

# 束流输运理论的新表述(II) ——线性力的检验

施义晋

(中国原子能科学研究院, 北京 275 信箱 18 分箱 102413)

**摘要** 用数值方法在恒定和周期线性力情况下对纯粹和混合系综检验了我们在文献[1]中所提出的输运理论框架的可靠性和优越性。结果表明, 该理论的数值计算和常用的粒子跟踪模拟完全一致, 但计算时间少, 误差涨落小。

**关键词** 束流输运

**ABSTRACT** In this paper, the theoretical frame for beam transport provided in reference [1] was checked by numerical calculation in the cases of pure and mixing assemblages with constant and periodical linear force. It shows that the results of numerical method are completely agree with the particle tracing simulation used commonly, but the former is more timesaving with less error fluctuation.

**KEY WORDS** beam transport

## 0 引言

在上一篇文章[1]中, 我们通过引进量子力学相空间表象, 将粒子束密度分布函数看作为相空间表象中的态矢量平方和(文章[1](20a), (20b)), 从而提出了求解 Vlasov 方程的新途径。一般来讲, 求解 Vlasov 方程是通过粒子跟踪模拟计算实现的。这种方法有许多优点, 但是至少有两个缺点: 一是必须有足够多的粒子样本, 否则涨落噪声将掩盖真实的物理信息, 因此, 意味着该方法是一个耗时的方法; 其次, 该方法通过求解常微分方程来跟踪抽样粒子的轨迹, 因此, 它本质上是一种单体理论, 即不直接包含粒子间的两体相互作用, 而用一种平均场近似来部分地计及两体相互作用(例如, 用泊松方程的耦合来计及粒子间的静电库仑力)。此外, 近年来由于对非线性力下的束流输运的关心, 粒子跟踪模拟计算中的粒子轨迹方程的稳定性和可积性将决定计算结果的可靠性(有时, 计算方法本身并不能解决不稳定性问题, 例如, 常用的四阶 Runge-Kutta 方法, 而不可积性则不能通过改进任何计算方法来解决)。因此, 我们需要寻求新的方法, 特别在非线性力情况下尤为必要。

我们提出的相空间表象理论<sup>[1]</sup>不同于粒子跟踪模拟, 它是通过数值方法求解相应的“Schrödinger”方程来获得粒子密度分布函数的。由于 Schrödinger 方程是一个线性方程, 只要势函数不包含波函数, 它的可积性是肯定的。因此不管输运系统中非线性力存在与否, 合适的数值方法一定能得到有意义的结果。此外, 由于 Schrödinger 方程的维数只是 Vlasov 方程的一半, 因此对脉冲束之类的非稳态系统的六维相空间分布函数提供了在小型机上也能运行的数值计算方法。

\* 1996年11月28日收到原稿, 1997年4月14日收到修改稿。  
施义晋, 男, 1940年出生, 研究员。

在下一篇文章中我们将指出, 由于相空间表象密度分布函数在非线形力情况下并不是 Vlasov 方程的严格解([1](31)式), 存在高阶导数项。而这些高阶项可以看作是关联, 也就是说, 单体的非线性力可以部分地等效于两体相互作用。如果我们找到了这个等价关系, 我们就找到了一种新的处理两体相互作用的方法。

由于篇幅的限制, 在文章[1]中只给出了证明的要点, 因此在阅读时造成了一定的困难, 妨碍了理解。为了使人们对我们的方法有更深的印象, 我们在本文中线性力用本方法作了计算, 与粒子模拟作了比较, 作为文章[1]的进一步注解。

为了使计算结果有更大的普遍性, 在第 1 部分, 我们首先将本理论的表式无量纲化, 第 2 部分给出了计算结果。

## 1 无量纲方程

在文[1]中, 我们以  $\alpha_0$  为量子化常数, 按正则量子化法则将动量和动能对应成相应的算符, 建立了 Schrodinger 方程

$$i\alpha_0 \frac{\partial \Psi(x, l)}{\partial t} = \left[ -\frac{\alpha_0^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, l) \right] \Psi(x, l) \quad (1)$$

