

文章编号:1000-6893(2008)02-0333-05

# 双周期带涂层纤维压电复合材料反平面问题分析

谢新亮<sup>1</sup>, 肖俊华<sup>1</sup>, 徐耀玲<sup>2</sup>, 蒋持平<sup>1</sup>

(1. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083)

(2. 燕山大学 建筑工程与力学学院, 河北 秦皇岛 066004)

## Analysis for Doubly Periodic Coated Fiber Piezoelectric Composite Materials Under Antiplane Shear

Xie Xinliang<sup>1</sup>, Xiao Junhua<sup>1</sup>, Xu Yaoling<sup>2</sup>, Jiang Chiping<sup>1</sup>

(1. School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

(2. School of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

**摘要:** 研究双周期带涂层纤维压电复合材料反平面问题。利用 Eshelby 等效夹杂原理引入特征应变和特征电场,并结合双准周期 Riemann 边值问题理论,获得了问题在反平面机械载荷和面内电载荷作用时的解析解。由本文解的特殊情形可以退化为已有结果。数值算例考察了复合材料内部应力和电场随复合材料各组分电弹参数的变化规律,研究了纤维排列方式和纤维体积分数对复合材料有效电弹系数的影响。带涂层纤维正六边形排列时的有效电弹系数与广义自洽方法的预测结果非常接近。结果对新型航空材料的设计和优化具有参考价值。

**关键词:** 双周期; 带涂层纤维; 压电复合材料; 反平面剪切; Riemann 边值问题

**中图分类号:** O343.7 **文献标识码:** A

**Abstract:** The work addresses piezoelectric composites with doubly periodically distributed coated fiber under antiplane shear and inplane electrical field. By applying Eshelby's equivalent inclusion method, the eigenstrain and eigen-electrical-field concepts are introduced. Then combining the theory of doubly quasi-periodic Riemann boundary value problem, an analytical solution to the problem is obtained. Some existing solutions can be obtained as special cases of the present solution. The variations of the stress and electrical field with piezoelectric parameters of the composites are investigated. The relations between the effective properties of the piezoelectric composites and the volume fraction of the fiber are discussed for the square and hexagonal coated fiber arrays. The effective piezoelectric coefficients for the hexagonal array of coated fibers are in agreement with the ones predicted by the generalized self-consistent method. The present solution is useful to estimate and optimize the performances of such piezoelectric heterogeneous materials.

**Key words:** doubly periodic; coated fiber; piezoelectric composite materials; antiplane shear; Riemann boundary value problem

20 世纪 80 年代末,美国军方首先提出智能材料与结构的概念,并很快发展成一个多学科交叉活跃的研究领域。有学者预期具有“皮肤、神经、大脑和肌肉”的新型航空航天器与其他机械结构将会改变航空航天工业乃至整个现代科学技术的面貌<sup>[1]</sup>。在这项新技术中,压电复合材料以其优异的电弹性能获得了最为广泛的应用<sup>[2-3]</sup>。Jiang et al<sup>[4-5]</sup>给出了无限大压电体中具有中间相夹杂和共焦点椭圆夹杂在远场反平面载荷和面内

电场时的精确解,分析了应力场和电场的分布规律,并在此基础上对单向纤维压电复合材料的有效电弹性系数进行了研究。Shen et al<sup>[6]</sup>利用共形映射技术研究力电载荷下压电材料共焦点多层椭圆夹杂时的情形,得到问题的级数解。周期结构是复合材料内部排列严格有序的情形,许多天然的复合材料含有周期或近似周期的微结构,随着材料科学及其制造技术的发展,许多增强相精确周期分布的新材料已经出现<sup>[7]</sup>,特别是新型复合材料设计通常就是指周期分布的胞元设计。李凤明和汪越胜<sup>[8]</sup>考虑力电耦合效应的影响,以力场和电场分量为状态量,研究了周期压电复合材

收稿日期:2007-09-26;修订日期:2007-11-06

基金项目:国家自然科学基金(10672008)

