

文章编号:1000-6893(2007)03-0678-07

一阶滞后对象广义预测控制下的 闭环稳定性分析

李 韬¹, 张纪峰¹, 陈增强²

(1. 中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100080)

(2. 南开大学 自动化系, 天津 300071)

Closed-loop Stability Analysis of Time-delayed First-order Systems Under Generalized Predictive Control

LI Tao¹, ZHANG Ji-feng¹, CHEN Zeng-qiang²

(1. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 10080, China)

(2. Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China)

摘 要: 利用参数模型和非参数模型相结合的方法, 给出了一阶滞后对象在广义预测控制下闭环稳定的充要条件。发现: (1) 对开环稳定的一阶滞后对象, 总存在一组控制器参数, 使得在该控制器控制下, 无论对象的开环增益 K 与时间常数 T 如何变化, 闭环系统都保持稳定; (2) 对于开环不稳定的一阶滞后对象, 无论控制器参数如何选取, 当 K 和 T 的变化超出一定范围时, 闭环系统就会失去稳定性。

关键词: 预测控制; 稳定性条件; 一阶对象; 时间滞后; 鲁棒性

中图分类号: V249.121; TP273⁺.2 **文献标识码:** A

Abstract: The necessary and sufficient conditions are established for the closed-loop stability of generalized predictive control (GPC) applied to first order systems with time-delay by combining parametric and non-parametric models. It is shown that: (1) if the open-loop system is stable, then there must be a controller such that the closed-loop system will remain stable whatever the open-loop gain K and the time constant T change into; (2) while if the open-loop system is unstable, then whatever the controller parameters are chosen as, the closed-loop stability will be lost when K and T go out of the stability region.

Key words: predictive control; stability condition; first order system; time-delay; robustness

1987 年 Clarke 等人将自校正控制与预测控制相结合提出了广义预测控制(GPC)^[1], 在复杂工业过程和飞行器控制中获得了成功的应用^[2-6]。由于 GPC 算法的特殊性, 模型参数和控制器参数与闭环特征多项式呈复杂的非线性关系, 给 GPC 控制下的闭环系统的稳定性分析带来了困难。目前, 虽有一些对原始 GPC 算法的闭环系统的稳定性分析, 但都是在特殊的条件下得出的。如文献[1,2]给出了控制加权系数 λ 趋于零时闭环系统稳定的充分条件。文献[7]建立了 GPC 与 Kleinman 控制器的等价关系, 推广了文献[1]的结果, 但仍然要求 λ 充分小或为零。

广义预测控制与实际工程联系紧密, 针对不同的典型工业过程, 分门别类地分析控制参数与

闭环稳定性的关系, 以决定其选取方法将不失为良好的对策。工业对象通常由许多动态元件组成, 在平衡点附近可以用线性高阶对象描述, 但这类高阶模型由于过于复杂, 并不适于控制器设计。一阶滞后对象是对各种过阻尼系统的良好近似, 在工业过程, 尤其在流程工业中十分常见^[8-10]。已经有很多有关这类系统的预测控制的应用研究^[11,12]。但到目前为止, 即使对这类简单系统的广义预测控制, 也缺乏严格而完整的闭环系统稳定性研究。

本文利用参数模型和非参数模型相结合的方法得到了广义预测控制下闭环系统特征多项式的新的表达形式, 利用这种表达形式分析了一阶滞后对象在 GPC 控制下的闭环系统的稳定性, 得到了闭环系统稳定的充分必要条件。发现: (1) 对开环稳定的一阶滞后对象, 只需要控制时域 $N_u = 1$ 且预测时域 N_y 大于或等于对象的总时延, 闭环

收稿日期:2006-08-24; 修订日期:2007-04-02

基金项目:国家自然科学基金(60221301,60334040,60428304)

通讯作者:张纪峰 E-mail:jif@iss.ac.cn

系统就能保持渐近稳定,而与对象的开环增益和时间常数无关。(2)对开环不稳定的一阶滞后对象,无论控制器参数 N_y, N_u 及控制加权系数 λ 如何选取,当开环增益和时间常数的变化超出一定范围时,闭环系统就会失去稳定性。为便于控制器设计给出了当 $N_u=1$ 时,可以保证闭环系统稳定的 λ 的稳定域紧上界。

1 广义预测控制下的闭环系统

广义预测控制主要针对如下常用的 CARIMA 被控对象模型

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-1}B(z^{-1})u(t) + C(z^{-1})\varepsilon(t)/\Delta \quad (1)$$

