

# 全息干涉诊断等离子体电子密度的数值研究\*

郑 坚 俞昌旋

(中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230027)

李文洪 郑志坚

(中物院核物理和化学研究所, 成都市 525 信箱 77 分箱, 成都 610003)

**摘 要** 详细讨论了全息干涉数据的物理意义, 并对用 Abel 变换反演等离子体密度进行了数值研究。采用了将等离子体折射率作有限的 Fourier-Bessel 展开, 在最小均方差的意义下求得展开系数, 即进行 Abel 变换反演。数值计算结果表明, 只要电子密度足够低(约 0.1 倍对应于探针光波长的临界密度), 即使成像系统的物平面与对称轴有所偏离, 所采用的方法仍有相当高的精度。

**关键词** 全息干涉 Abel 变换

**ABSTRACT** Holographic interferometric data are interpreted in detail, and Abel inversion of measurements of optical pathlength through refracting cylindrical symmetric plasmas is discussed and numerically studied. By expanding refractive index of plasma as truncated Fourier-Bessel series and determining the expanded coefficients in the least-mean-square sense, Abel inversion is realized. Numerical results show that, if electron density of plasma is low, i.e., about one-tenth of the critical density of probe light, the precision of the method used in the paper is satisfying, even if the object plane of image system deviates a little from the symmetrical axial of plasmas.

**KEY WORDS** holographic interferometry, Abel inversion

## 0 引 言

在惯性约束聚变研究中, 等离子体电子密度的分布及其演化对研究激光与等离子体相互作用有着重要的意义。作为诊断激光产生等离子体的电子密度的一个有力方法, 双曝光全息干涉有着自身的独特优点: 高空间分辨, 高时间分辨<sup>[1]</sup>。只要产生的等离子体是柱对称的, 则由干涉条纹的分布, 能够得到光程差的分布, 再经 Abel 变换就可以得到电子密度的分布。为了配合将要在“星光 II”装置上进行的四分幅全息干涉实验, 我们对全息干涉以及 Abel 变换作了较为详细的讨论和数值研究。

## 1 双曝光全息干涉数据的物理意义

在采用全息干涉仪进行等离子体电子密度诊断的实验中, 探针光两次通过被测量的物体: 一次还没有等离子体产生(参考光束), 一次等离子体已经形成(物光束)。由于等离子体中存在着横向密度梯度, 导致物光束通过等离子体时会发生折射, 从而与参考光束所走过的路径不同。经过一个高分辨的成像系统, 这两支光波在成像系统的像平面发生干涉。采用胶片将之记录下来, 从而得到干涉条纹的分布信息。其原理如图 1 所示。

\* 国家高技术惯性约束聚变领域资助课题。  
1996年9月3日收到原稿, 1997年2月26日收到修改稿。  
郑坚, 男, 1970年6月出生, 在读博士生。

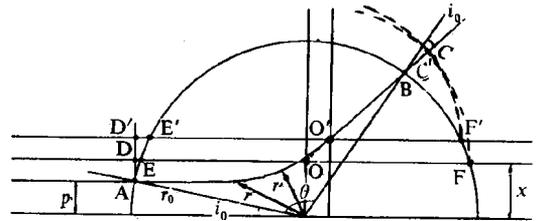
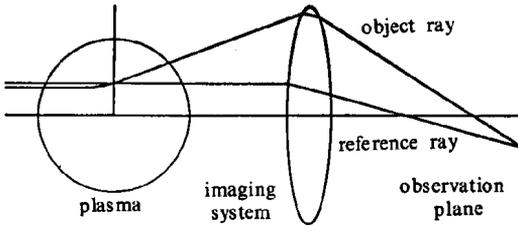


Fig 1 Two optical rays that interfere in the image of the symmetrical plane of plasma

图 1 在等离子体对称面的像面上发生干涉的两条光线

Fig 2 Ray segments contribution to the apparent optical pathlength change measured interferometrically

图 2 干涉度量中, 对光程差有贡献的光线部分

下面我们将可以看到, 对于同一电子密度分布, 干涉条纹的分布是依赖于成像系统物平面的位置的。为简单起见, 我们首先考察物平面处于等离子体对称轴上的情况。见图 2, 假定等离子体仅存在于  $r = r_0$  的区域里, 且在边界处等离子体的折射率与环境(真空)的折射率一样。将出射的物光光线反向延长, 与物平面交于点  $O$ 。由于成像系统的作用, 物光线仿佛就是从  $O$  点发出的。在象平面上, 它与经过  $O$  点的参考光束发生干涉。图中  $\overline{OC} = \overline{OF}$ ,  $F$  点以后的参考光束和  $C$  点以后的物光束虽然在空间所走过的路径不同, 但经过成像系统之后, 它们到达象平面同一点时的光程是相同的。因此, 物光束与参考光束的光程差为

