

热力联合作用弹性薄圆板的弯曲与屈曲^{*}

陈小伟^{1,2} 陈裕泽² 余同希¹ 尹益辉²

(1. 香港科技大学机械系, 2 中国工程物理研究院结构力学所)

摘 要 导出了热力联合作用下弹性薄圆板的弯曲动力响应控制方程, 讨论了其弯曲变形特点及影响失效的因素。分析表明在短时热能沉积作用下, 热屈曲是弹性薄板失效的主要方式之一; 反鼓包或反冲塞是热屈曲的后继行为; 增加外载和热能沉积功率水平都将加速热屈曲的发生; 材料的温度相关性与热能沉积的时空分布对薄板的力学行为都有重要影响, 同为产生和影响热剪切失效(反冲塞)的重要因素。

关键词 热力联合作用 薄圆板 热屈曲 材料温度相关性 激光

中图分类号 TO 348 11

预载结构在激光或热脉冲载荷作用下的效应研究最近引起较多的注意, 热力联合作用薄圆板是其中较典型的问题之一^[1,2]。由于功率水平、激光分布和辐照时间的不同, 结构在激光作用下的失效方式是多样的。功率小于 $10^4 \text{W}/\text{cm}^2$ 的激光辐照, 因热应力破坏、热软化、热熔融等导致结构失效或破坏^[3]; 对于 $10^5 \sim 10^6 \text{W}/\text{cm}^2$ 的特殊时空分布激光作用, 发现了“反冲塞”现象^[4], 在几何线性和材料温度无关时作弹性热弯曲分析; 激光作用还引起结构的材料性能变化, 丰树平等进行了材料的热软化实验。

激光或热脉冲作用薄圆板, 除热弯曲外, 还因热胀对膜应变能的显著贡献而可能导致热屈曲, 材料性能改变也将显著地影响应变能分配。热力联合作用下的新力学现象正是热弯曲应变能及膜应变能的共同变化造成的; 分析时应同时考虑热弯曲应变能和膜应变能, 以及板的几何非线性和材料的温度相关性。

薄圆板弹性弯曲控制方程因相互耦合而呈非线性, Berger 忽略膜应变第二不变量而使之解耦^[5]。针对功能梯度材料(FGM), 用该方法讨论刚度随径向变化的非均匀加热圆板的弹性大挠度问题^[1], 并用 Galerkin 方法求解; 并据此讨论低功率均匀分布连续激光和均匀分布横向力联合作用圆板的准静态问题^[2]。本文利用 Berger 近似和幂级数法分析材料温度相关的弹性薄圆板在热力联合作用下的非线性弯曲、屈曲及失效。

1 控制方程

讨论半径 b 、厚度 h 的弹性薄圆板 ($h \ll b$) 在轴对称任意横向分布外载 $q(r, t)$ 和短时热能沉积 $q_r(r, z, t)$ (有效半径 $a < b$) 作用下的非线性弯曲动力响应(图1), 其位移应变和应力应变关系分别是

$$\left\{ \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ e_{\theta\theta} &= \frac{u}{r} - \frac{z}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned} \right. , \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{1 - \mu^2} [e_{rr} + \mu e_{\theta\theta} - \alpha \hat{T} (1 + \mu)] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1 - \mu^2} [e_{\theta\theta} + \mu e_{rr} - \alpha \hat{T} (1 + \mu)] \end{aligned} \right. \quad (1)$$

* 国家自然科学基金、国家863激光技术领域及香港研究资助局(RGC)资助课题

1998年2月23日收到原稿, 1998年5月11日收到修改稿。

陈小伟, 男, 1967年11月出生, 助研, 在读硕士生

在热载作用时间内,材料参数沿径向随温度变化呈强烈的梯度性, E 、 μ 、 α 是板厚平均温升 \hat{T} 的函数, $\hat{T}(r, t) = (1/h) \int_{-h/2}^{h/2} q_T(r, z, t) dz$ 。膜应变的第一与第二不变量 e_1 和 e_2 分别为

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{u}{r} \\ e_2 &= \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{u}{r} \end{aligned} \quad (2)$$