式中: $y(t), u(t)$ 分别为系统的输出和控制; $\varepsilon(t)$ 为零均值白噪声; z^{-1} 为后移算子; $\Delta=1-z^{-1}$, 为向后一阶差分算子; $A(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i}$, $B(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n_b} b_i z^{-i}$, $C(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i}$ 为后移算子多项式。

对模型式(1)假设:

(H. 1) $C(z^{-1})$ 的零点全部在单位圆内。

广义预测控制律的指标取如下形式

$$J = E \left\{ \sum_{j=1}^{N_y} [w(t+j) - y(t+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u(t+j-1)]^2 \right\} \quad (2)$$

式中: N_y 为预测时域长度; N_u 为控制时域长度; $N_y \geq N_u, \lambda \geq 0$ 为控制加权系数; $w(t)$ 为给定值序列。

通过求解 Diophantine 方程

$$\left. \begin{aligned} C(z^{-1}) &= A(z^{-1})\Delta E_j(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}) \\ E_j(z^{-1})B(z^{-1}) &= G_j(z^{-1})C(z^{-1}) + z^{-j}H_j(z^{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

可求得输出 j 步向前最优预测

$$\hat{y}(t+j) = y_j(t) + G_j(z^{-1})\Delta u(t+j-1) \quad (j = 1, \dots, N_y)$$

其中对 $j=1, \dots, N_y$,

$$\begin{aligned} G_j(z^{-1}) &= g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{j-1} z^{-(j-1)} \quad (4) \\ y_j(t) &= \frac{F_j(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(t) + \frac{z^{-j}H_j(z^{-1})}{C(z^{-1})}\Delta u(t) \quad (5) \end{aligned}$$

极小化式(2),得到广义预测控制律

$$u(t) = u(t-1) + \boldsymbol{\eta}^T (\mathbf{R}^T \mathbf{R} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{R}^T (\bar{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{y}}_p) \quad (6)$$

式中: $\bar{\mathbf{y}}_p = [y_1(t) \ \dots \ y_{N_y}(t)]^T$; $\bar{\mathbf{w}} = [w(t+1)$

$\dots \ w(t+N_y)]^T$;

$$\mathbf{R} \triangleq \begin{bmatrix} g_0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ g_{N_y-1} & \ddots & \ddots & g_0 & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ g_{N_y-1} & \dots & \dots & g_{N_y-N_u} \end{bmatrix}_{N_y \times N_u};$$

\mathbf{I} 为 N_u 维的单位矩阵。令

$$\mathbf{d}_c^T = \boldsymbol{\eta}^T (\mathbf{R}^T \mathbf{R} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{R}^T \triangleq [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N_y}] \quad (7)$$

则控制律式(6)可写为 $\Delta u(t) = \mathbf{d}_c^T (\bar{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{y}}_p)$ 。这里只保留了下文所用到的符号说明,详细推导可见文献[1]。

下面推导广义预测控制系统的闭环特征多项式,推导过程中需要利用被控对象的一个重要非参数模型——阶跃响应模型。由于分析的是闭环稳定性,所以不妨假设 $w(t) \equiv 0$ 。

引理 1^[13] 多项式 $G_j(z^{-1})$ 的前 j 项系数就是被控对象阶跃响应前 j 个采样时刻的值,即在收敛域内 $\frac{z^{-1}B}{A\Delta} = g_0 z^{-1} + g_1 z^{-2} + \dots + g_j z^{-(j+1)} + \dots$ 。

定理 1 广义预测控制系统的闭环特征多项式可以表示为

$$\begin{aligned} \Psi(z^{-1}) &= C(z^{-1})A(z^{-1}) \left[1 + z^{-1} \left(\sum_{j=1}^{N_y} \beta_j g_j - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. z^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{N_y} \beta_j (g_{j+i} - g_{j+i-1}) \right) z^{-i} \right] \quad (8) \end{aligned}$$

证明 记

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}(z^{-1}) &= [F_1(z^{-1}) \ F_2(z^{-1}) \ \dots \ F_{N_y}(z^{-1})]^T \\ \bar{\mathbf{H}}(z^{-1}) &= [H_1(z^{-1}) \ H_2(z^{-1}) \ \dots \ H_{N_y}(z^{-1})]^T \end{aligned}$$