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_A^B n(s) ds + (\overline{BC} - \overline{DE} - \overline{EF}) \\ &= 2 \int_{r(p)}^{r_0} \frac{n^2(r) r dr}{\sqrt{r^2 n^2(r) - p^2}} - \{ (r_0^2 - p^2)^{1/2} - x \cos(\theta(p) + i_0) / (\frac{p}{r_0}) \} \end{aligned} \quad (1)$$

这里  $p$  为物光光线的投射距离;  $n(r)$  为等离子体的折射率分布函数;  $\theta(p)$  为物光光线入射点与出射点之间的夹角;  $x$  为入射光线的表观入射距离, 即  $O$  点与对称轴的距离;  $r(p)$  是瞄准距离为  $p$  时物光束的最小矢径。其中,  $\theta(p)$  和  $x$  的表达式分别为

$$\theta(p) = 2 \int_{r(p)}^{r_0} \frac{p dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - p^2}} \quad (2)$$

$$x = - \frac{p}{\cos(\theta(p) + 2i_0)} \quad (3)$$

当成象系统的物平面不在对称轴上时, 由图 2 所示的几何关系, 容易推得这时物光束与参考光束的光程差为

$$\Phi(X) = \Phi(x) - \delta x \left( 1 + \frac{1}{\cos(\theta(p) + 2i_0)} \right) \quad (4)$$

其中

$$X = x - \delta x \tan(\theta(p) + 2i_0) \quad (5)$$

这里  $\delta x$  是物平面与对称轴的距离。从方程(4)就可以清楚地看到, 光程差的确与成像系统的物平面的位置有关。

## 2 计算和讨论

实验上得到干涉条纹的分布之后也就可以得到光程差的分布。如果直接从方程(1)出发,

我们很难从  $\Phi(x)$  得到等离子体折射率的分布。Vest 经过数值研究发现<sup>[2]</sup>, 当成象系统的物平面在对称轴上时, 即使在等离子体的折射相当显著的时候, 光程差  $\Phi(x)$  可以足够精确地用无折射效应的光程差公式近似表示

$$\Phi(x) \quad \Phi(x) = 2 \int_x^{r_0} \frac{(n(r) - 1) r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (6)$$

从方程(6)出发, 当光程差分布已知, 由著名的 Abel 变换就可得到等离子体折射率的分布

$$n(r) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_r^{r_0} \frac{(d\Phi/dx) dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} \quad 1 - \frac{1}{\pi} \int_r^{r_0} \frac{(d\Phi/dx) dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} \quad (7)$$

由于实验数据存在着涨落, 如果直接利用方程(7)进行反演, 首先必须将实验点  $\{\Phi(x_i)\}$  进行最小二乘拟合。假设得到的拟合函数为  $g(x)$ , 将  $g(x)$  代入(7)式, 就可以得到折射率  $n(r)$ 。需要指出的是  $dg(x)/dx$  未必是  $d\Phi/dx$  的最小二乘拟合函数。因此, 利用公式(7)进行反演时, 会引入较大误差。为避免这个问题, 我们采用下面的方法。首先, 将折射率用正交函数系  $\{f_n(x)\}$  作有限展开

$$n(r) - 1 = \sum_{i=1}^N a_i f_i(x) \quad (8)$$

将此式代入方程(6), 在最小均方差的意义下, 可以得到关于系数  $\{a_i\}$  的线性方程组

$$\sum_{i=1}^N F_i(x_n) F_j(x_n) a_i = \Phi(x_n) F_j(x_n) \quad (9)$$

其中

$$F_i(x) = 2 \int_x^{r_0} \frac{f_i(r) r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (10)$$

$\{x_n\}$  为空间取样点。为保证方程组(9)有唯一解, 要求取样点数  $M$  大于展开的项数  $N$ 。从方程(9)可以看到, 在进行反演时, 直接利用的数据点是实验点  $\{\Phi(x_i)\}$ , 从而避免了前面所述的问题。

