第 17 卷 第 6 期 强 激 光 与 粒 子 束 Vol. 17, No. 6
2005 年 6 月 HIGH POWER LASER AND PARTICLE BEAMS Jun., 2005

文章编号: 1001-4322(2005)06-0817-04

平顶光束 K参数的解析传输方程*

康小平[1,2], 吕百达[1]

(1. 四川大学 激光物理与化学研究所, 四川 成都 610064; 2. 琼州大学 物理系, 海南 五指山 572200)

摘 要: 从 Li 提出的平顶光束模型和 Collins 公式出发,推导出平顶光束通过近轴 ABCD 光学系统 K 参数的解析传输公式。平顶光束的 K 参数与光束阶数 M、瑞利长度 z_R 和传输矩阵元 A/B 有关。另一方面,基于强度矩的传输方程,通过繁冗的积分,也推导出 K 参数的解析传输方程。大量数值计算结果证明二者所得结果相同。对平顶光束 K 参数的传输特性用数值计算例作了说明。

关键词: 激光光学; 平顶光束; K 参数; 传输方程; 强度矩; Collins 公式

中图分类号: O435 **文献标识码:** A

在高功率激光的实际应用中,常需要光强分布均匀平顶的光束,对这类平顶光束的特性已进行了许多研究[1]。文献中常采用超高斯光束[2]和平顶高斯光束[3]等多种数学-物理模型来描述平顶光束。最近,Li 提出了一种新的平顶光束模型[4],即将平顶光束视为具有不同束宽的基模高斯光束的相干叠加,因此,其行为可利用熟知的基模高斯光束的传输规律进行研究。另一方面,除光束传输因子(M^2 因子)外,K 参数是描述光束的平整度或陡峭度的重要物理量,用光强的四阶矩和二阶矩定义[5,6]。文献[7~9]中对高斯光束、平顶高斯光束和复宗量厄米-高斯光束的 K 参数作了研究。文献[10]将 K 参数推广用于描述有硬边光阑限制光束光强分布的陡峭度。但是,对 Li 提出的平顶光束的 K 参数尚未见有关文献报道。本文基于 Collins 公式和强度矩定义,利用平顶光束通过 ABCD 光学系统的传输方程,得到平顶光束 K 参数的解析传输公式,并且给出了详细的数值计算例。而高斯光束的 K 参数可作为特例给出。

1 平顶光束通过 ABCD 光学系统 K参数的解析传输公式

按 Li 提出的模型[4],在直角坐标系中,2 维平顶光束在入射参考面 $z=0$ 处沿 x 方向的场分布为

$$E(x,0) = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \exp\left(-m\beta \frac{x^2}{w_0^2}\right) \tag{1}$$

式中:M 为平顶光束的阶数;w_0 对应 $M=1$ 时的高斯光束束腰宽度;m 和 β 分别为

$$\alpha_m = (-1)^{m+1} \frac{M(M-1)\cdots(M-m+1)}{m!} \tag{2}$$

$$\beta = \sum_{m=1}^{M} \frac{\alpha_m}{m} \tag{3}$$

将(1)式代入 Collins 公式[11],经积分计算,得到平顶光束通过近轴 ABCD 光学系统的传输公式为

$$E(x,z) = \sqrt{\frac{\pi i}{\lambda B}} \exp\left(-\frac{ikD}{2B}x^2\right) \sum_{m=1}^{M} \left\{ \alpha_m \Big/ \sqrt{\frac{m\beta}{w_0^2} + \frac{ikA}{2B}} \exp\left\{ (kx/B)^2 \Big/ \left[4\left(\frac{m\beta}{w_0^2} + \frac{ikA}{2B}\right)\right]\right\}\right\} \tag{4}$$

式中:k 为波数,与波长 λ 的关系为 $k=2\pi/\lambda$;A, B, C, D 表示 ABCD 光学系统的变换矩阵元素。

光束的 K 参数定义为[6]

$$K = \langle x^4 \rangle / \langle x^2 \rangle^2 \tag{5}$$

式中:$\langle x^4 \rangle$和$\langle x^2 \rangle$分别是光强的二阶矩和四阶矩,即

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{P}\int_{-\infty}^{\infty} x^n |E(x,z)|^2 \mathrm{d}x, \qquad n = 2,4 \tag{6}$$