为叙述简单,在不致引起混淆的情况下,下面将略去多项式中的 z^{-1} 。例如, $A(z^{-1})$ 略为 $A, \bar{\mathbf{F}}(z^{-1})$ 略为 $\bar{\mathbf{F}}$ 。由式(5)得 $\bar{\mathbf{y}}_p = (\bar{\mathbf{F}}/C)y(t) + (z^{-1}\Delta\bar{\mathbf{H}}/C) \cdot u(t)$, 将其代入式(6)得 $(C + z^{-1}\mathbf{d}_c^T\bar{\mathbf{H}})\Delta u(t) = -\mathbf{d}_c^T\bar{\mathbf{F}}y(t)$ 。由此及式(1)得系统的闭环特征多项式为

$$\Psi(z^{-1}) = A\Delta + z^{-1}\mathbf{d}_c^T(A\Delta\bar{\mathbf{H}} + B\bar{\mathbf{F}}) \quad (9)$$

由式(3)得 $A\Delta H_j + B F_j = C z^j (B - A\Delta G_j)$ 。由此及式(4)、引理 1 得 $\mathbf{d}_c^T (A\Delta\bar{\mathbf{H}} + B\bar{\mathbf{F}}) = AC \cdot \left[\sum_{j=1}^{N_y} \beta_j g_j + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{N_y} \beta_j (g_{j+i} - g_{j+i-1}) \right) z^{-i} \right]$, 将上式代入式(9)即得式(8)。

注 1 由定理 1 的证明可以看出,广义预测控制下闭环系统特征多项式可以表示为

$$\Psi(z^{-1}) = C(A\Delta + z^{-1}\mathbf{d}_c^T\bar{\mathbf{S}})$$

其中: $\bar{\mathbf{S}}(z^{-1}) = [z^1(B - A\Delta G_1) \cdots z^{N_y}(B - A\Delta G_{N_y})]^T$.

可见 $C(z^{-1})$ 的零点同时是闭环系统特征多项式的零点, 因此(H. 1)对于系统式(1)在广义预测控制下的闭环稳定性是必要条件. 此外, 对于典型的工业过程, $C(z^{-1})$ 通常是时变的, 这时可以根据对噪声过程的先验知识选取 $T(z^{-1})$ 代替 $C(z^{-1})$, 这时也要求 $T(z^{-1})$ 的零点在单位圆内, 具体说明可参见文献[1].

2 一阶滞后对象 GPC 下闭环稳定性条件

一阶滞后对象传递函数模型为

$$\frac{Ke^{-\tau}}{1 + Ts} \quad (10)$$

式中: $K > 0$ 为开环增益; $T \neq 0$ 为时间常数; $\tau \geq 0$ 为时延.

注 2 一阶滞后模型式(10)不仅是许多工业控制对象的数学模型, 而且广泛存在于航空航天飞行器控制系统中, 如电机的速度控制模型^[14], 惯性导航的温控对象模型^[15], 导弹飞行控制系统中俯仰角到弹道倾角的纵向控制模型^[16,17], 空间飞行器驾驶员模型^[18,19]等. 研究这类系统在广义预测控制下的闭环稳定性不仅有利于 GPC 这种先进控制策略在航空航天控制领域的应用, 而且将为最终解决一般类型的对象在 GPC 控制下的闭环稳定性这个理论难题提供有益的启发.

设 T_s 为采样时间间隔, 则式(10)带零阶保持器离散化后的系统具有如下形式

$$\frac{b_{d-1}z^{-d}}{1 + a_1z^{-1}}$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -e^{-T_s/T} \\ b_{d-1} &= K(1 + a_1) \\ d-1 &= \left\lceil \frac{\tau}{T_s} \right\rceil \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这里 $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数. 由式(11)易知一阶滞后对象的采样模型满足

$$(H. 2A) \quad a_1 \in (-1, 0), b_{d-1} > 0 \quad \text{或者}$$

$$(H. 2B) \quad a_1 \in (-\infty, -1), b_{d-1} < 0$$

所以不失一般性, 这里只考虑满足条件(H. 2A)或(H. 2B)的如下开环系统

$$(1 + a_1z^{-1})y(t) = b_{d-1}z^{-d}u(t) + C(z^{-1})\varepsilon(t)/\Delta \quad (12)$$

可见系统式(12)是系统式(1)的一种特殊形式. 该离散系统的阶跃响应系数为

$$g_j = \begin{cases} 0 & (j = 0, 1, \dots, d-2) \\ b_{d-1} \sum_{k=0}^{j-d+1} (-a_1)^k & (j \geq d-1) \end{cases} \quad (13)$$