其中  $\alpha_0$  为一理论参数, 它的量纲为 Planck 常数  $h/2\pi$  的量纲, 即  $[ML^2T^{-1}]$ , 因而  $2\alpha_0/(m\beta c)$  的量纲与束流发射度  $\epsilon$  量纲一致, 我们取  $\epsilon$  为横向与纵向位移  $x, l$  的单位, 这样  $x, l$  成为无量纲量。如果同时以  $mc^2$  ( $m$  为粒子质量,  $c$  为光速) 为能量单位, 则势能  $V$  也成为无量纲量。因此(1)式可改写为

$$i \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi(x, l)}{\partial t} = \left[ -\frac{(1/2)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, l) \right] \Psi(x, l) \quad (2)$$

当  $V(x, l) = V_2(l)x^2/2$  时, 相应于文[1]的(14)式, 我们有形式解:

$$\Phi_n(x, l) = x |n\rangle_l = \left( \frac{\sqrt{2}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \frac{H_n \left( \frac{x}{w(l)} \right)}{\sqrt{w(l)}} \xi(l)^{n+2} \exp \left[ -\frac{1+i\alpha_0(l)}{\beta_0(l)} x^2 - i\theta \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

其中  $\xi(l) = \exp \left[ -\frac{i}{4} \int_0^l \frac{d\tau}{\beta_0(\tau)} \right]$ ,  $w(l) = \sqrt{b_0(l)}$ ,  $H_n(y)$  为  $n$  阶 Hermite 多项式,  $\theta$  为常相位, (3)

式中所包含的 Twiss 参数  $\alpha_0(l)$ ,  $\beta_0(l)$  和  $\gamma_0(l)$  满足下列微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{d\beta_0(l)}{dl} = -2\alpha_0(l) \\ \frac{d\alpha_0(l)}{dl} = V_2(l)\beta_0(l) - \gamma_0(l) \\ \frac{d\gamma_0(l)}{dl} = 2V_2(l)\alpha_0(l) \end{cases} \quad (4)$$

和  $\beta_0(l)\gamma_0(l) = \alpha_0^2(l) + 1$

所谓相空间表象实质上也是以某种相干态为基的表象。不同于通常的 Glauber 相干态<sup>[2]</sup>, 我们定义复变量:

$$z(l) = \frac{1}{\sqrt{\beta_0(l)}} [q + i(\beta_0(l)p + \alpha_0(l)q)] \quad (5)$$

为相干态的基底空间矢量,  $q, p$  为二个实变量, 分别对应横向坐标和相应动量  $p = \hbar dq/dl$ , (在相对论情况下,  $p = \beta \gamma \hbar dq/dl$ ,  $\beta, \gamma$  分别为相对速度与相对论因子)。在这样的定义下, Schrodinger 方程(2)的一般解  $\Psi(x, l)$  可以通过下列 Bargmann 变换变换为相空间表象波函数  $\Psi(p, q; l)$

$$\Psi(p, q; l) = \int dx \Phi_{pq}^*(x, l) \Psi(x, l) \quad (6)$$

其中变换核函数

$$\Phi_{pq}^*(x, l) = \left[ \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\pi w(l)}} \right]^{1/2} \xi^*(l)^2 \cdot \exp \left\{ - \frac{1}{\beta_0(l)} [(q-x)^2 - i(\beta_0(l)p + \alpha_0(l)q)(q-2x) - i\alpha_0(l)x^2] + i\theta \right\}$$

由此, 我们定义束流横向相空间密度分布函数  $\rho_s(p, q; l)$  为

$$\rho_s(p, q; l) = |\Psi(p, q; l)|^2 \quad \text{对纯态系综} \quad (7a)$$

$$\rho_s(p, q; l) = \sum_{m=0} a_m |\Psi_m(p, q; l)|^2 \quad \text{对混合系综} \quad (7b)$$

我们在文[1]中已经证明, 当势函数  $V(x, l) = V_2(l)x^2/2$  时, (7)式给出的  $\rho_s(p, q; l)$  的演化严格地遵从势函数为  $V(x, l) = V_2(l)q^2/2$  时的 Vlasov 方程, 因此它是完全严格的束流粒子相空间分布密度函数, 文[1]的证明是完全严格的数学证明, 为了给予人们一个更深的印象, 下一节我们给予数值计算来检验这一证明。

