

文章编号: 1001-4322(2004)03-0404-05

求解三种导体构形中相对论电子形成的空间电荷限制流*

宋盛义¹, 孙承纬¹, 冯晓晖²

(1. 中国工程物理研究院 流体物理研究所,四川 绵阳 621900; 2. 中国工程物理研究院 科技信息中心,四川 绵阳 621900)

摘 要: 从 Poisson 方程及空间电荷限制流假设出发,推导了三种导体构形中相对论电子形成的空间电荷流密度的一般方程,给出了求解方法及解的基本特征、平板形阳极空间电荷限制流的具体表达式,研究了同轴圆筒形及共顶点同轴圆锥形导体空间电荷限制流关系表达式的极性效应、空间电荷密度及电场分布。

关键词: 空间电荷限制流; 平板形; 同轴圆筒; 共顶点同轴圆锥; 极性效应

中图分类号: TL503 **文献标识码:** A

研究真空二极管负载或真空磁绝缘传输线中空间电荷限制流的目的,主要是基于对二极管负载阳极表面吸收的电子剂量与韧致辐射产额关系的定量考察,以及真空磁绝缘传输线中磁场强度与空间电荷流定量关系的研究。尤其是在 MA 级大电流机器驱动 Z 箍缩的实验中,真空磁绝缘线的应用相当普遍,磁绝缘线的设计必须考察空间电荷限制流与磁绝缘的定量关系,为磁绝缘线的结构设计及参数优化提供依据。在磁绝缘线中由于外加或自身传输电流产生的磁场,使沿电场方向运动的空间电荷限制流发生偏转,从而使到达阳极的空间电荷流逐渐减小、直至变为零形成磁绝缘,因此用到到达阳极的空间电荷电流与磁场之间的定量关系可以描述磁绝缘的程度^[1]。因此研究一定构形和电压下的空间电荷限制流十分关键^[2]。

1911 年 Child 及 1913 年 Langmuir 分别研究了关于低压条件下的阴极表面发射电流;1969 年 J. E. Boers 和 Dermot Kelleher 发表了求解平板构形中相对论电子的 Poisson 方程,给出了空间电荷限制电流密度的关系表达式^[3]。在后来对二极管负载及磁绝缘的研究中大多采用了二者的研究结果。他们的推导结果似乎过于复杂、精度不高、应用不方便;另外,有关同轴圆筒和共顶点同轴圆锥筒的空间电荷限制电流研究的文献较少。而绝大多数真空磁绝缘线却采用这两种构形,如果采用平板构形的结果作近似,在某些时候是不合适的。文献[4]推导了共顶点同轴圆锥形及圆盘形传输线的电参数计算公式,本文将推导平板、同轴圆筒和共顶点同轴圆锥筒三种几何构形的空间电荷限制电流的表达式,并将平板构形的推导结果与文献[3]的结果、以及三种构形计算结果进行比较。

1 基本方程

相对论电子速度与电势的关系为

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 1 + eV/mc^2, \quad v = c \sqrt{1 - 1/\gamma^2} \quad (1)$$

式中: γ 为电子的相对论因子; V 是电势; v 为电子速度; c 为光速; e, m 分别为电子的电量和静止质量。

空间电荷遵循 Poisson 方程,如果电子全部沿电场方向运动,则 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -J/v$, 因此

$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0 = J/\epsilon_0 v \quad (2)$$

式中: ρ 为空间电荷密度; J 为空间电流密度; ϵ_0 为真空介电常数。

空间电荷限制流假设是指,电子爆发后阴极表面场强为零,并设阴极电势为零,即

$$\nabla V/c = 0, \quad V/c = 0 \quad (3)$$

2 三种构形的 Poisson 方程

在图 1 所示的三种导体构形中,分别采用直角坐标系、柱坐标系以及球坐标系,并结合(1),(2),(3)式,将 Poisson 方程改写为无量纲形式。同轴圆筒和共顶点同轴圆锥筒还有极性问题,当外筒为正极、内筒为负极时

* 收稿日期:2003-08-11; 修订日期:2003-12-17

基金项目:国防科技基础研究基金资助课题

作者简介:宋盛义(1967—),男,副研究员,主要从事脉冲功率技术应用研究;绵阳市 919-108 信箱;E-mail:songshengyi@163tom.com。

