

文章编号: 1001-4322(2005)05-0655-05

强非局域克尔介质中光束传输的变分问题*

黄 毅, 郭 旗

(华南师范大学 信息光电子科技学院 传输光学实验室, 广东 广州 510631)

摘 要: 在非局域克尔介质中, 光束的演化规律服从非局域非线性薛定谔方程。用变分法对此问题进行了重新表述。在强非局域的情况下, 通过对介质响应函数进行泰勒展开, 可以解析地表示变分问题。束宽的演化规律也可以定性地从光束束宽变分势得出。运用瑞利-里兹方法求解其变分方程, 分别求出光束在自散焦和自聚焦介质中的变分解。对于自聚焦介质, 当输入功率为某一特定值时, 可以得到空间孤子, 其束宽在传输过程中保持不变。通过与其他方法得到的解比较表明, 变分法是解析讨论光束在非局域非线性介质中演化规律的方法之一。

关键词: 非局域克尔介质中的光束传输; 变分势; 束宽; 变分法

中图分类号: O437 **文献标识码:** A

光束在非线性介质中传输时, 当其衍射作用和非线性作用相互平衡, 光束的束宽将在传输过程中保持不变, 这就是我们所说的空间孤子。空间孤子理论和性质在全光器件上有着广泛的应用前景, 因此对光束在非线性介质中演化规律的研究很有必要。

对空间光孤子的研究可以追溯到 20 世纪 70 年代中期。而研究真正获得发展动力则在 20 世纪 80 年代末, 且在 20 世纪 90 年代走向成熟。到了现在, 空间光孤子已经成为非线性光学研究的热点领域, 空间光孤子的研究取得了很多发展。例如在光折变孤子(Photorefractive Solitons)^[1], 二次孤子(Quadratic Solitons)^[2], 多分量向量孤子(Multicomponent Vector Solitons)^[3], 非相干孤子(Incoherent Solitons)^[4], 离散孤子(Discrete Solitons)^[5], 时空孤子(Spatio-Temporal Solitons)^[6], 谐振腔孤子(Cavity Solitons)^[7]等方面, 无论在理论还是实验上都有相当的进展。

近年来空间光孤子研究的一个聚焦点是非局域介质中传输的空间孤子。1997 年, Snyder 和 Mitchell 革命性地提出了强非局域非线性介质中光束传输的线性模型^[8], 并且发现了称为“线性”孤子的空间光孤子解。这个模型大大降低了孤子这个问题的复杂度, 从而引发了新一轮研究空间光孤子的热潮。随后 Mitchell 和 Snyder 提出了具有高斯型响应的对数非局域非线性介质的简化模型^[9]; Granot 等人对亚波长(sub-wavelength)非局域空间孤子进行了研究^[10]; Krolikowski 和 Bang 得出了在弱非局域极限情况下的空间孤子精确解^[11]; Bang 等人讨论了调制不稳定性^[12]和对孤子在不同非局域程度下稳定性质^[13]。而我们发现了非局域空间孤子的非线性大相位改变^[14], 给出了截止 2003 年底非局域空间孤子研究进展的综述报告^[15], 对非局域孤子的相互作用问题提出了新的见解^[16], 并讨论了初始非光腰入射光束对非局域光束传输的影响^[17]。这些成果扩大了我们对于非局域空间孤子的认识, 并为日后的研究工作打下了良好基础。

本文将从另一个角度研究光束在非局域非线性介质中传输这一问题, 采用变分法对该问题重新表述。通过求解变分问题, 讨论变分势, 从而得出光束束宽的演化规律。并运用瑞利-里兹方法求解其变分方程, 得出光束的演化方程。

1 非局域非线性薛定谔方程的变分表述

光束在非局域非线性介质中传输, 因此光束的演化满足非局域非线性薛定谔方程。二维非局域非线性薛定谔方程形式为^[8,9,13]

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \rho \psi \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') |\psi(x', z)|^2 dx' = 0 \quad (1)$$

* 收稿日期: 2004-10-09; 修订日期: 2005-02-09
基金项目: 国家自然科学基金资助课题(10474023); 广东省自然科学基金资助课题(031516, 04105804)
作者简介: 黄毅(1982—), 男, 广州人, 从事强光传输研究; E-mail: moye82@hotmail.com.
联系作者: 郭旗, 男, 四川省内江市人, 从事光学孤子研究工作近 20 年; E-mail: guoq@scnu.edu.cn.