## 2 数值检验

方程(2)是自由边界的时间( $l$ )演化方程, 我们在研究自由电子激光理论时已发展了一种被称之为直接求逆法的数值方法<sup>[3]</sup>来求解这类方程。因此, 只要补充 Bargmann 变换积分(6)和相应的 Twiss 参数  $\alpha_0(l), \beta_0(l), \gamma_0(l)$  的常微分方程(4)求解程序就可实现密度分布函数  $\rho_s(p, q; l)$  的计算。

作为对比, 我们在同样的初始条件  $\rho_s(p, q; 0)$  下也作了粒子跟踪模拟计算。粒子样本数为十万。我们计算了下面四种情况:

i) 恒定线性力

$$V(x, l) = \frac{1}{2} V_{20} x^2 \quad (8)$$

取  $V_{20} = \left[ \frac{1+\Delta}{1-\Delta} \right] \frac{1}{\beta_0^2(0)}$ ,  $\Delta = 0.4$ ,  $\beta_0(0) = 100$ ,  $\Delta$  的含义为束半径振荡幅度与其平均值之比。计算的输运距离  $L = l_{\max} = \frac{\pi}{2\sqrt{V_{20}}}$ , 这个长度的选取是按腰-腰传输的要求定的, 初始密度分布取为:

$$\rho_s(p, q; 0) = |\Phi_0(p, q; 0)|^2 = \frac{1}{\pi} \exp(\beta_0(0)p^2 + 2\alpha_0(0)pq + \gamma_0(0)q^2) \quad (9)$$

式中  $\alpha_0(0) = 0$ 。图 1 给出两种计算的结果, 列出了纵向位置  $l = 0.5L, 1.0L$  两处的粒子密度分布等高图, 上排为粒子跟踪模拟, 下排为数值计算, 等高线上所标的数值为相对于分布函数的极大值的比值。从图上可以看到, 除了模拟方法粒子数涨落所引起的非物理不光滑外, 两者是完全一致的。

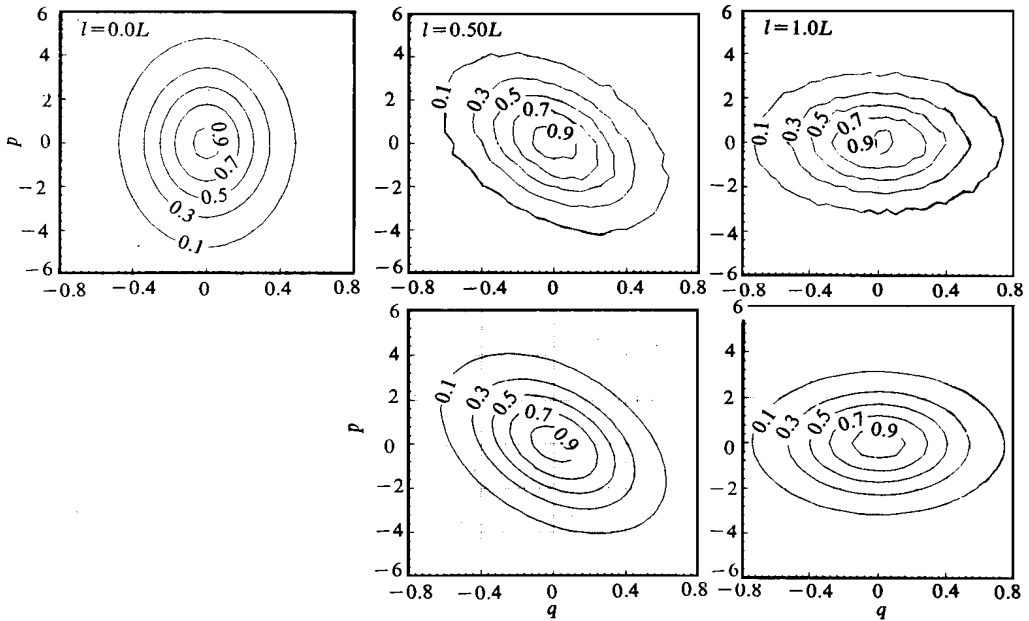


Fig 1 The evolution of the phase density distribution (contour map) with constant linear force

The parameters used here are shown in the text

The upper row is for the particle simulation and lowers for "Schrodinger" equation numerical calculation