称为负性问题;相反称为正性问题。

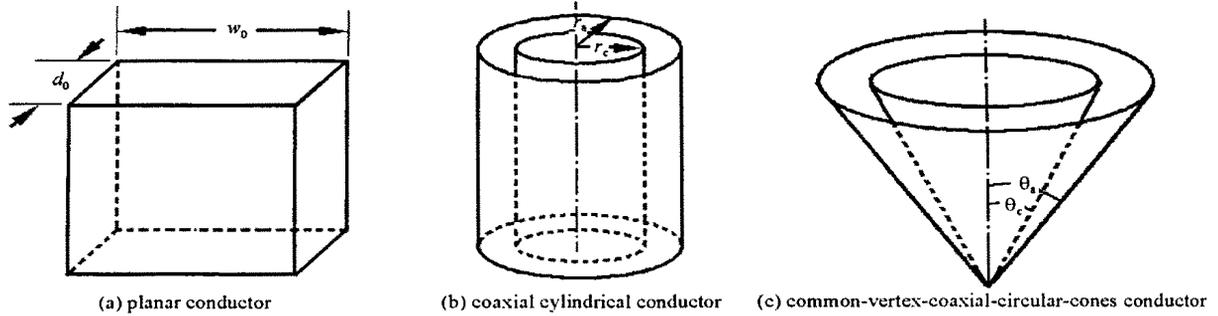


Fig. 1 Three geometrical configurations

图 1 三种导体构形

2.1 无量纲方程

将关于平板形、同轴圆筒及共顶点同轴圆锥的(2)式分别在对应的坐标系中展开,无量纲化后得

$$\frac{d^2}{du^2} = \frac{2}{\sqrt{2-u}} \begin{cases} = 1, \text{平板形} \\ 1, \text{圆筒形或共顶点同轴圆锥形} \end{cases} \quad (4)$$

式中: $0 \leq u \leq 1$; 定义为极性因子,用于描述会聚带来的极性对平面构形的偏离;参变量 $G = J_0 d_0^2 / I, I = 2 mc^3 \rho / e = 8.523 \text{kA}$ 是 电流, d_0 为阴阳极间距, J_0 为到达阳极的空间电荷限制流密度。

注意到(2)式中的 J 为任意空间位置的电流密度,但在稳态条件下沿径向流过阴阳极内任意闭合面的总电流守恒,因此可以将 J 变换成到达阳极的空间电荷限制流密度 J_0 。在直角坐标系、柱坐标系及球坐标系下,分别将平板形、同轴圆筒、共顶点同轴圆锥筒的 J 变换为 $J_0, J_0 = Jr / r_a, J_0 = J \sin \theta / \sin \theta_a$ 。

平板形的(4)式是由直角坐标系得到的,其中 $0 \leq u = x / d_0 \leq 1, \theta = 1$ 表示无极性。同轴圆筒的(4)式是由柱坐标系得到的,其中 $0 \leq u = g \ln(r / r_c) \leq 1, g = \ln^{-1}(r_a / r_c), \theta = J_0 d_0^2 / I = J_0 (r_a - r_c)^2 / I, (u, g) = e^{(u+1)/g} (ge^{1/g} - g)^{-2}$ 。负极性时, $r_c < r < r_a, g > 0$;正极性时(r_a 为内筒半径, r_c 为外筒半径, $r_a < r < r_c, g < 0$)。定义几何因子 $G = |g|$ 只与构形有关而与极性无关,用来表征构形的几何特征。共顶点同轴圆锥筒的(4)式是由球坐标系得到的,其中 $0 \leq u = g \ln[\tan(\theta / 2) / \tan(\theta_a / 2)] \leq 1, g = \ln^{-1}[\tan(\theta_a / 2) / \tan(\theta / 2)], \theta = J_0 d_0^2 / I = J_0 r^2 (r_a - r_c)^2 / I, \theta = \sin \theta_a / [g(r_a - r_c)]^2$ 。这里的是以 u, θ_c (或 θ_a), g 为独立变量的函数。如图 2 所示,如果设 $\theta_c < \theta_a$ 则函数 g 的性质决定了 $0 < \theta_c < \theta_a < \theta$, 每个几何因子 $G = g$ 对应正负两种极性、无穷多组 θ_c, θ_a 组合。负极性时 $0 < \theta_c + \theta_a < \theta$; 正极性时 $\theta_c + \theta_a < 2\theta$; $\theta_c + \theta_a$ 表示无极性或中性。

