

文章编号: 1001-4322(2006)04-0615-03

# 负媒质模型的时域有限差分法分析\*

林 振, 梁昌洪

(西安电子科技大学 天线与微波技术国家重点实验室, 西安 710071)

摘 要: 负折射率媒质是一种人造媒质, 在某一微波波段内其介电常数和磁导率同时为负值。对 TE 模电磁场满足的麦克斯韦方程组进行数值处理, 解决了直接利用时域有限差分方法在 Yee's 网格下计算负折射率媒质内部场分布时的数值发散问题。通过数值算例, 验证了方法的可行性, 模拟了负折射率媒质内部及周围的电磁场分布。

关键词: 负折射率媒质; TE 模; 时域有限差分(FDTD)方法

中图分类号: TN011 文献标识码: A

近年来, 左手性媒质的研究正在成为科学研究的热点之一。电磁学中, 介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  是描述均匀媒质中电磁场性质最基本的两个物理量。对于自然界所有已知的材料而言, 介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  都是非负的常数。由麦克斯韦方程组可知, 在  $\epsilon$  和  $\mu$  都为正值的物质中, 电场、磁场和波矢三者构成右手关系, 我们称这样的物质为右手性媒质(right handed materials, RHM)。1968 年, 苏联物理学家 V. G. Veselago<sup>[1]</sup> 提出左手性媒质(left handed medium, LHM)的物理思想, 该理论认为平面电磁波在一个同时具有负介电常数和负磁导率的媒质中传播时, 将射向与 Snell 定律不同的方向, 即发生了微波异常传播的现象。此外该媒质的折射率  $n$  取负数, 即当媒质同时具有  $\epsilon_r < 0, \mu_r < 0$  时, 媒质的折射率为  $n = -\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ 。直到 1999 年, Pendry 等人预言利用某种特定的人造复合材料结合金属线阵列可以制作出在某一频率区间满足介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  同时为负的物质, 即左手性媒质或负媒质<sup>[2-3]</sup>。

能用计算机模拟出负媒质奇特的传播特性, 将大大有利于人们对它的理解和研究工作。时域有限差分法(FDTD)没有对计算区域中反射系数的正负以及波的传播方向做任何假设, 因此用作计算负媒质的传播特性非常实用。但是, 直接简单的在传统 FDTD 计算式中设负媒质区域的介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  为负数, 将会导致计算的不稳定, 数值出现发散现象<sup>[4]</sup>。本文对传统的 FDTD 计算公式进行相应的数值处理, 解决了数值计算中的不稳定性, 模拟出负媒质区域 TE 模电磁场的分布情况。

## 1 负媒质中电磁场的 FDTD 计算式

由于在利用 FDTD 方法数值计算负媒质区域电磁场传播时, 在材料边界处应该满足匹配条件。对于 TE 模式的电磁波, 其满足的麦克斯韦方程为

$$\begin{cases} \epsilon \partial E_x / \partial t = \partial H_z / \partial y - J_x, & J_x = \sigma E_x \\ \epsilon \partial E_y / \partial t = -\partial H_z / \partial x - J_y, & J_y = \sigma E_y \\ \mu \partial H_z / \partial t = \partial E_x / \partial y - \partial E_y / \partial x - K_z, & K_z = \sigma_m H_z \end{cases} \quad (1)$$

采用 Yee's 的标准网格, 在媒质分界面上, 场分量计算中需要分别取边界两边媒质的介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  的平均值作为该点的介电常数和磁导率。以  $E_x$  分量为例, 在无电流源情况下为

$$E_{i+1/2, j}^{n+1} = E_{i+1/2, j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y \epsilon_{av}} (H_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - H_{i+1/2, j-1/2}^{n+1/2}) \quad (2)$$