其中

* 收稿日期:2004-07-14; 修订日期:2005-03-08

基金项目:国家 863 计划项目资助课题

作者简介:康小平(1964—),女,博士,副教授,主要从事激光传输与变换的研究;E-mail:xpk710@126.com。

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |E(x,z)|^2 \mathrm{d}x \tag{7}$$

为总功率。

把(4)式代入(6)式,经积分计算,得到光强的二阶矩和四阶矩分别为

$$\langle x^2 \rangle = \left(\frac{B\lambda}{\pi}\right)^2 \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n H_{mn} [(m+n)\beta]^{-3/2} \Big/ \left\{ 2 w_0^2 \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n [(m+n)\beta]^{-1/2} \right\} \tag{8}$$

$$\langle x^4 \rangle = 3\left(\frac{B\lambda}{\pi}\right)^4 \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n H_{mn}^2 [(m+n)\beta]^{-5/2} \Big/ \left\{ 4 w_0^2 \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n [(m+n)\beta]^{-1/2} \right\} \tag{9}$$

式中:

$$H_{mn} = mn\beta^2 + (z_R A/B)^2 + \mathrm{i}\beta(n-m) z_R A/B \tag{10}$$

其中 $z_R = k w_0^2/2$ 为瑞利长度。

把光强的二阶矩和四阶矩代入(5)式,得到平顶光束 K 参数的传输公式为

$$K = 3\left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n (m+n)^{-1/2}\right]\left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n H_{mn}^2 (m+n)^{-5/2}\right] \Big/ \left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n H_{mn} (m+n)^{-3/2}\right]^2 \tag{11}$$

(11)式表明,平顶光束的 K 参数与光束阶数 M、瑞利长度 z_R 和 A/B 有关。由(11)式可推知,当同一平顶光束通过两个 $A_iB_iC_iD_i$ $(i=1,2)$ 光学系统传输时,如果在两个面上有 $A_1/B_1 = A_2/B_2$,即菲涅尔数 $F_1 = F_2$ $(F_i = A_i w_0^2/\lambda B_i)$,则具有相同的 K 参数。(11)式的特例为:

(1) 当 $B=0$(即在 $z=0$ 的面上或满足像传递条件的面上)时,(11)式简化为

$$K = 3\left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n (m+n)^{-1/2}\right]\left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n (m+n)^{-5/2}\right] \Big/ \left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n (m+n)^{-3/2}\right]^2 \tag{12}$$

(2) 当 $A/B \to 0$(远场)时,(11)式简化为

$$K = 3\left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n (m+n)^{-1/2}\right]\left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n m^2 n^2 (m+n)^{-5/2}\right] \Big/ \left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n m n (m+n)^{-3/2}\right]^2 \tag{13}$$

(3) 当 $M=1$ 时,对应基模高斯光束,(11)式简化为

$$K = 3 \tag{14}$$

(14)式与文献[7]的结果一致。

另一方面,光束 K 参数的传输方程可用强度矩的传输方程表示为[5]

$$K = \left[\langle (Ax_0 + Bu_0)^4 \rangle + 3A^2B^2/k^2\right] \Big/ \langle (Ax_0 + Bu_0)^2 \rangle^2 \tag{15}$$

式中:x_0, u_0 分别表示在入射面 $z=0$ 处空域和空间频率域中的变量。

$m+n$ 阶强度矩定义为

$$\langle x_0^m u_0^n \rangle = \frac{1}{2P(\mathrm{i}k)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x_0^m E(x_0) \frac{\partial^n}{\partial x_0^n} E^*(x_0) \mathrm{d}x_0 + c.c \tag{16}$$

由(16)式得

$$\langle x_0 u_0 \rangle = 0 \tag{17}$$

$$\langle x_0^3 u_0 \rangle = 0 \tag{18}$$

$$\langle x_0 u_0^3 \rangle = 0 \tag{19}$$

把(17)～(19)式代入(15)式,得

$$K = \left[\langle x_0^4 \rangle + 3(A/B)^{-2}(2\langle x_0^2 u_0^2 \rangle + 1/k^2) + (A/B)^{-4}\langle u_0^4 \rangle\right] / \left[\langle x_0^2 \rangle + (A/B)^{-2}\langle u_0^2 \rangle\right]^2 \tag{20}$$