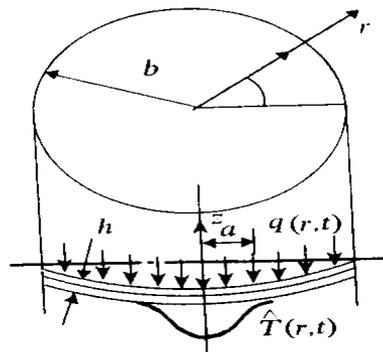


Fig 1 An axisymmetric thin circular plate under combined thermal-force loading
图1 热(激光)力轴对称联合加载薄圆板

定义弯曲刚度 $D = Eh^3/[12(1-\mu^2)]$, 热弯矩 $M_T = \alpha E m_T$, 热剪力 $Q_T = -\nabla^2 [M_T/(1-\mu)]$, $m_T = \int_{-h/2}^{h/2} q_T(r, z, t) z dz$, $p_T = \int_{-h/2}^{h/2} q_T(r, z, t) dz = h\hat{T}$ 。利用 Berger 近似^[6], 在板变形总势能中忽略膜 e_2 , 根据虚功原理, 则动力方程为

$$f = \frac{12D e_1}{h^2} - \frac{E \alpha p_T}{1-\mu} \quad (3)$$

$$\nabla^2 (D \nabla^2 w) - f \nabla^2 w - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial (1-\mu) D}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \nabla^2 \left[\frac{M_T}{1-\mu} \right] = q - \rho h w \quad (4)$$

对于边界径向位移约束 ($u(b) = 0$) 的轴对称薄圆板, 可导出

$$f = \left[\frac{1}{2} \int_0^b r \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 dr - \int_0^b \frac{\alpha(1+\mu)}{h} p_T r dr \right] / \left(\frac{h^2}{12} \int_0^b \frac{r}{D} dr \right) \quad (5)$$

由式(3)、(5)相等, 积分可得自动满足边界条件和轴对称条件的径向位移

$$u = \frac{h^2 f}{12} \int_0^r \frac{r}{D} dr - \frac{1}{r} \left[\frac{1}{2} \int_0^r \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 r dr - \int_0^r \frac{\alpha(1+\mu)}{h} p_T r dr \right] \quad (6)$$

对于边界径向约束 ($u(b) = 0$) 的热力联合作用的轴对称薄圆板, 求得解耦的弹性非线性弯曲动力响应方程(4~6)式, 分别考虑固支或简支边界, 即可求解。

2 准静态分析和屈曲讨论

热力联合作用下, 若计及材料温度相关性、几何非线性及温度场时空变化, 可通过数值积分求解其动力响应。这里暂不计惯性项, 按时间步作出准静态分析, 定性讨论热力联合作用下薄板的变形特点。

时空相关的轴对称温度场可用分离变量法沿径向 r 幂级数展开, 薄板材料参数随平均温升 \hat{T} 变化可用幂级数展开, 进而也可表示为 r 的幂级数; 同样任意变化的横向外载和挠曲线也用幂级数表示

$$\begin{cases} E = \sum_{l=0} E_l(t) \left(\frac{r}{b} \right)^l, & \mu = \sum_{l=0} \mu_l(t) \left(\frac{r}{b} \right)^l, & \alpha = \sum_{l=0} \alpha_l(t) \left(\frac{r}{b} \right)^l, \\ D = \sum_{l=0} D_l(t) \left(\frac{r}{b} \right)^l, & (1-\mu)D = \sum_{l=0} K_l(t) \left(\frac{r}{b} \right)^l, & \frac{M_T}{1-\mu} = \sum_{l=0} R_l(t) \left(\frac{r}{b} \right)^l, \\ q(r, t) = \sum_{l=0} q_l(t) \left(\frac{r}{b} \right)^l, & w(r, t) = \sum_{l=0} C_l(t) \left(\frac{r}{b} \right)^l \end{cases} \quad (7)$$

温度场及材料参数通常截取有限项, 若挠度幂级数比材料参数级数项高两阶, 则可给出足够精确的挠曲线级数表达式。将式(7)代入式(4), 由固支边界条件及轴对称条件易得挠度级数