图 1 常数线性力体系相空间密度分布函数(等高线)演化图。参数见正文。

上排为粒子模拟计算,下排为"Schrodinger"方程数值计算结果。

大家都知道对恒定线性力体系, 输运方程存在解析解。束半径演化规律为:

$$w^2(l) = \frac{w^2(0)}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{V_{20} w^4(0)} \right) \cos(2\sqrt{V_{20}}l) + \left( 1 + \frac{1}{V_{20} w^4(0)} \right) \right] \quad (10)$$

而等高线方程为:

$$\beta_0(l)p^2 + 2\alpha_0(l)pq + \gamma_0(l)q^2 = con \quad (11)$$

其中 con 为一常数。这是一个椭圆方程。可以证明在恒定线性力情况下, 这个椭圆不仅保持面积不变, 而且保持形状也不变。椭圆轴以恒定角速率  $\sqrt{V_{20}}$  绕相平面原点旋转。图 1 结果完全再现了这些结论。

ii) 周期线性力

$$V(x, l) = \frac{1}{2} V_2(l) x^2, \text{ 其中 } V_2(l) = V_{21} \sin(kl) \quad (12)$$

计算中取  $V_{21} = V_{20}, k = \frac{2\pi}{L}, L = l_{max} = \frac{\pi}{2\sqrt{V_{21}}}$ 。初始分布与上一样, 结果见图 2。两种方法结果完全一样。

iii) 力与 ii) 一样, 但初始分布为一较复杂的纯态, 为三个基的线性叠加:

$$\rho_s(p, q; 0) = |\Psi(p, q; 0)|^2 = \left| \sum_{n=0}^2 c_n \Phi_n(p, q; 0) \right|^2 \quad (13)$$

其中  $\Phi_n(p, q; l) = \int dx \Phi_q^*(x, l) \Phi_n(x, l)$ , 而波函数振幅  $c_0^2 = 0.3, c_1^2 = 0.3, c_2^2 = 0.4$ , 且  $c_n$  均为实

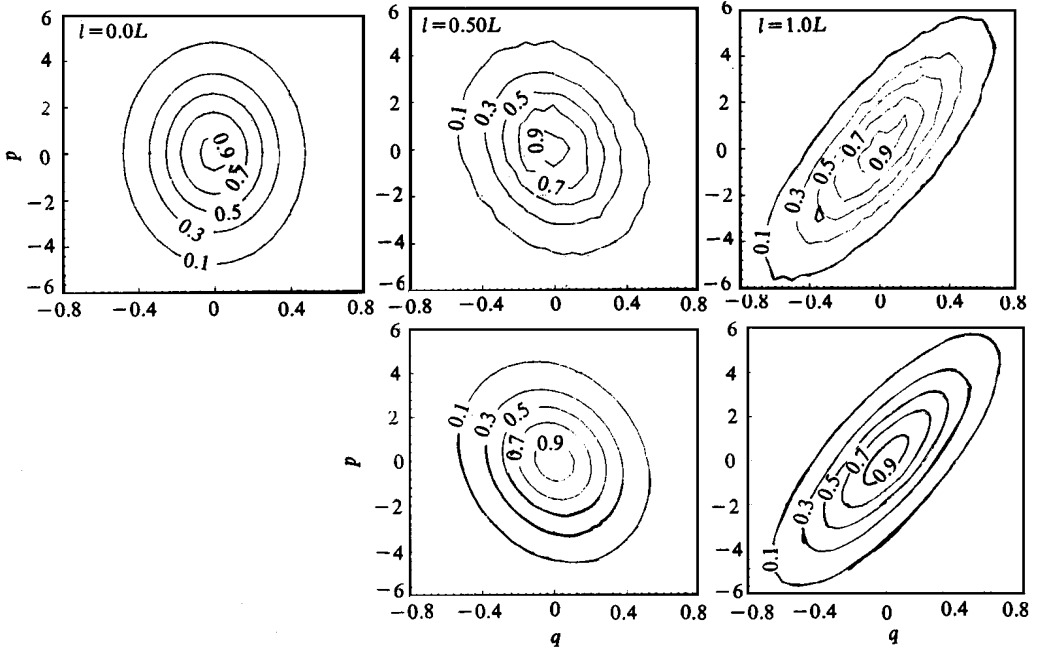


Fig 2 The evolution of the phase density distribution (contour map) with period linear force