式中: 上标  $n$  为时间步; 下标  $i, j$  为空间  $x, y$  方向坐标;  $\epsilon_{av}$  为媒质界面两边介电常数  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  的平均值。这样, 当分界面有一边为负媒质, 且满足  $\mu_1 = -\mu_2, \epsilon_1 = -\epsilon_2$  时, 将会导致界面上的  $\epsilon_{av}$  为 0, 使得计算数值发散。对于  $E_y$  和  $H_z$  有同样的结果。即使  $\epsilon_{av}$  不为 0 (如  $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = -1$  则  $\epsilon_{av} = 1/2$ ), 利用 Yee's 网格 FDTD 公式直接设负媒质区域介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  为负数, 仍然会出现数值发散现象。为了避免这样的数值发散, 采用 2DTLM<sup>[5-6]</sup>

\* 收稿日期: 2005-08-09; 修订日期: 2005-12-14

作者简介: 林 振(1979—), 男, 博士生, 主要从事新型电子材料, 电磁场数值计算的研究工作; linzhen@people.com.cn。

方法,间接地来设置负媒质区域的介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  为负。

根据金属丝 2 维阵列的介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  与频率的近似关系,可以得到

$$\epsilon = \epsilon_0(1 - \omega_{ep}^2/\omega^2), \quad \mu = \mu_0(1 - \omega_{ep}^2/\omega^2) \quad (3)$$

式中:  $\omega_{ep}$  为中性电离层频率,与金属丝 2 维阵列的几何参数有关。对于负媒质区域的介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$ , 只需设  $\omega_{ep}$  与  $\omega$  满足一定的数值关系。如要求  $\epsilon_r = -1, \mu_r = -1$ , 则令  $\omega_{ep} = \sqrt{2}\omega$  即可。

把式(3)代入 TE 模式下频域的麦克斯韦方程式,可得

$$\begin{cases} \epsilon_0 j\omega E_x + J'_x = \partial H_z / \partial y, & J'_x = -j\epsilon_0 \omega_{ep}^2 E_x / \omega \\ \epsilon_0 j\omega E_y + J'_y = -\partial H_z / \partial x, & J'_y = -j\epsilon_0 \omega_{ep}^2 E_y / \omega \\ \mu_0 j\omega H_z + K'_z = \partial E_x / \partial y - \partial E_y / \partial x, & K'_z = -j\mu_0 \omega_{ep}^2 H_z / \omega \end{cases} \quad (4)$$

转换到时域,可以得到

$$\begin{cases} \epsilon_0 \partial E_x / \partial t + J'_x = \partial H_z / \partial y, & \partial J'_x / \partial t = \epsilon_0 \omega_{ep}^2 E_x \\ \epsilon_0 \partial E_y / \partial t + J'_y = -\partial H_z / \partial x, & \partial J'_y / \partial t = \epsilon_0 \omega_{ep}^2 E_y \\ \mu_0 \partial H_z / \partial t + K'_z = \partial E_x / \partial y - \partial E_y / \partial x, & \partial K'_z / \partial t = \mu_0 \omega_{ep}^2 H_z \end{cases} \quad (5)$$

经过处理,避免了直接设置负媒质区域介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  时所造成的数值发散。将式(5)在时域利用差分离散化后,在每个时间步更新  $J'_x, J'_y, K'_z$  的数值,就可以利用 Yee's 网格直接计算电磁场值,得到稳定的场分布。

## 2 数值分析

采用以上分析方法,数值模拟负媒质模型区域内部及其周围的电磁场分布如图 1 所示。在 S 点加入频率为  $\omega_0$  的波源,其距离负媒质块  $d_0$ ,负媒质块宽  $d_1$ ,且  $\epsilon_r = -1, \mu_r = -1$ 。I 点为波源通过负媒质块的像点,距离负媒质块  $d_2 = d_1 - d_0$ 。