通讯作者:蒋持平 E-mail:jiangchiping@buaa.edu.cn

料结构中的波动局部化问题。Jiang et al<sup>[9-10]</sup> 利用 Eshelby 等效夹杂理论<sup>[11]</sup>, 研究无限介质中双周期圆柱形夹杂反平面问题, 获得问题夹杂内外严格级数解答, 考察了纤维内和界面径向剪应力以及复合材料的有效模量的变化规律。Xu et al<sup>[12]</sup> 进一步研究无限压电介质中双周期圆柱形压电夹杂的反平面问题, 作为压电纤维复合材料的一个重要模型, 预测了压电纤维复合材料的有效电弹性模量。谢新亮等<sup>[13]</sup> 研究多场耦合时双周期电磁弹性纤维增强复合材料的纵向剪切问题, 讨论微结构参数对非均匀材料有效电磁弹性参数的影响。涂层可以实现材料的强韧化和功能梯度化, 涂层设计的合理与否直接影响到复合材料整体性能的优劣, 对于双周期带涂层纤维压电复合材料问题, 研究还十分有限。

本文研究双周期带涂层纤维压电复合材料在远场反平面载荷和面内电场作用时的情形, 利用 Eshelby 等效夹杂原理并结合双准周期 Riemann 边值问题理论<sup>[14-15]</sup> 获得了问题的解析解。数值结果揭示了复合材料各组分电弹参数对复合材料内应力场和电场的影响, 讨论了纤维不同排列时有效电弹系数随微结构的变化规律。

## 1 问题描述

双周期分布带涂层纤维压电复合材料横截面如图 1 所示, 两个方向分布周期分别为  $2\omega_1$  和  $2\omega_2$ 。  $P_{00}$  表示基本胞元, 边界为  $\Gamma_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ )。纤维、涂层和基体的弹性、介电和压电系数分别为  $C_{44}^f, \epsilon_{11}^f, e_{15}^f$ ;  $C_{44}^c, \epsilon_{11}^c, e_{15}^c$  和  $C_{44}^m, \epsilon_{11}^m, e_{15}^m$ 。纤维区以  $r$  为半径的圆域表示, 其边界为  $L_1$ ; 涂层区以  $r$  为内径  $R$  为外径的圆环域表示, 其边界为  $L_2$  与  $L_1$ ; 胞元内其他部分是基体区。远场作用均匀

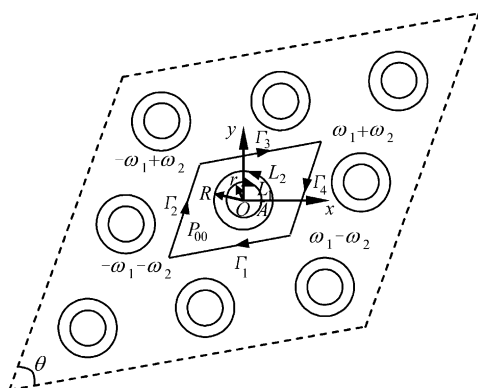


图 1 双周期带涂层纤维压电复合材料截面示意图

Fig. 1 Schematic diagram of section of doubly periodic coated fiber piezoelectric composite materials

反平面载荷  $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$  和均匀面内电场  $E_x^\infty, E_y^\infty$ 。

## 2 分析与解答

引入非均匀的特征应变和特征电场, 考虑真实情形与等效情形二者的等效关系。

真实情形: 一无限大的均匀压电介质, 其电弹参数为  $C^m$ , 远场作用均匀反平面载荷  $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$  和均匀面内电场  $E_x^\infty, E_y^\infty$ , 此时有均匀应变和电场  $\gamma^0$  和  $E^0$ , 假设出现电弹性参数为  $C^f$  的纤维和  $C^c$  的涂层。

其中:  $C^m = \begin{bmatrix} C_{44}^m & e_{15}^m \\ e_{15}^m & -\epsilon_{11}^m \end{bmatrix}$ ,  $C^f$  与  $C^c$  也是矩阵形式。

等效情形: 电弹性参数矩阵为  $C^m$  的无限大均匀压电介质, 其远场作用与真实情形一样的力电载荷, 假定在纤维位置发生特征应变  $\gamma_{xz}^*, \gamma_{yz}^*$  和特征电场  $E_x^*, E_y^*$ ; 在涂层位置发生特征应变  $\gamma_{xz}^{**}, \gamma_{yz}^{**}$  和特征电场  $E_x^{**}, E_y^{**}$ 。