方程(4)在三个坐标系下的边界条件均为

$$\theta / u_c = 0 = 1, d \theta / du / u_c = 0 \quad (5)$$

2.2 求解的基本方法

方程(4)的解决定于无量纲参变量 (即到达阳极的空间电荷流密度 J_0)、几何因子 G (平板形除外)以及阴极表面的几何尺寸(如 r_c, r_a 及 r)。对于特定的几何构形及一定的空间电荷密度,可以求解随 u 变化的 θ 。由于不能得到 $\theta = \theta(u)$ 的解析表达式,因此只能求解二阶常微分方程的数值解。对于每一个 θ_c 和 g 都可以通过求解微分方程得到一个 $\theta = \theta(u)$;对于所有的 θ_c 和 g ,则可以得到 $\theta = \theta(\theta_c, g, u)$ 。由于单值性反过来可以得到 $\theta = \theta(\theta_c, g, u)$ 。当 $u = u_a$ 时通过 $\theta = \theta(\theta_c, g, u_a)$ 就可以给出到达阳极的空间电荷限制流密度的表达式。

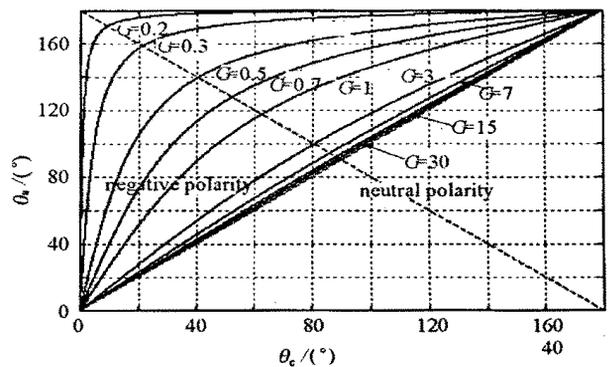


Fig. 2 Common-vertex-coaxial-circular-cones dependence of polarity on latitudes and geometrical factors

图 2 共顶点同轴圆锥的极性与几何因子、夹角的关系

3 空间电荷限制流的基本性质

3.1 平板形



当 $u = 1, 2, \dots, n$, 通过方程(4)求出一系列的 $u_1 = u_1(u), u_2 = u_2(u), \dots, u_n = u_n(u)$, 如果从中取出 $u = 1$ (对应于阳极) 对应的 $u_1(1), u_2(1), \dots, u_n(1)$ 可以组合为 随 变化的数值函数, 通过多项式拟合可以得到 $J_0 d_0^2 = f(V)$ 的数学表达式, 变换后可得到 $J_0 d_0^2 = AY^T$ 的表达式, 即

$$J_0 d_0^2 = AY^T \tag{6}$$

式中: $A = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_k)$; $Y = (V_0, V_1, V_2, \dots, V_k)$; Y^T 是 Y 的转置矩阵, k 是拟合多项式的阶数。

如果 $J_0 d_0^2$ 单位采用 kA、电压 V 单位为 MV, 用 8 次多项式可以拟合适用于电压 V 在 0.07 ~ 19.8MV 范围内的 $J_0 d_0^2$ 。图 3 所示是平板型的空间限制流的数值解与 8 阶拟合解。如果要求更高的精度, 可将电压范围缩小进行分段拟合, 得到分段中不同阶数的 A 。

J. E. Boers 和 Dermot Kelleher 推导平板形空间电荷限制流公式为两个分区级数^[3], 当 $0 < U < 2$ 时

$$J_0 d_0^2 = \frac{I}{(U^2 + 2U)^{1/2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n U^n \right)^2 \tag{7}$$

式中: $a_0 = 0, a_1 = 2/3, a_2 = 1/21, \dots, a_k = -a_{k-1}(2k-3)/(4k-1), k \geq 3$ 。当 $2 < U < \infty$ 时

$$J_0 d_0^2 = I \left[\frac{1}{(U^2 + 2U)^{1/4}} \sum_{m=0}^{\infty} b_m U^{-m+1} - 0.847213 \right]^2 \tag{8}$$