的系数完全求解方程组

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^N C_l = 0, & \sum_{l=2}^N l C_l = 0, & C_1 = 0, \\ (4D_0 - 2K_1)C_2 + 9D_0 C_3 = -b^2 R_1, \\ \sum_{i=0}^l \{l(i+2)[l(i+2)D_{l-i} - (l-i)K_{l-i}]C_{i+2}\} - b^2 l^2 f C_l \\ = b^4 q_{l-2} - b^2 l^2 R_l, & l = 2, 3, \dots, N-2 \end{cases} \quad (8)$$

因 f 包含 $(\partial v / \partial r)^2$ 的定积分, 方程组内有 $C_i(t)C_j(t)C_k(t)$ 三次项, 式(8)是非线性的。沿时间路径迭代求解: 以外载作用初时薄板挠度作为初条件, 由前一时刻位移可得 t 时刻的 f 初值 $f^{(0)}$, 求解式(8)可得 t 时刻位移迭代初始值 $w(r, t)^{(0)} = \sum_{l=0}^N C_l(t)^{(0)} (r/b)^l$, 再求 t 时刻的 f 迭代值 $f^{(1)}$, 循环求解, 最后可得任意时刻 t 的准静态挠度解 $w(r, t)^{(i)} = \sum_{l=0}^N C_l(t)^{(i)} (r/b)^l$ 。较小功率短时热能沉积, 可较快地得到收敛解; 但当功率较大时, 板内升温迅速, 热胀可能相当严重而出现热屈曲, 这时得不到收敛解, 对此讨论如下:

式(8)可视为 $\bar{A} \cdot \bar{X} = \bar{B}$ 的 $(N+1)$ 阶弱线性化方程组。在某一时刻 $t, \Delta t \rightarrow 0$, 若 $\Delta \bar{X} \rightarrow 0$, 则迭代唯一收敛; 若 $\Delta \bar{X} \neq 0$, 亦即 $|\bar{A}| \rightarrow 0$, 迭代出现多值收敛解或发散, 物理上表现为热屈曲, 故利用 $|\bar{A}| \rightarrow 0$ 作为热屈曲发生的判据。由式(8)可知, 热屈曲与材料温度相关性、表现变形非线性和热膨胀的 f 等密切相关, 而 f 须由式(5)求得, 仅在不计几何非线性时由温度场直接决定, 故热屈曲同时也与横向外载及热弯矩剪切项等密切相关。

当不考虑材料温度相关时, 可给出一个特例分析。这时 $|\bar{A}| \rightarrow 0$ 可化简为

$$M f^{M-1} + \sum_{m=1}^{M-1} (M-m) \left[\frac{M!}{(M-m-1)!} \right]^2 \left(\frac{4D_0}{b^2} \right)^m f^{M-m-1} = 0, \quad M \geq 2, M = \text{int}(N/2) \quad (9)$$

由此可知, 板屈曲必须要求 $f < 0$; 而式(5)则表明, 虽然式(9)有多个解, 而热能沉积从无到有, 仅 $|f|$ 的最小值才有实际意义。进一步忽略几何非线性, 式(5)、(9)分别变为

$$f = \left(\frac{4D_0}{b^2} \right) \cdot f_p, \quad f_p = - \left(\frac{6}{h^3} \right)^b \alpha (1 + \mu) p r r dr \quad (10)$$

$$M f_p^{M-1} + \sum_{m=1}^{M-1} (M-m) \left[\frac{M!}{(M-m-1)!} \right]^2 f_p^{M-m-1} = 0, \quad M \geq 2, M = \text{int}(N/2) \quad (11)$$

这时 f_p 仅表示薄板的热胀, 薄板选定后, 温度场的径向分布将决定 f_p ; 有可能存在这样的温度场, 令 f_p 积分在局部才有实际意义, 这时局部发生热屈曲, 而与薄板径向大小及边界无关。

在不计材料温度相关和几何非线性时, 热屈曲判据将仅由激光功率水平、温度场的径向分布及板材热胀系数 α 和泊松比 μ 决定, 初始扰动将决定屈曲后的运动方向。

3 数值计算

算例选用与文献[4]相近的激光分布, 但在阶跃处变化较缓和, 见图2, $h/a = 0.04, b/a = 1$ 。4. 计算无量纲化与文献[4]一致。为简化计算, 横向力为均匀分布外载; 仅设材料的杨氏模量 E 随平均温升线性变化 $E = E_0(1 - sT)$: 若 $s = 0$, 材料与温度无关; 若 $s > 0$, 材料软化; 若 $s < 0$, 材料硬化。