式中： $\psi(x, z)$ 是傍轴光束； $\mu=1/2k$ ； $\rho=k\eta$ 是介质常数($\eta>0, \eta<0$ ，分别表示自聚焦或自散焦介质)， k 是介质中的波数； z 为径向坐标(光束的传输轴)； x 是一维横向空间坐标； R 是介质的对称实响应函数，满足归一化条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x') dx' = 1$ 。

根据变分法，方程(1)可由最小作用量原理从下述 Lagrange 密度导出

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z}) - \mu \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} \rho |\psi|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') |\psi(x', z)|^2 dx' \quad (2)$$

式中： $*$ 表示复共轭，这意味着方程(1)等价于下述变分方程

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \psi_z, \psi_z^*, \psi_x, \psi_x^*) dx dz = 0 \quad (3)$$

我们假设方程(3)的尝试解为(4)式，光束中心位于径向坐标 z 轴上。

$$\psi(x, z) = A(z) \exp[i\alpha(z)] \exp\left[-\frac{x^2}{2a(z)^2} + ic(z)x^2\right] \quad (4)$$

式中： A, α 分别是尝试解复振幅的幅值和相位； a 是光束的束宽； c 是波前曲率。它们是以传输距离 z 为变量的任意实函数，由变分方程(3)决定，并且我们假设尝试解参数的初始值分别是 A_0, α_0, a_0, c_0 。将(4)式代入方程(3)并对 x 积分，变分问题简化成

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_z dz = 0 \quad (5)$$

式中： $\mathcal{L}_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} dx$ 。一般情况下， \mathcal{L}_z 不能由任意的响应函数 $R(x)$ 解析地表示。

根据非局域响应函数宽度(材料的相关长度)和光束束宽的相对大小，即比值 w/a 的大小(w 表示介质的响应宽度)，可以将非局域程度分为四类^[21,22]：局域、弱非局域、一般非局域和强非局域。当 $w/a \rightarrow 0$ 时， $R(x') \rightarrow \delta(x')$ ，这时程度为局域；当 $w/a \ll 1$ 时，为弱非局域；当 w 和 a 两者可以比拟时，即为一般非局域；当 $w/a \gg 1$ 时，就是本文所讨论的强非局域。不同程度的非局域如图1所示。在强非局域的情况下，从图1(d)可以看出，由于 $w/a \gg 1$ ，方程(2)的积分项只有在光束束宽范围内才不趋于零，而且在这范围内响应函数的变化不大，所以可以对响应函数进行泰勒展开。这样对于任何形式的响应函数，我们都可以近似解析地表示 \mathcal{L}_z 。具体展开过程如下：首先我们将 $R(x-x')$ 在 $x'=0$ 处展开(光束中心位于 x' 坐标系原点)，保留到二阶。

将展开式和尝试解(4)代入方程(2)的最后一项，对 x' 求积分得

$$\frac{1}{2} \rho |\psi|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') |\psi(x', z)|^2 dx' = \frac{1}{2} \rho A^2 \left[|\psi|^2 R(x) \sqrt{\pi} a + \frac{1}{4} a^3 \sqrt{\pi} |\psi|^2 R''(x) \right] \quad (6)$$

因为 $w/a \gg 1$ ，只有 x 在零点附近时，(6)式中 $|\psi|^2 R(x)$ 和 $|\psi|^2 R''(x)$ 才不趋于零，所以我们将 $R(x)$ 和 $R''(x)$ 再一次在 $x=0$ 展开，保留到二阶。将它们的展开式代入方程(6)，并对 x 求积分，这样就得到了 \mathcal{L}_z 中积分项的部分。

完成以上对积分项的处理后，我们将尝试解(4)代入方程(2)的余下部分，将其对 x 积分，最后得到 \mathcal{L}_z 为

$$\mathcal{L}_z = -\frac{\sqrt{\pi} A^2}{2} \left[\frac{\mu}{a} + a^3 \left(4\mu c^2 + \frac{dc}{dz} \right) + 2a \frac{da}{dz} \right] + \frac{\pi \rho a^2 A^4 (8R_0 - 4\gamma a^2)}{16} \quad (7)$$