令真实情形与等效情形在纤维、涂层和基体位置的应变和电场分别相等, 可知两种情形基体位置的应力和电位移相等。再令两种情形在纤维和涂层位置的应力和电位移分别相等, 可以得到以下复应变方程

$$C^f \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^0 + \gamma_{xz}^* + \gamma'_{xz1} + \gamma''_{xz1} - \\ i(\gamma_{yz}^0 + \gamma_{yz}^* + \gamma'_{yz1} + \gamma''_{yz1}) \\ -(E_x^0 + E_x^* + E'_{x1} + E''_{x1}) + \\ i(E_y^0 + E_y^* + E'_{y1} + E''_{y1}) \end{bmatrix} = C^m \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^0 + \gamma'_{xz1} + \gamma''_{xz1} - \\ i(\gamma_{yz}^0 + \gamma'_{yz1} + \gamma''_{yz1}) \\ -(E_x^0 + E'_{x1} + E''_{x1}) + \\ i(E_y^0 + E'_{y1} + E''_{y1}) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$C^c \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^0 + \gamma_{xz}^{**} + \gamma'_{xz2} + \gamma''_{xz2} - \\ i(\gamma_{yz}^0 + \gamma_{yz}^{**} + \gamma'_{yz2} + \gamma''_{yz2}) \\ -(E_x^0 + E_x^{**} + E'_{x2} + E''_{x2}) + \\ i(E_y^0 + E_y^{**} + E'_{y2} + E''_{y2}) \end{bmatrix} = C^m \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^0 + \gamma'_{xz2} + \gamma''_{xz2} - \\ i(\gamma_{yz}^0 + \gamma'_{yz2} + \gamma''_{yz2}) \\ -(E_x^0 + E'_{x2} + E''_{x2}) + \\ i(E_y^0 + E'_{y2} + E''_{y2}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: 上标“\*”表示由纤维位置的特征场引起的扰动量; 上标“\*\*”表示由涂层位置的特征场引起的扰动量。由问题的周期性, 利用基本胞元边界  $L_1$  和  $L_2$  上的位移和电势相容条件、剪应力和电位移合

矢量连续条件以及胞元边界上的力和电位移合矢量条件,并结合双准周期 Riemann 边值问题理论,由式(1)和式(2)可以求得问题的解。

### 3 算例与结果分析

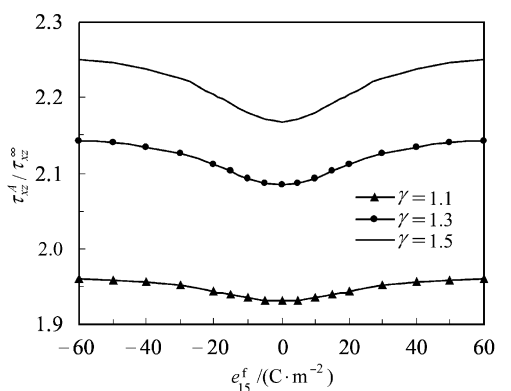
当纤维与涂层为同一种压电材料或者涂层与基体为同一种压电材料时,本文结果退化为无涂层时的情形<sup>[12]</sup>。下面研究带涂层时压电复合材料的电弹场和宏观有效电弹系数的变化规律。

#### 3.1 应力与电场集中

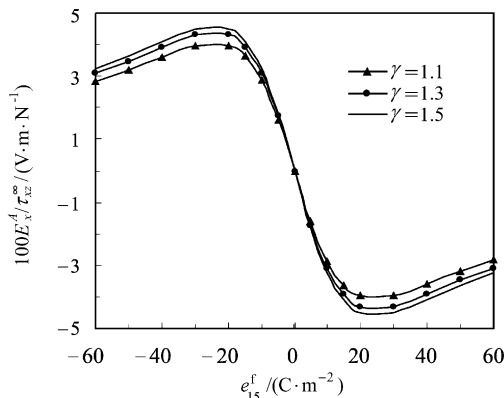
(1) 纤维为压电材料,涂层和基体为弹性材料。压电传感器通常是由压电纤维嵌于弹性基体中制成,此时  $e_{15}^c = e_{15}^m = 0$ ,考虑带涂层纤维方形分布。取  $C_{44}^f = 35.3 \text{ GPa}$ ,  $C_{44}^c/C_{44}^f = 0.1$ ,  $C_{44}^m/C_{44}^f = 0.01$ ,  $\epsilon_{11}^f = 15.1 \times 10^{-9} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $\epsilon_{11}^c = \epsilon_{11}^m = 0.1\epsilon_{11}^f$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\gamma = r/R$ 。图 2 给出了不同  $\gamma$  取值时 A 点(见图 1)应力和电场随纤维压电系数的变化曲线。可以看出应力  $\tau_{xz}^A$  随纤维压电系数绝对