均布外载单独作用薄板时, 计算结果与理论解一致: 相同外载作用下非线性解小于线性解, 仅当变形挠度 $|w| \geq 0.5h$ 时, 两者吻合, 线性变形为 $w = \frac{q_0 b^4}{64D_0} \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^2$ 。

短时热能沉积导致薄板弯曲变形,如图3、4 (图中 q_r 、 p_e 分别代表热能沉积和均布外载, $\gamma = 1$ 表示计及热胀和几何非线性, $\gamma = 0$ 表示不考虑热胀和几何非线性,下同)。若不计热膨胀和材料温度相关,线性解给出与文献[4]相似的结果;与力载作用不同的是,若计及热膨胀,几何非线性变形较线性解随温度变化升高更快,很快出现多值解或发散而发生热屈曲。热屈曲时临界挠度不大, $w/h \approx 0.75$ 。辐照初期升温有限,材料温度相关性对挠度影响甚微;随温度升高,材料温度相关将引起板变形大大增加,尤以热软化为甚。增加激光辐照功率和材料温度相关都将加速热屈曲发生。

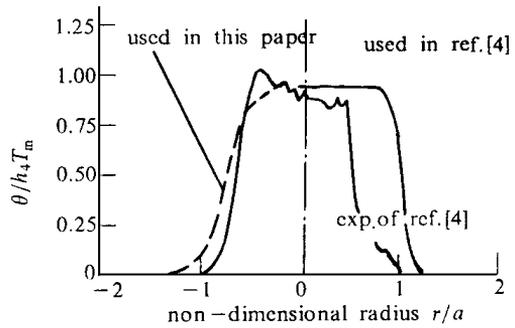


Fig 2 Distribution of laser along radial direction of the thin plate at a special time
图2 某时刻的激光分布

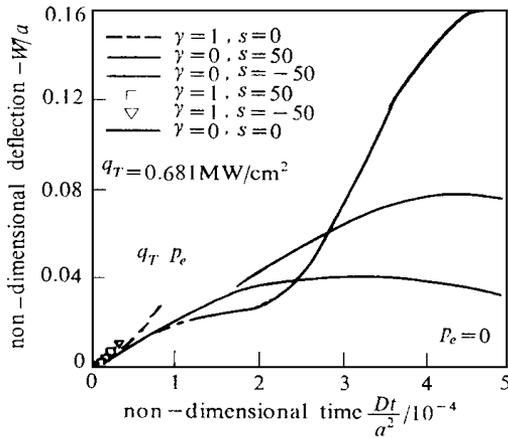


Fig 3 Variation of deflection of plate center vs time under thermal energy deposit
图3 热能沉积时板心挠度随时间的变化

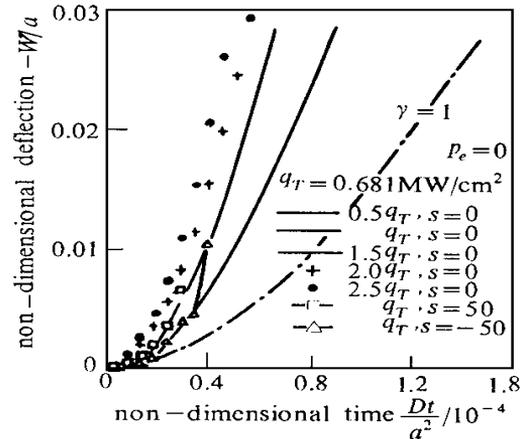


Fig 4 Variation of deflection of plate center vs time before buckling under thermal energy deposit
图4 热能沉积薄板热屈曲前板心挠度随时间的变化