式中： $R_0 = R_0^{(0)}$ ； $\gamma = -R_0^{(2)} > 0$ ($R_0^{(2)} < 0$ ，因为 R_0 是 $R(x)$ 的最大值)。

2 尝试解各参数的变分方程和变分势的分析

运用瑞利-里兹方法，由(7)式和(5)式可得到尝试解参数所服从的拉格朗日-欧拉方程，经整理可得到尝试解(4)式参数的演化方程

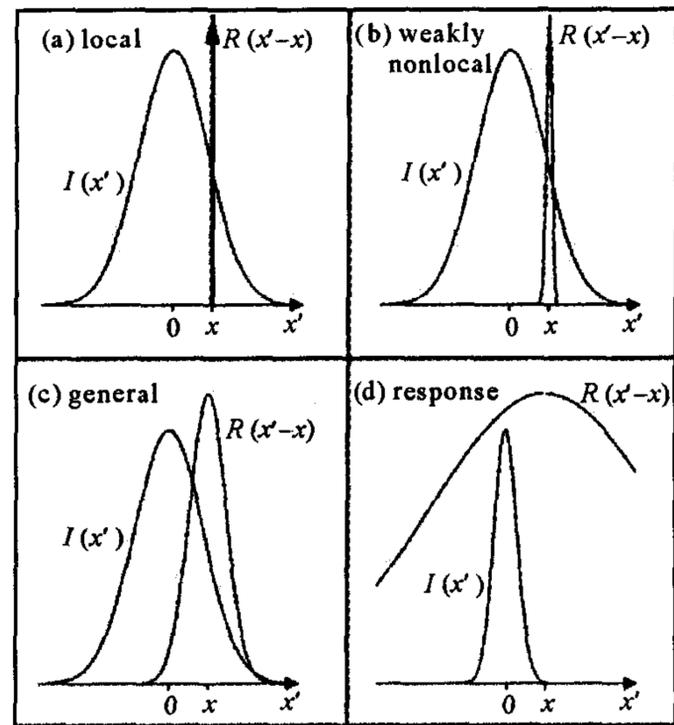


Fig. 1 Degrees of nonlocality

图1 非局域程度的示意图

$$\frac{1}{\mu} \frac{d^2 a}{dz^2} = \frac{4\mu}{a^3} - 2\rho P_0 \gamma a \tag{8a}$$

$$\frac{da}{dz} = -\frac{\mu}{a^2} + \frac{1}{4}\rho P_0 (4R_0 - \gamma a^2) \tag{8b}$$

$$A^2 a = A_0^2 a_0 = \frac{P_0}{\sqrt{\pi}} \tag{8c}$$

$$\frac{da}{dz} = 4\mu a c \tag{8d}$$

方程(8a)中 P_0 表示输入功率, $P_0 = P = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = \sqrt{\pi} A^2 a$ 。从方程组可以看出只要求出束宽 a , 其它的尝试解参数都可以由束宽导出。对于束宽方程(8a), 我们进行归一化, 令 $a(z)/a_0 = y(z)$, 并对整理后的方程进行一次积分。从而我们可将方程(8a)化为类似粒子在势阱中运动的形式^[18]

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + \Pi(y) = 0 \tag{9}$$

这里, 我们假设“粒子的初始状态为静止”, 即对应光束入射处为光束光腰。因此我们可以得到初始条件, $y|_{z=0} = 1, dy/dz|_{z=0} = 0$, 从而方程(9)中的势函数为

$$\Pi(y) = \frac{\nu(y^2 - P_c/P_0)(y^2 - 1)}{y^2} \tag{10}$$

式中: $\nu = \mu\rho\gamma P_0 = \eta P_0 \gamma / 2; P_c = 2\mu/a_0^4 \rho\gamma = 1/\gamma a_0^4 k^2 \eta$ 。这样我们就可以根据变分势对光束的演化进行定性的讨论。