值的增大而增大,且对于正负压电系数具有对称性; $\gamma$  越大应力值也越大。电场  $E_x^A$  随纤维压电系数表现为非单调,高的压电系数不一定得到高电场值, $E_x^A$  对于正负压电系数表现为反对称性。

图 3 给出了 A 点应力和电场随涂层模量的变化曲线。定义  $\delta = C_{44}^c/C_{44}^f$ ,取  $e_{15}^f = 10.0 \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$ 。A 点应力和电场呈现出类似的规律性,都随着  $\lg(C_{44}^c/C_{44}^f)$  的增大先增大然后减小,对于  $\lg(C_{44}^c/C_{44}^f)$  具有近似对称性。当  $C_{44}^c/C_{44}^f$  较小时, $\delta$  越小应力和电场值越大,当  $C_{44}^c/C_{44}^f$  较大时( $>100$ ), $\delta$  的变化对应力和电场几乎没有影响。



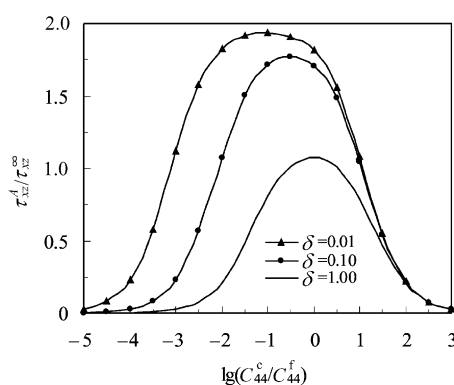
(a) 应力



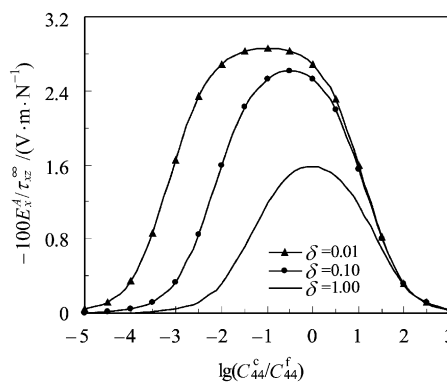
(b) 电场

图 2 A 点应力和电场随纤维压电系数的变化

Fig. 2 Variations of the stress and electrical field at point A with the fiber piezoelectric coefficient



(a) 应力



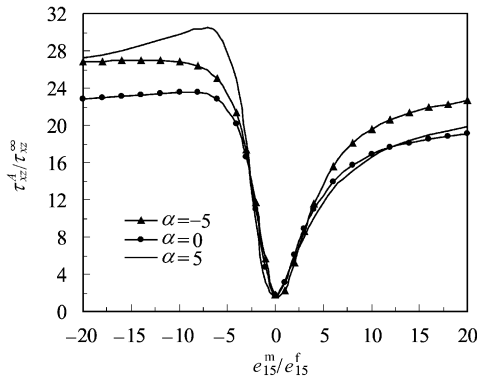
(b) 电场

图 3 A 点应力和电场随  $\lg(C_{44}^c/C_{44}^f)$  的变化

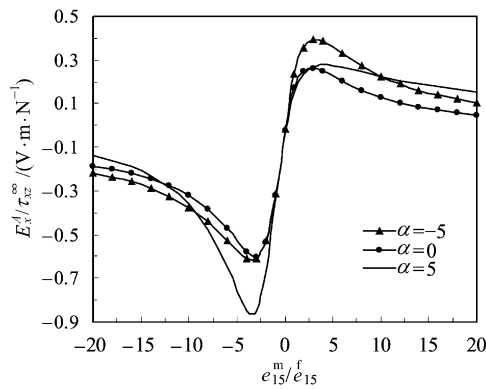
Fig. 3 Variations of the stress and electrical field at point A with  $\lg(C_{44}^c/C_{44}^f)$