考虑到激光产生等离子体这一特殊情况, 将正交函数系  $\{f_i(x)\}$  选取为零阶 Bessel 函数  $\{J_0(\mu_i x)\}$  (这里  $\mu_i (i=1, 2, \dots, N)$  是 Bessel 函数  $J_0(\mu R)$  的前  $N$  个根。数值计算中,  $R$  取得比  $r_0$  稍微大一些) 是比较方便的<sup>[3]</sup>。因为在实际的实验中, 零阶 Bessel 函数系的第一项就常常与等离子体的折射率比较接近, 所以展开时, 只要取为数不多的头几项就可以得到比较满意的结果。但此时积分表达式(10)为

$$2 \int_x^{r_0} \frac{J_0(\mu_i r) r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

不能用初等函数表示, 只能采用数值积分。在得到折射率之后, 由等离子体折射率与电子密度的关系式

$$n = \left(1 - \frac{N_e}{N_c}\right)^{1/2} \quad (11)$$

就可以得到电子密度  $N_e$ , 这里,  $N_c$  为对应于探针光波长  $\lambda_r$  的临界密度

$$N_c / \text{cm}^{-3} = 1.113 \times 10^{21} (\lambda_r / \mu\text{m})^{-2} \quad (12)$$

方程(8)~(12)是本文对 Abel 反演进行数值计算的理论基础。我们对等离子体电子密度分布为高斯型的情形, 即电子密度分布为如下形式

$$N_e(r)/1.113 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3} = \exp[-4(r/r_0)^2]$$

的情况作了比较详细的数值研究,着重研究了采用不同波长的探针光以及成象系统的物面位置对反演结果的影响。首先考虑物平面在对称轴上的情况。在(0,1)区间内等间距地取99个 $p$ 值对方程(1)~(3)进行计算,得到一组空间取样点 $\{x_i\}$ 和取样点处的光程差 $\{\Phi(x_i)\}$ 。在对方程(1)和(2)中的积分进行计算时,为了提高计算精度,先做变量代换 $t = \sqrt{r - r(p)}$ ,然后用高斯积分法得到积分值。有了这些模拟数据之后,采用前面所述的方法进行反演。我们对取零阶Bessel函数的前二项,前四项和前六项这三种情况分别进行了计算。当 $\lambda_p = 0.33 \mu\text{m}$ 时,方差 $(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Phi(x_i) - \Phi^{\text{Abel}})^2)^{1/2}$ 分别为 $1.3 \times 10^{-3}$ ,  $3.7 \times 10^{-5}$ , 和  $2.6 \times 10^{-6}$ , 这里 $\Phi^{\text{Abel}}$ 是光程差的拟合值。由此可见,只要取六项Bessel函数,就能很好地拟合光程差的分布。取六项Bessel函数反演得到的密度分布如图3所示。从图中可以看到,当 $\lambda_p = 0.33 \mu\text{m}$ 时,反演的结果很接近于原值,与原值的最大误差仅为 $\max |N_e - N_e^{\text{Abel}}| = 2.7 \times 10^{-2}$ ;即使当 $\lambda_p = 0.50 \mu\text{m}$ ,反演的结果仍相当不错( $\max |N_e - N_e^{\text{Abel}}| = 5.9 \times 10^{-2}$ )。这样的结果一方面说明了反演程序的可靠,另一方面也间接地再次证明了Vest的结论。

实验中,成象系统的物平面不可能准确地处于对称轴上,会或多或少地偏离对称轴。为了研究其影响,我们对此情况也进行了数值模拟。这时我们利用方程(4)和(5)产生模拟数据 $\{X_i\}$ 和 $\{\Phi(X_i)\}$ 。模拟的条件是等离子体密度的最大值为 $1.113 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ ,探针光波长为 $\lambda_p = 0.33 \mu\text{m}$ ,物平面离对称轴的距离 $\delta r$ 分别为 $0.05r_0$ ,  $0.10r_0$ ,  $0.20r_0$ 。我们假定这时方程(6)仍然近似成立,这一假定的合理性由最终得到的结果的合理性来体现。采用前述方法,所得结果如图4所示。从图4可以看到,尽管成象系统的物平面不在对称轴上,反演的结果仍然令人满意。而且从图中可以看到,物平面在对称轴之前某一特定距离时的效果更好。这说明,在我们的模拟条件下,对成象系统的物平面和对称轴的偏离的要求是相当宽的;在实验安排中,使成象系统的物平面从对称轴的前方接近对称轴来调节光学成象系统,会有助于降低因物平面不在对称轴上而带来的误差。这一点对实际的实验有很重要的现实意义,因为这样大大降低了成象系统调整的精度要求,降低了实验的难度。