式中:$\langle x_0^2 \rangle$,$\langle u_0^2 \rangle$,$\langle x_0^2 u_0^2 \rangle$,$\langle x_0^4 \rangle$和$\langle u_0^4 \rangle$分别由(1)式、(16)式经繁冗的积分得到,表示为

$$\langle x_0^2 \rangle = (w_0^2/2) \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \frac{\alpha_m \alpha_n}{\beta} (m+n)^{-3/2} \Big/ \left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n (m+n)^{-1/2}\right] \tag{21}$$

$$\langle u_0^2 \rangle = [2/(k^2 w_0^2)] \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n m n \beta (m+n)^{-3/2} \Big/ \left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n (m+n)^{-1/2}\right] \tag{22}$$

$$\langle x_0^2 u_0^2 \rangle = (1/k^2) \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n n (m-2n)(m+n)^{-5/2} \Big/ \left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n (m+n)^{-1/2}\right] \tag{23}$$

$$\langle x_0^4\rangle = (3w_0^4/4)\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}\frac{\alpha_m\alpha_n}{\beta^2}(m+n)^{-5/2}\Big/\Big[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}\alpha_m\alpha_n(m+n)^{-1/2}\Big] \tag{24}$$

$$\langle u_0^4\rangle = [12/(k^4w_0^4)]\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}\alpha_m\alpha_n(mn\beta)^2(m+n)^{-5/2}\Big/\Big[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}\alpha_m\alpha_n(m+n)^{-1/2}\Big] \tag{25}$$

(20)式与(11)式虽然在数学形式上不同,大量数值计算结果证明二者所得结果相同,这与文献中结论一致[9]。但(11)式表示更简单,计算同一结果用(11)式计算所用的机时要少。此外,在(11)式的推导中避免了多个强度矩的复杂计算,数学推导也较为简单。

2　数值计算和分析

利用(11)式所作的典型数值计算例总结于图 1～3。计算中所用参数为:$\lambda=1.06\ \mu m$, $w_0=1$ mm。图 1 为平顶光束在自由空间传输时, K 参数随光束阶数 M 的变化。从图 1(a)可以看出,当传输距离较小(例如 $z/z_R=0.19, 0.21, 0.25$)时,随着阶数 M 的增大, K 值开始减小,达到一个极小值后又逐渐增大;图 1(b)表明,当传输距离较大(例如 $z/z_R=0.64, 1.06, 2.12$)时, K 参数随着阶数 M 的增大而增大,即高阶平顶光束在传输过程中轮廓会变得更陡峭。

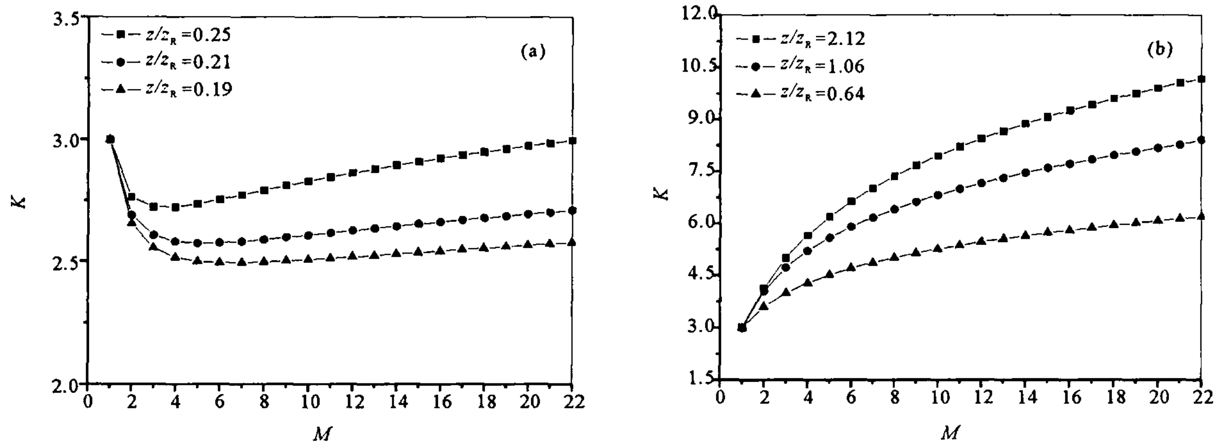

Fig. 1　Propagation of the K parameter of flat-topped beams in free space for different values of the beam order M