式中: $b_0 = 1, b_1 = 1, \dots, b_k = -b_{k-1}(4k-7)/(2k-1), k \geq 2$ 。

(7), (8) 两式中的 U 定义为 $U = eV/mc^2 = \sqrt{V/1.022}$ 。 $U = 2$ 对应于 $V = 3, V = 1.022$ MV。当 $U \rightarrow 0$ 时从(8)式就得到 Child-Langmuir 流 $J_0 d_0^2 = 2.34 \times 10^{-6} V^{3/2}$ 。其中 $J_0 d_0^2$ 单位为 A, 电势 V 单位取 V。

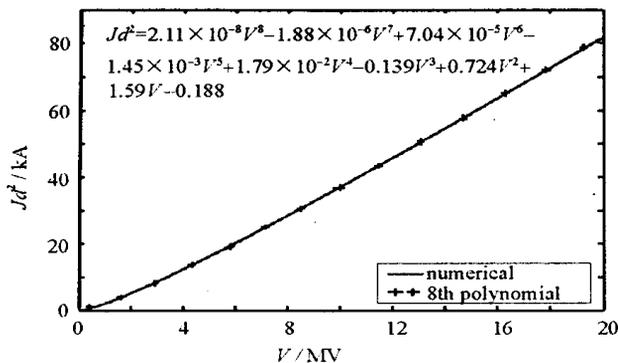


Fig. 3 Dependence of space-charge-limited flow density on voltage in the planar configuration

图 3 平板形空间电荷限制流与电压的关系 (数值解及拟合解)

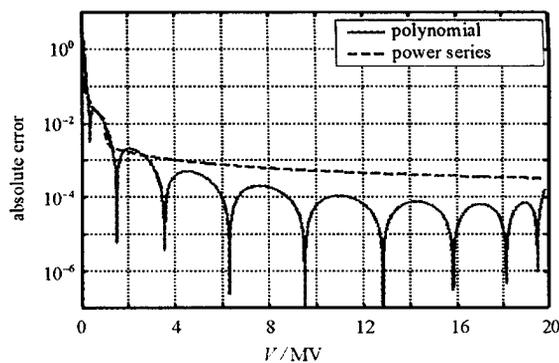


Fig. 4 Absolute error of polynomial fitting and power series relative to numerical solution

图 4 共顶点同轴圆锥的极性与几何因子、夹角的关系

这个级数解及(6)式的 8 阶多项式拟合解, 与精确数值解的误差绝对值示于图 4。高阶多项式拟合可以得到比级数拟合更高的精度, 在低压 ($V = 1.022$ MV) 阶段, 可以用另外一个多项式进行拟合, 得到更高的精度, 这是级数拟合所不能的; 但 J. E. Boers 和 Dermot Kelleher 的级数拟合是针对的全程电压, 而多项式拟合必须限定电压区域, 不同区域要用不同的多项式。从应用出发, 多项式拟合显然比级数拟合更简洁、方便。

3.2 同轴圆筒

当同轴圆筒的几何因子 G 确定以后, 用处理平板形同样的方法, 通过多次求解方程(4) 同样可以得到数值函数 $J_0 d_0^2 = F(V)$ 以及多项式拟合函数 $J_0 d_0^2 = f(V)$ 。

当内外筒半径比值保持不变时, $J_0 d_0^2$ 与电压 V 的关系是不变的; 当内外筒半径比值变化时, $J_0 d_0^2$ 与 V 又是另一个函数关系。也就是说, 每一个几何因子 g 唯一确定一个函数 $J_0 d_0^2 = F(V)$, 它描述了到达阳极的空间限制流密度与间隙及电压的关系。图 5 是系列 G 的 $J_0 d_0^2 = F(V)$ 图像。

值得注意的是, 随着 G 的增大, 即 G 越大, 即 r_a/r_c 越接近 1 时, $J_0 d_0^2 = F(V)$ 无限接近平板形的值。 G 增大意味着内外筒的间隙 $d_0 = |r_a - r_c|$ 变小、曲率半径接近, 内外筒局部趋向于平板结构。事实上, 同轴圆筒的方程(4) 中极性因子 γ 在 G 趋于无穷大时等于 1, 与平板形等价。