由图3和图4所示结果使我们有理由认为,在实际的实验当中,为了确保反演精度,所探测的等离子体密度不要超过对应于探针光的临界密度的1/10。实验所采用的探针光的波长约为 $\lambda_p = 0.3 \mu\text{m}$ ,这样其0.1倍的临界密度约为 $1 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ ,此即为能保证探测精度的电子密度的大致上限。

### 3 结 论

本文对双曝光全息干涉数据的物理意义以及Abel变换做了较为详细的讨论和数值研究。研究发现,成象系统的物平面处于对称轴上时,采用将等离子体折射率做有限Bessel-Fourier展开的方法能得到令人满意的反演结果。物平面偏离对称轴的情况也进行了研究。研究结果表明,只要等离子体电子密度远小于对应于探针光波长的临界密度(前者约为后者的十分之一),就既能保证反演精度,又能大大降低对成象系统调整精度的要求。

致射 作者感谢在工作中与江少恩同志的有益讨论。

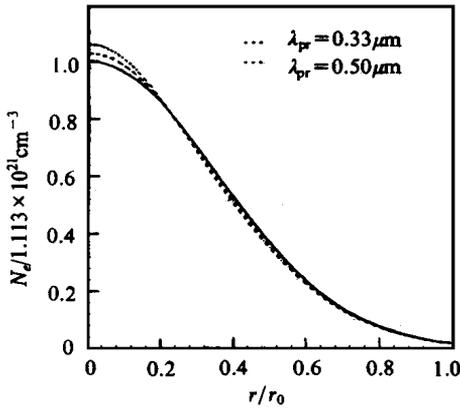


Fig 3 Influence of the probe beam wavelength on Abel inversion, where the solid curve stands for the true electron density profile used to produce the optical pathlength data with which Abel inversion is realized

图3 探针光的波长对 Abel 反演的影响  
图中, 实线代表真实电子密度分布

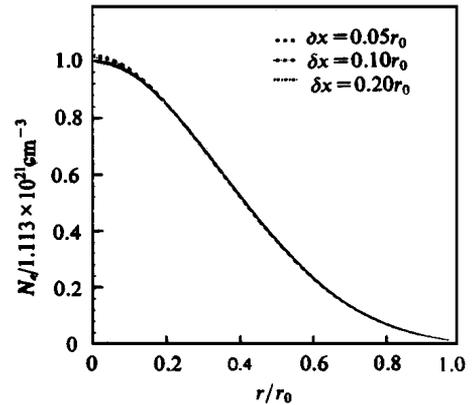


Fig 4 Influence of the deviation of the object plane of image system from the symmetric axial of plasma on Abel inversion, where the solid curve stands for the true electron density profile, and the curve with  $\delta x = 0.20r_0$  is nearly covered by the solid curve

图4 成像系统的物平面偏离等离子体对称轴时对 Abel 反演的影响。实线代表真实电子密度分布, 而  $\delta x = 0.20r_0$  时的反演曲线几乎与实线重合。

## 参考文献

- 1 Busch G E, Shepard C L, Siebert L D, and Tarvin J A. *Rev Sci Instrum*, 1985, **56**: 879
- 2 Vest C M. *App Opt*, 1975, **14**: 1601
- 3 Sweeney D W, Atwood D T, and Coleman L W. *App Opt*, 1976, **15**: 1126

## NUMERICAL STUDY OF MEASURING ELECTRON DENSITY WITH HOLOGRAPHIC INTERFEROMETER

Zheng Jian, Yu Changxuan

Modern Physics Department, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, 230027

Li Wenhong, Zheng Zhijian

Institute of Nuclear Physics and Chemistry, CAEP, P. O. Box 525-77, Chengdu, Sichuan, 610003

Holographic interferometric data are physically interpreted in detail, and Abel inversion of measurements of optical pathlength through refracting, cylindrical symmetric plasmas is discussed. By expanding refractive index of plasmas as truncated Fourier-Bessel series and determining the expanded coefficients in the least-mean-square sense, Abel inversion is realized. Since the first Bessel function of the series is often close to the refractive index of laser-produced plasmas, it is numerically proved that only several Bessel functions are needed in calculation. Numerical results also show that, if electron density of plasma is rather low, i.e., about one-tenth of the critical density of probe light, the precision of the method used in the paper is satisfying, and the restriction of the deviation of object plane of image system from the symmetrical axial of plasmas is relaxed, which will degrade the difficulties of experiments.