图 1　平顶光束的 K 参数在自由空间传输时随光束阶数 M 的变化

图 2 为 $M=1, 2, 4, 6, 8$ 时,平顶光束的 K 参数随归一化传输距离 z/z_R 的变化。由图 2 可知,当 $M=2$ 时,有一极小值位于 $z=0$ 面处,随着传输距离的增大,达到一个极大值后又逐渐减小,最后趋于(14)式得到的渐近值 K_∞。例如,当 $M=2$ 时,有极小值 $K_{min}=2.49$ 位于 $z=0$ 面处,极大值 $K_{max}=4.15$ 位于 $z/z_R=1.60$ 处, 渐近值 $K_\infty=3.94$。当 $M>2$ 时,只存在一个位于 $z=0$ 面处的极小值, K 参数随着传输距离的增大而增大,但无极大值,最后趋于渐近值 K_∞。例如, $M=6$ 时, $K_{min}=2.10$, $K_\infty=6.82$; $M=8$ 时, $K_{min}=2.04$, $K_\infty=7.69$。对基模高斯光束($M=1$), $K=3$ 为传输不变量。以上结论在定性上与文献[8]一致,说明用不同数学-物理模型来描述同一类光束,尽管其特征参数的表示式有所不同,但传输特性应是相同的。

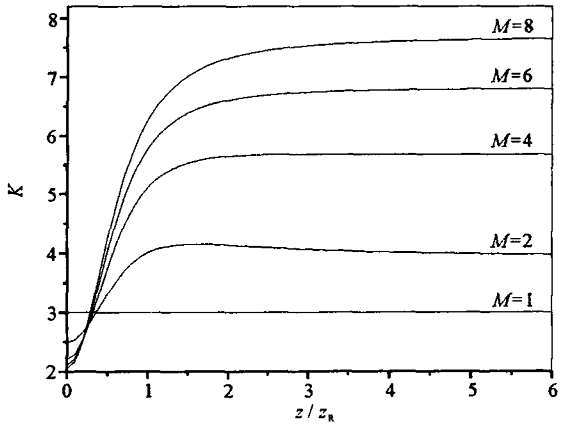

Fig. 2　K parameter of flat-topped beams *vs* normalized propagation distance z/z_R

图 2　平顶光束的 K 参数随归一化传输距离 z/z_R 的变化

图 3 给出了平顶光束在自由空间传输时,不同 K 值处的相对光强分布。由图 3(a)和(b)可以看出,随着 K 值的增大,光强剖面变陡,即此时 K 参数的大小反映了光强剖面的陡峭程度。

