2): 231-234. (in Chinese)

[6] Zeng T, Wu L Z, Guo L C. A finite element model for failure analysis of 3D braided composites[J]. Materials Science and Engineering, 2004, A366: 144-151.

[7] Chen L, Tao X M, Choy C L. Mechanical analysis of 3-D braided composites by the finite multiphase element method[J]. Composites Science and Technology, 1999, 59(16): 2383-2391.

作者简介:

邢誉峰(1964 -)　男,博士,教授,博士生导师。主要研究方向:结构动力学、复合材料结构力学方法和固体力学计算方法等。
E-mail: xingyf@buaa.edu.cn

田金梅(1976 -)　女,博士。主要研究方向:结构动力学。
E-mail: jmtian_2000@sohu.com

(责任编辑:李铁柏)