(2) 纤维、涂层和基体都为压电材料。纤维、涂层和基体都为压电材料是一般情形,取  $C_{44}^f = 35.3 \text{ GPa}$ ,  $C_{44}^c/C_{44}^f = 0.5$ ,  $C_{44}^m/C_{44}^f = 0.1$ ,  $\epsilon_{11}^f = 15.1 \times 10^{-9} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $\epsilon_{11}^c/\epsilon_{11}^f = 0.5$ ,  $\epsilon_{11}^m/\epsilon_{11}^f = 0.1$ ,  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\gamma = r/R = 1.1$ ,定义  $\alpha = e_{15}^c/e_{15}^f$ 。图 4(a)和图 4(b)分别为 A 点应力和电场随基体压电系数  $e_{15}^m$  与纤维压电系数  $e_{15}^f$  比值的变化曲线。

不论  $\alpha$  如何取值, A 点应力随  $e_{15}^m/e_{15}^f$  的增大先增大而后减小, 并在  $e_{15}^m/e_{15}^f = 0$  处取得最小值, 然后随  $e_{15}^m/e_{15}^f$  的增大单调增大。



(a) 应力



(b) 电场

图 4 A 点应力和电场随  $e_{15}^m/e_{15}^f$  的变化

Fig. 4 Variations of the stress and electrical field at point A with  $e_{15}^m/e_{15}^f$

### 3.2 有效电弹系数

作为说明性的例子, 研究带涂层压电纤维增强环氧树脂复合材料的有效电弹系数  $C_{44}^e$ ,  $e_{15}^e$  和  $\epsilon_{11}^e$ 。压电复合材料各组分电弹系数见表 1。

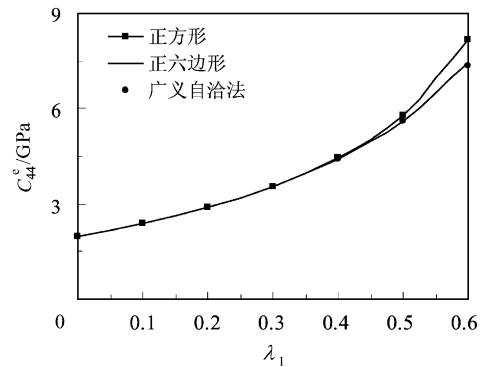
表 1 压电复合材料各组分参数

Table 1 Parameters of piezoelectric composites

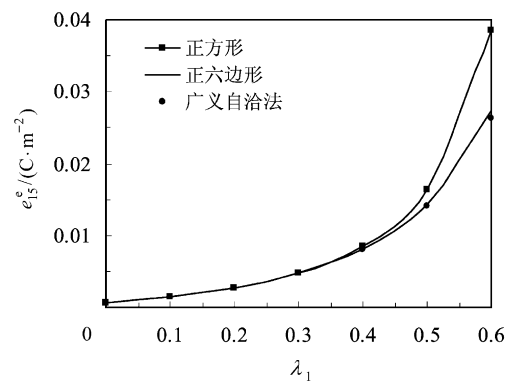
电弹系数	纤维 (PZT-5H)	涂层 (PZT-5)	基体
$C_{44}/\text{GPa}$	35.3	21.1	1.8
$e_{15}/(\text{C} \cdot \text{m}^{-2})$	17.0	12.3	0
$\epsilon_{11}/(10^{-9}\text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})$	15.100 00	8.107 00	0.037 17

图 5 给出了带涂层纤维正方形和正六边形排列的计算结果, 为了比较同时给出了压电材料广义自洽模型的预测值, 涂层体积分数  $\lambda_2 = 0.05$ 。可以发现当纤维的体积分数  $\lambda_1$  不太大时, 正方形

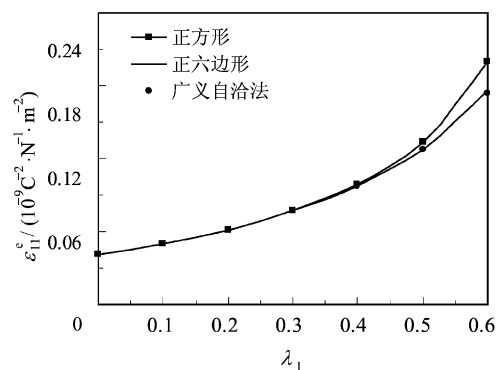
和正六边形的计算结果几乎相等, 随着纤维体积分数的增大, 两种排列的有效电弹系数开始出现差别, 带涂层纤维正方形排列的结果比正六边形排列的结果要大, 且随着纤维体积分数的增加而增大。广义自洽模型的预测值更接近正六边形排列时的结果。