计算区域四周采用完全匹配层吸收边界,结合本文推导的 TE 模式下 FDTD 的计算式,模拟计算出 TE 模电磁场的分布。整个计算域为边长 0.1 m 的正方形。计算空间步长为  $\Delta x = \Delta y = 0.25$  mm,时间步长为  $\Delta t = \Delta x / 2C$ 。几何参数  $d_0 = 0.01$  m ( $40\Delta x$ ),  $d_1 = 0.02$  m ( $80\Delta x$ ),  $d_2 = 0.01$  m ( $40\Delta x$ )。S 处的激励源为  $H_z(t) = (1 - e^{-\alpha}) \sin \omega_0 t$ , 其中  $\omega_0 = \omega_{ep} / \sqrt{2}, \alpha = -\omega_0 \ln(0.01) / (10\pi), \omega_{ep} = 2\pi \times 28.7 \times 10^9$ 。负媒质区域折射率为  $n = -\sqrt{\epsilon_r \mu_r} = -1$ 。

## 3 数值计算结果

图 2 为磁场  $H_z$  在 2 400 时间步时刻的空间分布。图 3 为整个计算区域内,电场幅度值的空间分布。图 4 为在  $y = 0.05$  m,沿  $x$  方向电场幅度值曲线。图 5 为在  $x = 0.07$  m,沿  $y$  方向电场幅度值曲线。由图可见,数