当热力联合作用时,如图5、6,增加作用外载与增大辐照功率或考虑材料温度相关一样,都将加速热屈曲发生;对于预载结构,可用较少能量沉积,导致结构失效破坏。

须指出的是,温度沿板的径向分布对热剪力 Q_r 起决定性作用。若不计温度相关,虽然 Q_r 最大值仍分布在温度陡变处,但因该处温度变化较缓和而小于文献[4]对应值。若温度径向分布阶跃处 Q_r 大于断裂极限,则反冲塞发生。这种情形要求该处温度径向分布梯度非常大,近似完全平台温度分布^[4];若温度径向分布无明显突变, Q_r 将小于断裂极限,反冲塞不发生。但若考虑材料温度相关性,薄板加速屈曲同时也引起 Q_r 迅速增大,较短时间内即可升至断裂极限值(事实上断裂极限也因材料软化而降低)。对于高斯型激光作用,板屈曲时 Q_r 小于断裂极限,故不发生反冲塞,但因大于弹性极限而进入塑性,最后有反鼓包产生;若平台型激光作用,屈曲时 Q_r 将大于断裂极限,反冲塞将发生。考虑材料的温度相关性,令反冲塞现象的分析更合理。

可以认为,温度沿板的径向梯度分布及材料温度相关性对最大横向热作用力起决定作用;薄板的反鼓包或反冲塞是薄板热屈曲的后继行为;热屈曲时最大横向热作用力达到断裂极限

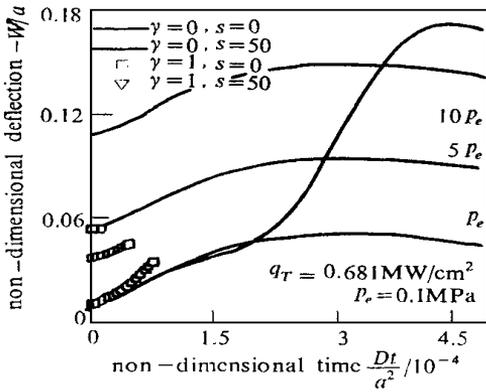


Fig 5 Variation of deflection of plate center vs time under combined thermal-force loading
图5 热力联合作用薄板, 板心挠度随时间的变化

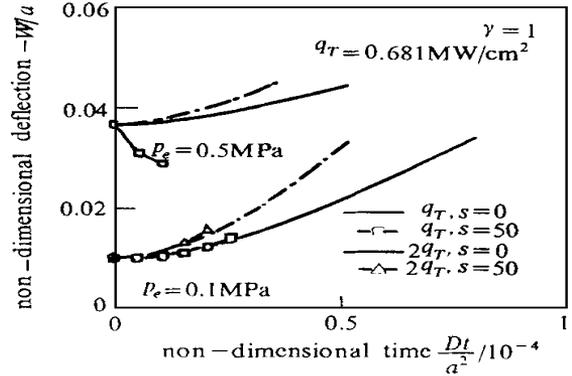


Fig 6 Variation of deflection of plate center vs time before buckling under combined thermal-force loading
图6 热力联合作用薄板, 热屈曲前板心挠度随时间的变化

是反冲塞形成的必要条件。

4 讨论

热能沉积将通过热弯曲、热膨胀、材料温度相关变化等与横向外载共同作用引起板的力学行为发生; 若不计热能沉积, 式(4)则成为横向外载单独作用薄板的动力方程。因边界约束或相对于无限大板的局部热能沉积, 热膨胀将引起热屈曲; 较大功率脉冲热载作用时, 质量惯性效应是不能忽略的^[41], 须考察其动力行为; 小于 10^3 W/cm^2 的连续激光加热薄板需 1.0 s 以上时间^[2], 惯性效应不明显, 板厚方向温度已均匀, 失效以热屈曲和材料温度相关变化(如热软化)为主, 初始扰动(预载或初始温度效应)将决定板屈曲后的鼓包方向。

控制方程中热弯矩项类似于作用一横向热作用力。热弯曲原因在于温度沿板厚的梯度分布, 但决定横向热作用力分布的是薄板中温度沿径向的梯度; 不同时空分布的短时热能沉积, 将形成不同分布的横向热作用力。“反冲塞”现象^[41]正是阶跃处横向热作用力的突变造成的。