The parameters are similar to those in Fig 1. Seeing the text for detail

图 2 周期线性力体系相空间密度分布函数(等高线)演化图, 参数与图 1 类似, 见正文

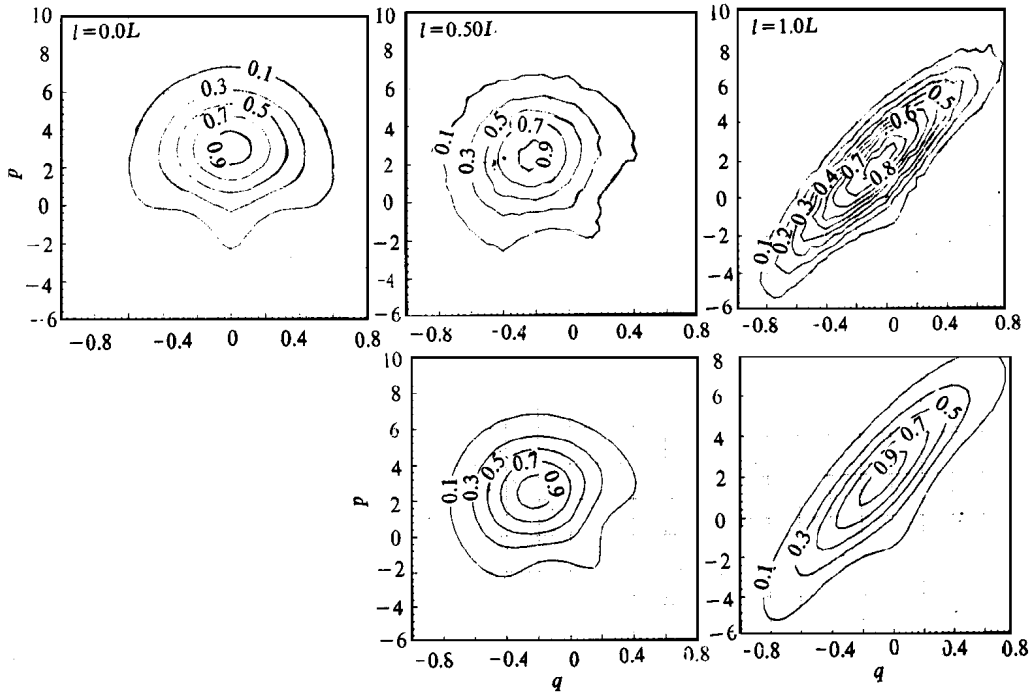


Fig 3 The evolution of phase density distribution with period linear force, parameters same as in Fig 2, but with different initial distribution, which is a pure state consisting of three base vectors of the system

图 3 周期线性力体系相空间密度分布函数(等高线)演化图, 参数同图 2, 但初始分布不同, 为一较复杂的纯态

数,其他参数同 ii)。图 3 为计算结果,可以看到两种方法仍然完全一致。

iv) 体系所受的力仍然与 ii) 一样,但初始分布为一混合系综,由三个纯粹系综混合而成:

$$\rho_s(p, q; 0) = \sum_{m=0}^2 a_m |\Phi_m(p, q; 0)|^2 = \sum_{m=0}^2 a_m \frac{|z(0)|^{2m}}{\pi m!} \exp(-|z(0)|^2) \quad (14)$$

其中几率振幅  $a_m$  为实数,取为  $a_0=0.3, a_1=0.3, a_2=0.4$ ,其他参数不变。在这里,由于体系状态不能用单一的波函数来表达,而用了三个,因此需要三次求解 Schrodinger 方程(2),分别作三次变换(6)。从这一点来讲,粒子模拟要比它有利。在这里粒子模拟用不着分三次计算。有意思的是即使在这样的情况下,两者仍然给出完全一致的结果,见图 4。