当光束在自散焦介质中传播时, $\eta < 0$ 。其势函数的一般演化规律如图 2(a)所示。由(9)式可知, 势函数恒为负。正如上面提到的, 我们可以从粒子运动的角度等价地对束宽势函数进行分析。如图 2(a)所示, 一静止粒子在 $y=1$ 点释放, 它将沿着势函数不断加速, 同时归一化束宽 y 不断增大。相应地, 当光束在自散焦介质中传输, 由于衍射和自散焦作用, 光束将不断增大, 而且随着束宽的增大, 其展宽的速度将越来越快。在这种介质中不可能存在光孤子。

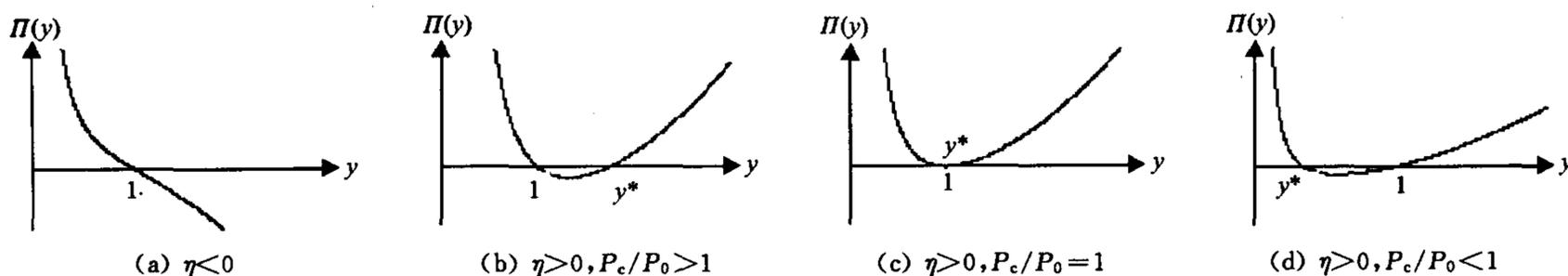


Fig. 2 Qualitative plot of the potential function
图 2 势函数的定性曲线

对于自聚介质, $\eta > 0$ 。由(10)式可知, 势函数有两个零点, 并且两个点对应的 y 值都为正, 分别是 $y_1 = 1, y^* = \sqrt{P_c/P_0}$ 。由于 $y^* = \sqrt{P_c/P_0}$ 会随着光束的输入功率的改变而改变, 因此分以下三种情况讨论:

(1) $P_c/P_0 > 1$, 从图 2(b)可以看出, 势函数在 y_1 和 $y^* = \sqrt{P_c/P_0}$ 之间形成了一个势阱, 此时粒子在一保守力下运动。在 $y=1$ 静止释放的粒子将陷在势阱内。由于能量守恒, 其动能和势能相互转化。相应地, 当光束在这种情况下传输时, 初始状态的衍射作用要强于非线性作用, 光束首先展宽; 当 $y=y^* = \sqrt{P_c/P_0}$ 时, 光束停止展宽, 在非线性的作用下压缩, 回到初始状态。归一化束宽将在 $y_1 = 1$ 和 $y^* = \sqrt{P_c/P_0}$ 之间来回振荡。

(2) $P_c/P_0 = 1$, 从图 2(c)可以看出, 在这种情况下, 势函数的取值只能为零, y 和 y^* 重合。势阱退化为一个点, 粒子将保持静止。在这种情况下, 归一化束宽将为 1, 即光束束宽不变。其原因是因为光束的衍射作用和非线性作用达到平衡状态。这也是我们所说的孤子。

(3) $P_c/P_0 < 1$, 从图 2(d)可以发现, 势函数在 $y^* = \sqrt{P_c/P_0}$ 和 $y_1 = 1$ 之间形成了一个势阱。其实, 这种情况与情况(1)类似, 只是 $P_c/P_0 < 1$ 。初始状态时非线性作用要强于衍射作用, 非线性作用在光束演化过程中占主导, 因此光束首先压缩; 当 $y=y^* = \sqrt{P_c/P_0}$ 时, 光束停止压缩, 在衍射作用下展宽, 回到初始状态。光束束宽就是这样在传输过程中来回振荡。