3　结　论

本文推导出了 Li 提出的平顶光束的 K 参数的两个等价的解析传输公式。平顶光束的 K 参数与光束阶数

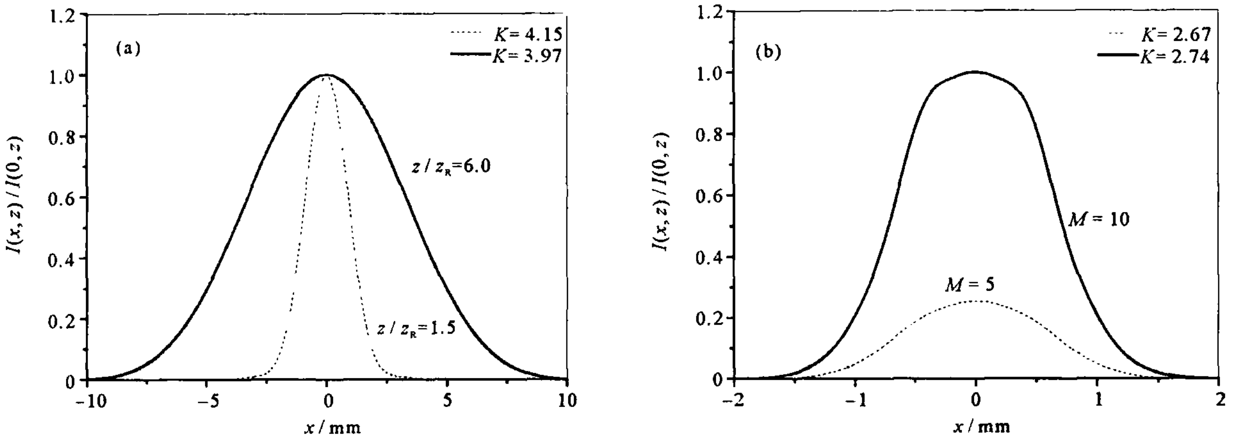

Fig. 3 Relative intensity distributions of flat-topped beams propagating in free space for different values of the K parameter

图 3 平顶光束在自由空间传输时对应于不同 K 值处的相对光强分布

M、瑞利长度 z_R 和 A/B 有关。用典型的数值计算例对解析结果作了说明。

参考文献:

[1] 卿与三,吕百达. 平顶高斯光束和超高斯光束传输特性的相似性[J]. 强激光与粒子束,2001, **13**(6):675—678. (Qing Y S, Lü B D. Similar propagation property of flattened Gaussian beams and super-Gaussian beams. *High Power Laser and Particle Beams*, 2001, **13**(6):675—678)

[2] Parent A, Marin M, Lavigne P. Propagation of super-Gaussian field distribution[J]. *Opt and Quant Electron*, 1992, **24**(9):1071—1079.

[3] Gori F. Flattened Gaussian beams[J]. *Opt Commu*, 1994, **107**(5):335—341.

[4] Li Y J. New expressions for flat-topped light beams[J]. *Opt Commun*, 2002, **206**(6):225—234.

[5] Weber H. Propagation of hight-order intensity moments in quadratic-index media[J]. *Opt and Quant Electron*, 1992, **24**(9):1027—1048.

[6] Martinez-Herrero R, Piquero G, Mejias P M. On the propagation of the kurtosis parameter of general beams[J]. *Opt Commun*, 1995, **15**(3):225—232.

[7] Amarande S A. Beam propagation factor and the kurtosis parameter of flattened Gaussian beams[J]. *Opt Commun*, 1996, **129**(9):311—317.

[8] Saghafi S, Sheppard C J R, Piper J A. Characterizing elegant and standard Hermite-Gaussian beam modes[J]. *Opt Commun*, 2001, **191**(5):173—179.

[9] Lü B D, Luo S R. Analytical expression for the kurtosis parameter of flattened Gaussion beams propagating through ABCD optical systems [J]. *Journal of Modern Optics*, 2002, **49**(10):1731—1738.

[10] Hricha Z, Dalil-Essakali L, Ibnchaikh M, et al. Kurtosis factor of some truncated and non-truncated laser beams[J]. *Phys Chem News*, 2001, **3**(9):11—16.

[11] Collins S A. Lens-system diffraction integral written terms of matrix optics[J]. *J Opt Soc Am A*, 1970, **60**(7):1168—1177.

Analytical propagation expressions for kurtosis parameter of flat-topped beams

KANG Xiao-ping[1,2], LÜ Bai-da[1]

(1. *Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu* 610064, *China*;

2. *Department of Physics, Qiongzhou University, Wuzhishan* 572200, *China*)

Abstract: From the flat-topped beam model proposed recently by Li and the Collins formula, an analytical propagation expression for the kurtosis parameter (K parameter) of flat-topped beams through a paraxial ABCD system is derived. The K parameter depends on the beam order, Rayleigh length and ratio A/B of transfer matrix elements. Based on the propagation equation of intensity moments, a closed-form propagation equation of the K parameter is deduced. The two expressions are shown to be numerically equivalent. The propagation properties of the K parameter of flat-topped beams are illustrated with the caculated results.

Key words: Laser optics; Flat-topped beam; Kurtosis parameter (K parameter); Propagation equation; Intensity moment; Collins formula