从图 5 中可以看出, 对于相同的 G 值关系式 $J_0 d_0^2 = F(V)$ 有极性, 正极性比负极性大, 并以平板形的关系式为分界; G 越小极性越明显。这是由极性因子 γ 的性质决定的。负极性时, $0 < G < \infty$ 对应阳极极性因子的

变化范围是 $\gamma > 1$; 而正极性时, $0 < G < 1$ 对应阳极极性因子的变化范围是 $0 < \gamma < 1$ 。结合 (4) 式可以认为, 负极性的 $J_0 d_0^2$ 随 G 趋于零而趋于零、正极性的 $J_0 d_0^2$ 随 G 趋于零而趋于无穷大。

因此, 在束流加速器、二极管负载等高阻抗 ($Z_0 G = 60$, 其中 Z_0 是构形的几何阻抗^[6], 小的 G 对应高阻抗 Z_0) 运行模式的实际应用中, 为抑制空间电荷流以更好地满足磁绝缘的要求, 大多采用负极性结构。

3.3 共顶点同轴圆锥筒

用同样的方法求解关于共顶点同轴圆锥方程 (4)。求解得到的 $J_0 d_0^2 = F(V)$, 表示在 r 处到达阳极的空间电荷流密度 J_0 与间距 d_0 、电压 V 的关系。对于每个 G 存在一个无极性的中性组合 $c_+ + a_- = 1$, 但这个无极性与平板形无极性是有区别的。如图 6 所示, 当 G 时中性组合的 $J_0 d_0^2 = F(V)$ 与平板形无限接近; 而当 $G \rightarrow 0$ 时比平板形大并趋于无限大。每个 G 有无穷多个 c_+, a_- 组合, 以中性为分界分为负极性和正极性。负极性时 $0 < c_+ + a_- < 1$, $J_0 d_0^2 = F(V)$ 比中性小、正极性时 $c_+ + a_- > 1$ 比中性大, 即每个 G 对应的 $J_0 d_0^2 = F(V)$ 是一个一定宽度的散布面。图 7 表示 $G=0.5$ 时所有 c_+, a_- 组合对应的 $J_0 d_0^2 = F(V)$ 散布面。

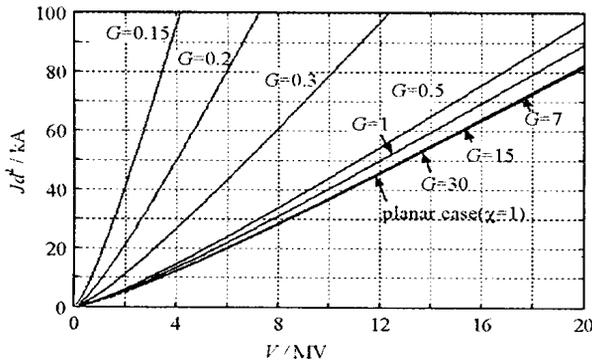


Fig. 6 $J_0 d_0^2 = F(V)$ of the neutral cases for various G in the common-vertex-coaxial-circular-cones configuration

图 6 共顶点同轴圆锥中性分界的 $J_0 d_0^2 = F(V)$

如图 8 所示阳极极性因子 $\gamma = \sin^2 \alpha / [g(\alpha - \beta)]^2$, 决定了共顶点同轴圆锥 $J_0 d_0^2 = F(V)$ 的基本特性。同一个 G 由负极性向正极性变化时, 阳极极性因子 γ 由最大值经平板中性线 ($\gamma = 1$)、圆锥中性线 ($c_+ + a_- = 1$) 变化到最小值; G 越大越接近平板形关系, G 越小与平板形差异越大, 相对于圆锥中性线的散布面越大。值得注意的是, 负极性 $0 < c_+ + a_- < 1$ 时的阳极极性因子 γ 并不是总大于 1, 因为在平板中性线与圆锥中性线之间 $\gamma < 1$ 。