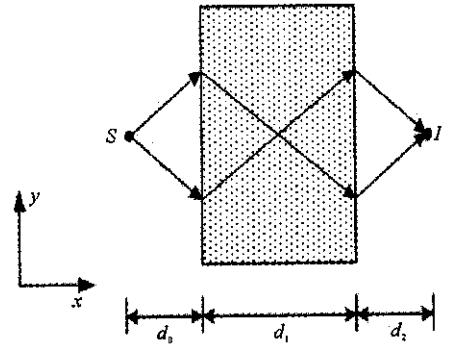


Fig. 1 Calculating domain of negative materials

图 1 负媒质计算空间区域

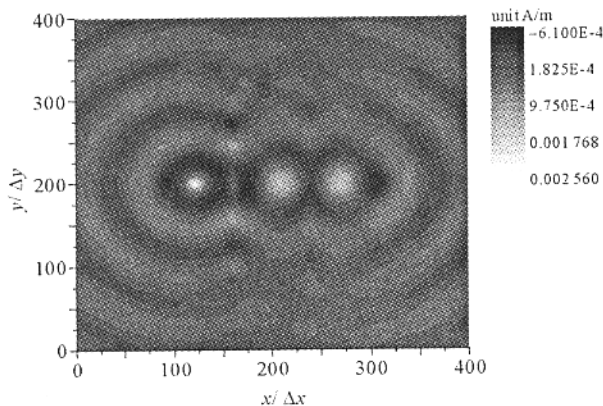


Fig. 2 Distribution of  $H_z$  at 2 400 time-steps

图 2 磁场  $H_z$  在 2 400 时间步时刻的空间分布

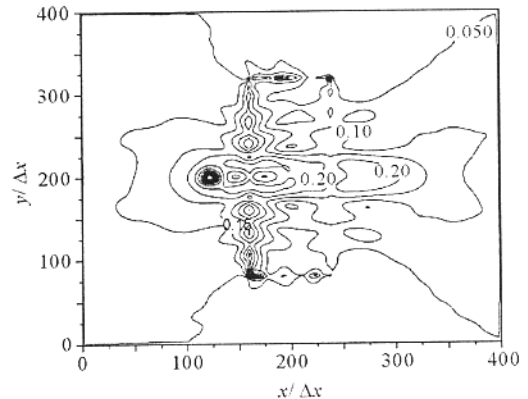
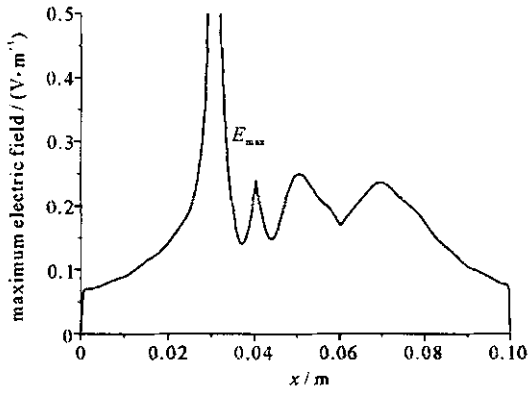
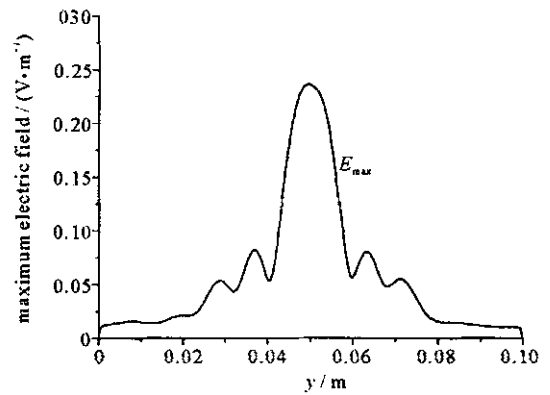


Fig. 3 Amplitude distribution of electric field of

TE mode in calculating domain

图 3 TE 模式负媒质区域电场幅值分布

Fig. 4 Amplitude of electric field along  $x$  direction at  $y=0.05$  m图 4 沿  $x$  方向  $y=0.05$  m 的电场幅值曲线Fig. 5 Amplitude of electric field along  $y$  direction at  $x=0.07$  m图 5 沿  $y$  方向  $x=0.07$  m 的电场幅值曲线

值计算没有出现发散。 $S=[120, 200]$ 点处的波源在负媒质的右侧确实产生了二次聚焦的像点。在像点  $I=[280, 200]$ 处电场能量远大于周围的能量。

## 4 总 结

本文对 TE 模式下电磁场满足的麦克斯韦方程组进行数值处理,解决了直接利用 FDTD 方法在 Yee's 网格下计算负媒质内部场分布时的数值发散问题。通过数值算例,验证了方法的可行性,模拟出负媒质内部以及周围的电磁场分布,对于负媒质的理解和研究提供参考。

## 参考文献:

- [1] Veselago V G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ [J]. *Sov Phys Usp*, 1968, **10**(4):509-514.
- [2] Pendry J B, Holden A J, Stewart W J, et al. Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures[J]. *Phys Rev Lett*, 1996, **76**(23):4773-4776.
- [3] Pendry J B, Holden A J, Robbins D J, et al. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena[J]. *IEEE Trans Microw Theory Tech*, 1999, **47**(11):2075-2084.
- [4] Correia D, Jin J M. Theoretical analysis of left-handed metamaterials using FDTD-PML method[C]//Proceedings SBMO/IEEE MTT-S IMOC, 2003:1033-1036.
- [5] Ziolkowski R W, Heyman E. Wave propagation in media having negative permittivity and permeability[J]. *Phys Rev E*, 2001, **64**:056825.
- [6] Ziolkowski R W. Superluminal transmission of information through an electromagnetic metamaterial[J]. *Phys Rev E*, 2001, **63**:046604.

## Time-domain analysis of negative refractive index materials by FDTD method

LIN Zhen, LIANG Chang-hong

(National Laboratory of Antenna and Microwave Technology, Xidian University, Xian 710071, China)

**Abstract:** Negative refractive index materials are artificial materials with permittivity and permeability both negative within certain microwave frequency band. FDTD method is used to simulate the distribution of electromagnetic field inside and around the negative refractive index materials by the treated Maxwell's equations for TE mode. Unstable situation during calculation is avoided. Numerical experiment results of the distribution of electromagnetic fields in the area are given.

**Key words:** Negative refractive index materials; TE mode; FDTD method