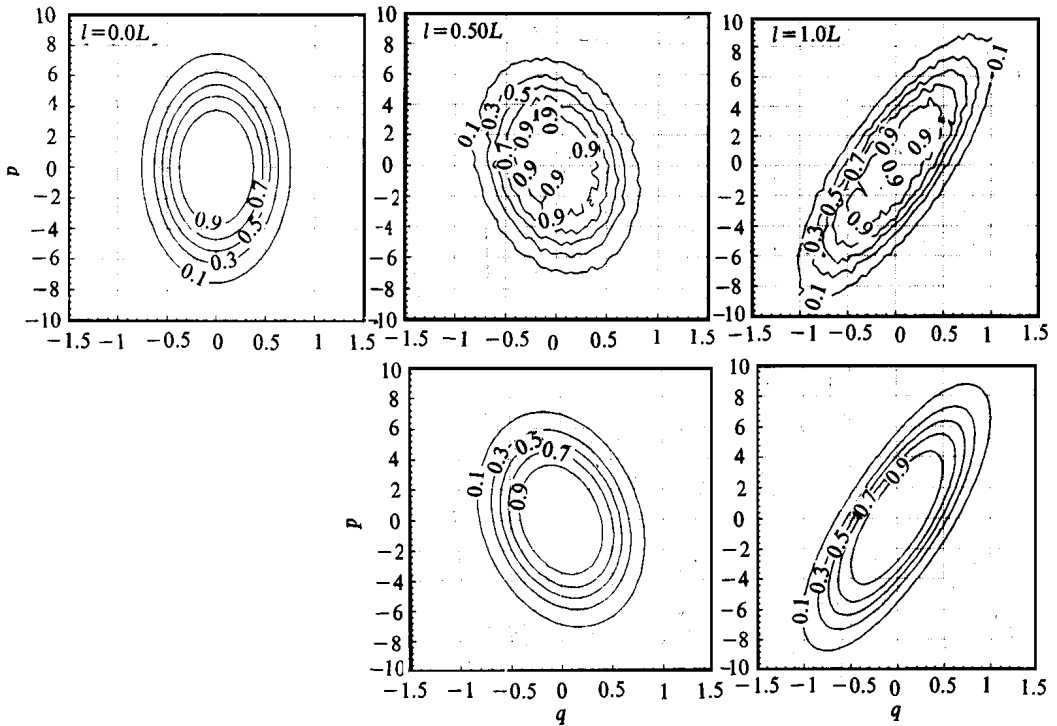


Fig 4 The evolution of the phase density distribution (contour map) with period linear force. The parameters are the same as in Fig 2, but with different initial distribution, which is a mixing assemblage  
图 4 周期线性力体系相空间密度分布函数(等高线)演化图。参数同图 2,但初始分布不同,为一混合系综

### 3 结 语

本文将束流输运新表述<sup>[1]</sup>无量纲化了。无量纲方程(2)相当于粒子质量  $m = 1$ , 量子化常数  $\hbar/2\pi = 1/2$  的单粒子体系,相空间与传输距离也均按初始发射度无量纲化,因此使计算结果具有较大的普适性。

通过恒定的和周期的线性力,单模和多模纯粹系综,以及混合系综的具体例子计算,从数值上说明了,在线性力情况下方程(2)的解确实也是相应体系的 Vlasov 方程的解(粒子跟踪模拟),而求方程(2)的数值解的工作量一般来讲要较粒子模拟少,更不用说 Vlasov 方程的数值求解了。

现在留下的问题是在非线性力情况下事情将会怎样。下一篇文章将讨论非线性力以及包含两体相互作用束流体系的输运问题。

## 参考文献

- 1 施义晋等. 强激光与粒子束, 1995, 7: 381
- 2 Glauber R. J. *Phys Rev Lett* 1963, **10**: 277
- 3 施义晋, 翁自立. 计算物理, 1993, **10**: 471

## NEW REPRESENTATION OF THE BEAM TRANSPORT THEORY (II) —— CHECK ON THE CASES OF LINEAR FORCES

Shi Yijin

*China Institute of Atomic Energy, P. O. Box 275(18), Beijing 102413*

Beam transport is important in the design of accelerators and other beam instruments. A new representation of it was provided in reference [1]. By limitation of the allowed page space, only unmissable keypoints of the theory is given in paper [1]. It makes obstacle to understanding the contents of theory. It is the reason for this paper that is to make deeper impression by a set of numerical examples. In the paper, the theory was checked in the cases of pure and mixing assemblage with constant and periodical linear forces. It shows that the results of numerical method are completely agree with the particle tracing simulation used usually, but the former is more time-saving with less numerical fluctuation. As well known, the particle tracing is equivalent to the resolution of the Vlasov's equation, which means the phase space density distribution defined in the new theory is a real one in the linear force cases at least.