材料温度相关性如热软化, 不仅直接引起弹性模量、屈服应力、断裂强度等材料系数的改变, 因破坏阈值降低而导致材料及结构破坏或失效; 同时还通过材料参数沿板径向的梯度变化, 间接改变热弯曲和热膨胀项, 而令结构受力状态显著改变。热剪力由此变得复杂, 即

$$Q_T = -\nabla^2 \left[\frac{M_T}{1-\mu} \right] = - \left[\frac{\alpha E}{1-\mu} \right] \nabla^2 m_T - m_T \nabla^2 \left[\frac{\alpha E}{1-\mu} \right] - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\alpha E}{1-\mu} \right] \frac{\partial m_T}{\partial r} \quad (12)$$

短时热能沉积引起热弯曲、热胀和材料性能改变, 即在增加弯曲应变能同时, 还引起板内拉伸应变能的改变。当拉伸应变能的释放小于板的弯曲应变能时, 板变形是稳定的; 较高功率热能沉积下, 热膨胀将强于热弯曲, 拉伸应变能的释放是强烈而迅速的, 一旦这种释放达到或超过板的弯曲应变能, 则发生热失稳, 即热屈曲。对于热力联合作用薄板, 外载在热能沉积过程中因变形而继续做功, 同时贡献于弯曲应变能和拉伸应变能, 引起两者比例的改变。材料温度相关性对此也有显著影响, 不同热力外载导致板内应变能分配的不定性, 产生不同的失效机制。利用应变能的成分分析可预报出具体的失效模式。

5 结论

首先, 导出材料温度相关的弹性薄圆板在热力联合作用下非线性弯曲动力响应方程, 给出相应的准静态分析, 并进行热屈曲讨论。其二, 在短时热能沉积作用下, 热屈曲与热软化一样,



也是弹性薄板的主要失效方式之一;反鼓包或反冲塞是热屈曲的后继行为;增加作用外载与辐照功率都将加速热屈曲发生。其三,材料温度相关性与热能沉积时空分布对薄板的力学行为都有重要影响,同为产生和影响热剪切失效的重要因素;热屈曲时热剪切力达到断裂极限是“反冲塞”发生的必要条件。最后,利用应变能的成分分析可对热力联合作用薄板的失效判据进行细致分析。不同的力载与热载耦合作用,造成应变能分配的变化,从而导致不同的失效机制。

参考文献

- 1 Ohnabe H, Mizuguchi F. Large deflections of heated non-homogeneous circular plates with radially varying rigidity. *Int J Non-Linear Mechanics*, 1993, **28**(4): 365~ 372
- 2 尹益辉, 李思忠. 激光与横向力联合加载圆板的非线性弹性弯曲分析. 热应力. 昆明: 云南科技出版社, 1996
- 3 陈裕泽. 低功率密度激光辐照结构的热动力失效. 1995激光的热和力学效应学术会议论文集(卷A)
- 4 周益春. 激光诱导反冲塞效应的实验与理论研究[博士论文]. 中国科学院力学所, 1994
- 5 Berger H M. A new approach to the analysis of large deflections of plates. *J Appl Mech*, 1955, **22**: 465~ 472

NON-LINEAR BENDING, BUCKLING AND FAILURE OF ELASTIC THIN CIRCULAR PLATES UNDER COMBINED THERMAL AND FORCE LOADING

Chen Xiaowei^{1,2}, Chen Yuze², Yu Tongxi¹, and Yin Yihui²

¹ Dept. of Mechanical Engineering, HKUST, Hong Kong

² Institute of Structural Mechanics, CAEP, Chengdu, 610003, China

ABSTRACT The governing equations of non-linear dynamic response of an axisymmetric elastic thin circular plate subjected to an arbitrarily transverse force and a thermal energy deposit are formulated. Deformation features of thin circular plates and the factors that affect failure are discussed by a quasi-static analysis. It is shown that thermal buckling is one of the major failure modes of thin circular plates in the case of short-duration thermal energy deposit. Thermal buckling always occurs before reverse bulging or reverse plugging. Similar to the increase of the transverse load, the increase of the power level of thermal energy deposit will accelerate the thermal buckling. The temperature-dependence of material properties and the time-space distribution of thermal energy deposit both significantly influence the mechanical response and failure of the thin circular plates.

KEY WORDS combined thermal-force loading, thin circular plate, thermal buckling, temperature-dependent material properties, laser