结合 (4) 式可以认为, 负极性的 $J_0 d_0^2$ 随 G 趋于零而趋于零、正极性的 $J_0 d_0^2$ 随 G 趋于零而趋于无穷大; 由于负极性区存在 $\gamma < 1$ 的区域, 因此共顶点同轴圆锥的负极性效应比同轴圆筒差一些, 但随着 G 的增大这种差异可以忽略。大 G 值的构形在大电流装置经常采用, 一般用平板形关系来处理不会带来大的误差。

4 空间电荷密度与电场强度

一定的电压及间距条件下平板构形的空间电荷限制流分布是确定的, 但对于同轴圆筒及共顶点同轴圆锥

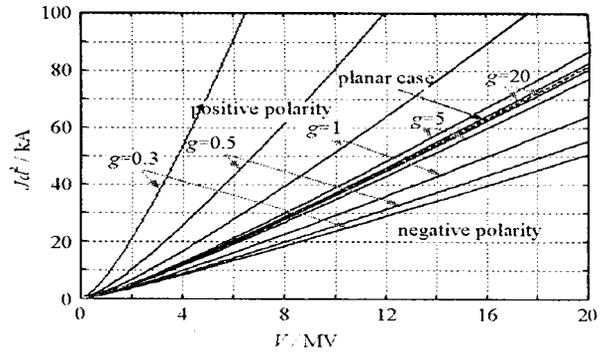


Fig. 5 Dependence of space-charge-limited flow on voltage in the coaxial cylindrical configuration

图 5 同轴圆锥的空间电荷限制流与电压的关系

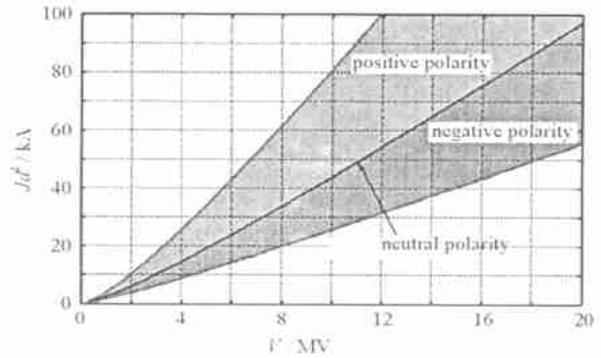


Fig. 7 $J_0 d_0^2 = F(V)$ of $G=0.5$ in the common-vertex-coaxial-circular-cones configuration

图 7 共顶点同轴圆锥 $G=0.5$ 的 $J_0 d_0^2 = F(V)$

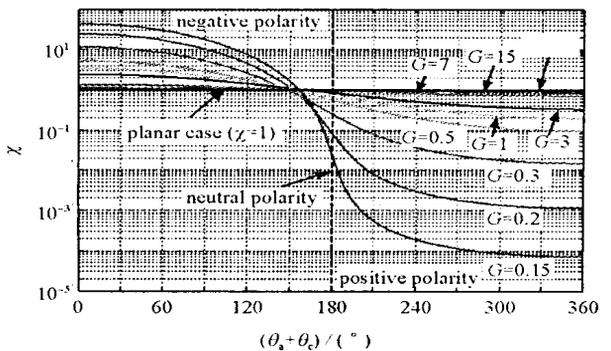


Fig. 8 Polarity factor of common-vertex-coaxial-circular-cones configuration

图 8 共顶点同轴圆锥的极性因子

问题要复杂得多,除了电压和间距外还决定于几何因子和极性。在空间电荷限制流分布确定以后,空间电荷密度分布及电场强度分布也是确定的。

为定量描述空间电荷密度分布及电场强度分布,不失一般性取三种构形具有相同的间距 $d_0 = 21.5\text{cm}$ 、阴极电压 $V_0 = 4.35\text{MV}$ 、同轴圆筒及共顶点同轴圆锥几何因子均为 $G = 0.5$ 。共顶点同轴圆锥取 $G = 0.5$ 的负极性组合 $c = 5^\circ$, $a = 35.8^\circ$ 及正极性组合 $c = 144.2^\circ$, $a = 175^\circ$, $r = 40\text{cm}$ 。计算三种构形的电荷密度分布见图9,空间电荷密度在阴极附近非常大,表明空间电荷限制流条件下,电子电荷绝大部分集中于阴极附近;非平板的两种构形在负极性时阳极电荷密度低于平板形的电荷密度,而正极性时正好相反。如图10所示,平板形的电场强度从阴极的零值单调上升至阳极的最大值;而非平板的两种构形电场强度强烈地依赖于极性:负极性时场强在阴极附近很快上升到最大值、一直到阳极保持不变(甚至略有降低);而正极性时阳极电场比负极性大3倍左右。