3 光束在非局域非线性介质中传输的变分解

在自散焦介质中, $\eta < 0$, 所以 $\nu < 0$ 。解方程(9)得

$$a^2 = \frac{a_0^2}{2} [(1 - \Gamma) \cosh(2\beta_1) + (1 + \Gamma)] \quad (11)$$

式中: $\beta_1 = \sqrt{-2\nu}$, $P_c/P_0 = \Gamma$ 。尝试解的其他参数都可以由束宽代入(8b)~(8d)式确定。由束宽解(11)式可以看出, 束宽的演化规律由双曲余弦函数决定。我们知道双曲余弦函数在 $z > 0$ 为增函数, 所以束宽将会在传输过程中不断展宽, 这与讨论变分势所得的结果一致。

在自聚焦介质中, $\eta > 0$, 所以 $\Gamma > 1$, $\nu > 0$ 。解方程(9)得

$$a^2 = a_0^2 [\cos^2(\beta_2 z) + \Gamma \sin^2(\beta_2 z)] \quad (12)$$

式中: $\beta_2 = \sqrt{2\nu}$ 。(12)式对于 $\Gamma > 1$ 和 $\Gamma < 1$ 都成立。得到了束宽解后, 尝试解的所有参数都可以由它来确定, 将(12)式代入(8b)~(8d)式得

$$A = \frac{P_0}{(\sqrt{\pi a})^{1/2}} \quad (13a)$$

$$c = \frac{\beta_2 (\Gamma - 1) a_0^2 \sin(2\beta_2 z)}{8\mu a^2} \quad (13b)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \arctan[\sqrt{\Gamma} \tan(\beta_2 z)] + R_0 \rho P_0 z + \frac{1}{16} \rho \gamma P_0 a_0^2 \left[-2(\Gamma + 1)z + \frac{(\Gamma - 1) \sin(2\beta_2 z)}{\beta_2} \right] \quad (13c)$$

将方程(12)和(13)代入尝试解(4), 我们可得到光束在强非局域自聚焦介质中传输的变分解。从束宽解(12)可以看出, 当 $P_0 < P_c$ 时, 归一化束宽 a/a_0 以 $\sqrt{P_c/P_0}$ 为最大值, 1 为最小值周期振荡; 相反的, 当 $P_0 > P_c$ 时, 归一化束宽 a/a_0 以 1 为最大值, 以 $\sqrt{P_c/P_0}$ 为最小值作周期振荡; 当 $P_0 = P_c$ 时, 束宽将不会随着传播距离 z 而改变。这与上述我们对自聚焦介质势函数的讨论的结果一致。束宽解(12)与文献[8]所得的束宽解等价, 与文献[14]的结果一致。这说明用变分法处理光束在非局域非线性介质中的传输问题所得结果是正确的, 变分法是解析讨论光束在非局域非线性介质中演化规律的有效方法之一。

最近, 我们用变分法处理了响应函数展开到含更高阶项的问题, 这样的问题不能精确求解。当响应函数展开到四阶时, 光束束宽的演化不再由三角函数描述, 而是由椭圆函数描述。与数值计算的结果比较表明, 椭圆函数给出了比三角函数更精确的结果, 当不能求出问题的精确解析解时, 变分法是近似解析分析光束演化规律的有效方法。

4 结 论

本文运用变分法讨论了光束在非局域非线性介质中的传输问题, 给出了变分问题的 Lagrange 密度, 重新表述了非局域非线性薛定鄂方程。在强非局域条件下, 可对响应函数进行泰勒展开, 这是解析求解变分问题的关键之一。通过展开, 无论响应函数的具体形式如何, 都可以解析地处理变分问题。我们设尝试解为高斯型函数, 运用瑞利-里兹方法, 得出了所有待定参数所满足的变分方程。通过求解这些方程, 得到了光束在非局域非线性介质中演化过程的变分解。比较表明, 本文得到的变分解与通过其他方法得到的解是一致的或等价的。因此, 变分法是解析讨论光束在非局域非线性介质中演化规律的一种有效方法。

参考文献:

- [1] Segev M, Crosignani B, Yariv A. Spatial solitons in photorefractive media[J]. *Phys Rev Lett*, 1992, **68**:923—926.
- [2] Torruellas W E, Wang Z, Hagan D J. Observation of two-dimensional spatial solitary waves in a quadratic medium[J]. *Phys Rev Lett*, 1995, **74**:5036—5039.
- [3] Shalaby M, Barthelemy A J. Observation of the self-guided propagation of a dark and bright spatial soliton pair in a focusing nonlinear medium[J]. *IEEE J Quantum Electron*, 1992, **28**:2736—2741.
- [4] Mitchell M, Chen Z, Segev M. Self-trapping of partially spatially incoherent light[J]. *Phys Rev Lett*, 1996, **77**:490—493.
- [5] Eisenberg H S, Silberberg Y, Morandotti R. Diffraction management[J]. *Phys Rev Lett*, 2000, **85**:1863—1866.
- [6] Liu X, Qian L J, Wise F W. Generation of optical spatial temporal solitons[J]. *Phys Rev Lett*, 1999, **82**:4631—4634.
- [7] Brambilla M, Lugiato L A, Prati F. Spatial soliton pixels in semiconductor devices[J]. *Phys Rev Lett*, 1997, **79**:2042—2045.
- [8] Snyder A W, Mitchell D J. Accessible solitons[J]. *Science*, 1997, **276**:1538—541.

- [9] Mitchell D J, Snyder A W. Soliton dynamics in a nonlocal medium[J]. *J Opt Soc Am B*, 1999, **16**, 236—239.
- [10] Granot E, Sternklar S, Isbi Y. Sub-wavelength nonlocal spatial solitons[J]. *Opt Commun*, 1999, **166**, 122—126.
- [11] Krolikowski W, Bang O. Solitons in nonlocal nonlinear media; exact solutions[J]. *Phys Rev E*, 2000, **63**, 016610.
- [12] Bang O, Krolikowski W, Wyller J. Collapse arrest and soliton stabilization in nonlocal nonlinear media[J]. *Phys Rev E*, 2002, **66**, 046619.
- [13] Krolikowski W, Bang O, Rasmussen J J. Modulation instability in nonlocal nonlinear Kerr media[J]. *Phys Rev E*, 2001, **64**, 016612.
- [14] Guo Q, Boren L, Fahuai Y, et al. Large phase shift of optical nonlocal spatial soliton[J]. *Phys Rev E*, 2004, **69**, 016602.
- [15] Guo Q. Nonlocal spatial solitons and their interactions[A]. Proc of SPIE[C]. 2004, **5281**, 581.
- [16] 谢逸群, 郭旗. 非局域克尔介质中空间光孤子的相互作用[J]. 物理学报, 2004, **53**, 3020—3024. (Xie Y Q, Guo Q. The interaction of spatial solitons in nonlocal Kerr material. *Acta Physica Sinica*, 2004, **53**, 3020—3024)
- [17] 郭旗, 许超彬. 偏离束腰入射对非局域非线性介质中高斯光束演化的影响[J]. 物理学报, 2004, **53**, 3025—3032. (Guo Q, Xu C B. The influence of paraxial incident Gaussian beam on the beam evolution in nonlocal nonlinear material. *Acta Physica Sinica*, 2004, **53**, 3025—3032)
- [18] Anderson D. Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers[J]. *Phys Rev A*, 1983, **27**, 3135—3145.

Variational approach to beam propagation in nonlocal Kerr media

HUANG Yi, GUO Qi

(Laboratory of Light Transmission Optics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: The beam propagation in nonlocal Kerr media is modeled by the nonlocal nonlinear Schrödinger equation. This problem can be re-interpreted with the variational approach. In the case of strong nonlocality, the response function can be expanded in Taylor's series, so that the variational problem can be found in a closed form. The evolution of the beam width can be obtained qualitatively by analysing the potential function. By means of a Reyleigh-Ritz optimization procedure, the closed form solutions for the evolution of beams in both defocusing and self-focusing cases can be obtained. When the beam propagates in a self-focusing material and its input power reaches a critical value, its width becomes fixed. The comparison with analytical solutions obtained by other approaches shows that the variational approach is one of the efficient methods in analysing the beam evolution in nonlocal nonlinear media.

Key words: Beams propagation in nonlocal kerr material; Potential; Beam width; Variational approach