(a) 有效弹性系数



(b) 有效压电系数



(c) 有效介电系数

图 5 有效电弹系数随纤维体积分数  $\lambda_1$  的变化

Fig. 5 Variations of the effective electroelastic coefficients with  $\lambda_1$

## 4 结论

获得了双周期带涂层纤维压电复合材料问题

在远场力电载荷作用时应力和电场的全场解。数值结果显示复合材料电弹场和有效电弹系数随着微结构电弹参数的改变呈现出非单调变化。带涂层纤维正六边形排列时的有效电弹系数值更接近广义自洽方法的预测结果。

### 参 考 文 献

- [1] Gandhi M V, Thompson B S. Smart materials and structures[M]. London: Chapman and Hall, 1992.
- [2] Dunn M L, Taya M. An analysis of piezoelectric composite materials containing ellipsoidal inhomogeneities [J]. Proc R Soc Lond, 1993, A 443(9):265-287.
- [3] He L H, Lim C W. Electromechanical responses of piezoelectric fiber composites with sliding interface under antiplane deformations[J]. Composites Part B: Engineering, 2003, 34(4):373-381.
- [4] Jiang C P, Cheung Y K. An exact solution for the three-phase piezoelectric cylinder model under antiplane shear and its applications to piezoelectric composites[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(28-29):4777-4796.
- [5] Jiang C P, Tong Z H, Cheung Y K. A generalized self-consistent method for piezoelectric fiber reinforced composites under antiplane shear[J]. Mechanics of Materials, 2001, 33(5):295-380.
- [6] Shen M H, Chen S N, Chen F M. Piezoelectric study on-conformally multicoated elliptical inclusion[J]. International Journal of Engineering Science, 2005, 43(17-18):1299-1312.
- [7] Saito M, Imanishi Y. Host-guest composites containing ultrasonically arranged particles[J]. Journal of Materials Science, 2000, 35(10):2373-2377.
- [8] 李凤明,汪越胜. 失谐周期压电复合材料结构中的波动局部化研究[J]. 航空学报, 2006, 27(1):38-43.  
Li Fengming, Wang Yueheng. Study on wave localization in disordered periodic piezoelectric composite structures [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2006, 27(1):38-43. (in Chinese)
- [9] Jiang C P, Xu Y L, Cheung Y K, et al. A rigorous analytical method for doubly periodic cylindrical inclusions under longitudinal shear and its application[J]. Mechanics of Materials, 2004, 36(3):225-237.
- [10] 徐耀玲,蒋持平. 双周期圆柱形夹杂纵向剪切问题的精确解[J]. 力学学报, 2003, 35(3):265-271.  
Xu Yaoling, Jiang Chiping. An exact solution for a doubly periodic array of cylindrical inclusions under longitudinal shear[J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, 35(3):265-271. (in Chinese)
- [11] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems[J]. Proc Roy Soc Lond, 1957, A241:376-396.
- [12] Xu Y L, Lo S H, Jiang C P, et al. Electroelastic behavior of doubly periodic piezoelectric fiber composites under antiplane shear[J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(3-4):976-995.
- [13] 谢新亮,肖俊华,蒋持平. 双周期电磁弹性纤维增强复合材料的纵向剪切问题[J]. 复合材料学报, 2005, 22(5):184-189.  
Xie Xinliang, Xiao Junhua, Jiang Chiping. Problems of magnetoelastic composites with doubly periodic fibers under longitudinal shear[J]. Acta Materialia Composita Sinica, 2005, 22(5):184-189. (in Chinese)
- [14] 路见可. 解析函数边值问题, (2版). [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.  
Lu Jianke. Boundary value problems for analytic function [M]. 2nd ed. Wuhan: Wuhan University Press, 2004. (in Chinese)
- [15] Li X. Application of doubly quasi-periodic boundary value problems in elasticity theory[D]. Berlin: Berlin University, 1999.

#### 作者简介:

谢新亮(1977—) 男, 硕士。主要研究方向: 复合材料力学。  
Tel: 010-82317508

肖俊华(1981—) 男, 博士研究生。主要研究方向: 复合材料力学和断裂力学。  
Tel: 010-82317508

徐耀玲(1968—) 男, 博士。主要研究方向: 复合材料力学。

蒋持平(1948—) 男, 博士, 教授, 博士生导师。主要研究方向: 复合材料力学, 断裂和损伤力学。  
Tel: 010-82317508

E-mail: jiangchiping@buaa.edu.cn

(责任编辑: 李铁柏)