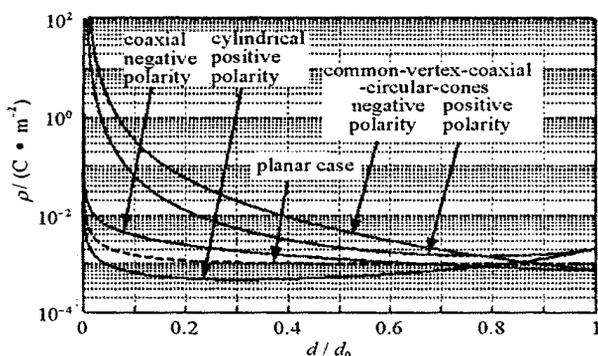


Fig. 9 Space charge distribution for the three configurations

图9 三种构形的空间电荷密度分布

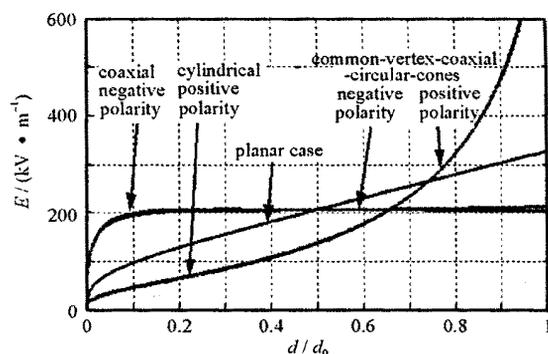


Fig. 10 Electrical stress for the three configurations

图10 三种构形的电场强度分布

空间电荷密度分布及电场强度分布表明,负极性对空间电荷流及阳极表面场强有抑止作用,因此在实际装置中负极性导体比正极性应用广泛得多。

参考文献:

- [1] Creedon J M. Magnetic cutoff in high-current diodes[J]. *J Appl Phys*, 1977, **48**(3): 1070—1077.
- [2] Bergeron K D, Poukey J W. Relativistic space-charge flow in a magnetic field[J]. *Appl Phys Lett*, 1975, **27**(2): 58—60.
- [3] Boers J E, Kelleher D. Exact solution of Poisson's equation for space-charge-limited flow in a relativistic planar diode[J]. *J Appl Phys*, 1969, **40**: 2409—2412.
- [4] 宋盛义,冯晓晖,周之奎,等. 共顶点同轴圆锥形及圆盘形传输线的电参数计算公式[J]. 强激光与粒子束, 2004, **16**(2): 256—260. (Song S Y, Feng X H, Zhou Z K, et al. Deduction of formulas for electrical parameters of common-vertex-coaxial-circular-cones-like and disk-like ideal transmission lines. *High Power Laser and Particle Beams*, 2004, **16**(2): 256—260)
- [5] Mesyats G A, Proskurovsky D I. Pulsed electrical discharge in vacuum. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [6] Capua M S D. Magnetic Insulation[J]. *IEEE Transaction on Plasma Science*, 1983, **11**(3): 205—215.

Solution to space-charge-limited flow in three relativistic configurations

SONG Sheng-yi¹, SUN Cheng-wei¹, FENG Xiao-hui²

(1. Institute of Fluid Physics, CAEP, P. O. Box 919-108, Mianyang 621900, China

2. Information Center of Science and Technology, CAEP, Mianyang 621900, China)

Abstract: A generalized equation, which governs space charge current flow in three relativistic configurations, was derived from Poisson's equation with assumption of space-charge-limited flow. A method for solution to the equation was introduced and the characteristic of solution for the three configurations was discussed as well. It was found that the expressions of space-charge-limited flow for both the common-vertex-coaxial-circular-cones and coaxial cylindrical conductors have polarity effect, which results in different distribution of space charge and electrical stress from that of planar case.

Key words: Space-charge-limited flow; Planar conductor; Coaxial cylindrical conductor; Common-vertex-coaxial-circular-cones conductor; Polarity effect