由式(11)易知(H. 2A)对应 $T > 0$ 的情形, 此时模型式(10)称为稳定的一阶滞后对象^[8]; (H. 2B)对应 $T < 0$ 的情形, 此时模型式(10)称为不稳定的一阶滞后对象. 本文将给出这两类对象在 GPC 控制下闭环系统稳定的充要条件. 为了突出所研究问题的本质, 有如下基本假设

$$(H. 3) \quad N_y \geq d, N_u = 1$$

注 3 当 $N_y < d$ 时, 由 \mathbf{R} 的定义和引理 1 可知 \mathbf{R} 为零矩阵, 从而由式(7)和式(6)可以看出 $\Delta u(t) \equiv 0$, 由模型式(1)知闭环系统为 $A(z^{-1}) \cdot \Delta y(t) = C(z^{-1})\varepsilon(t)$, 显然是不稳定的. 因此 $N_y \geq d$, 即预测时域至少等于对象的总时延不仅对于一阶滞后对象式(12), 而且对于所有的 CA-RIMA 受控对象式(1)在广义预测控制下的闭环稳定性都是必要条件, 这也是文献[1]建议选取较大的 N_y , 最好接近对象的上升时间的一个重要原因.

当 $\tau = 0 (d = 1)$ 时, 式(10)即一阶对象, 这时 N_y 可以选取任意的正整数.

对于 N_u , 文献[1]指出当 N_u 大到一定数值后继续增大对系统性能几乎不会产生作用, 对于典型的工业对象模型, 选取 $N_u = 1$ 已经足够了; 对于较复杂的系统, 如耦合振荡器的控制, 建议选取 N_u 至少等于被控对象不稳定极点或劣阻尼极点的个数. 因此, 对于一阶滞后对象, 选取 $N_u = 1$ 是合适的. 另外, 广义预测控制的很大一部分计算量在于矩阵 $(\mathbf{R}^T \mathbf{R} + \lambda \mathbf{I})$ 的求逆, 该矩阵是 N_u 维的, 因此当较小的 N_u 能够满足性能要求时, 就没有必要选用大的 N_u . 事实上后文的分析表明, 对于开环稳定对象, 选取 $N_u = 1$ 就可以使闭环系统稳定, 且控制器具有较强的鲁棒性.

当 $N_u = 1$ 时, 由式(7)和式(13)得

$$\beta_j = \begin{cases} 0 & (j = 0, 1, \dots, d-1) \\ \frac{g_{j-1}}{N_y - 1} & (j \geq d) \\ \lambda + \sum_{i=d-1}^j g_i^2 & \end{cases} \quad (14)$$

引理 2 模型式(12)在 GPC 下的闭环特征多项式为

$$\Psi(z^{-1}) = C(1 + \mathbf{Q}_1 z^{-1} + \mathbf{Q}_2 z^{-2}) \quad (15)$$

式中: $\mathbf{Q}_1 = \sum_{j=d}^{N_y} \beta_j g_j + a_1 - 1$; $\mathbf{Q}_2 = a_1 (\sum_{j=d}^{N_y} \beta_j g_j - 1) + b_{d-1} \sum_{j=d}^{N_y} \beta_j (-a_1)^{j-d+2}$.

证明 由式(14)和式(13)及定理 1,通过直接计算化简即得式(15)。

引理 3 若 (H. 1)、(H. 2A) 或 (H. 2B)、(H. 3)成立,则对象式(12)在 GPC 控制下闭环系统渐近稳定的充要条件为

$$b_{d-1} \sum_{j=d}^{N_y} \beta_j > 0 \quad (16)$$

$$\frac{b_{d-1}}{1+a_1} \sum_{j=d}^{N_y} \beta_j (a_1 + (-a_1)^{j-d+2}) < 1 + a_1 \quad (17)$$

$$2(1-a_1) + \frac{b_{d-1}(a_1-1)}{1+a_1} \sum_{j=d}^{N_y} \beta_j +$$

$$\frac{2b_{d-1}}{1+a_1} \sum_{j=d}^{N_y} \beta_j (-a_1)^{j-d+2} > 0 \quad (18)$$

证明 由引理 2 和 Jury 判据^[20],闭环渐近稳定的充要条件为

$$\begin{cases} 1 + Q_1 + Q_2 > 0 \\ Q_2 < 1 \\ 1 - Q_1 + Q_2 > 0 \end{cases}$$

由此及 Q_1, Q_2 的定义,化简即得式(16)~式(18)。

注 4 引理 3 中的这 3 项条件同时成立也是 $N_u > 1$ 时闭环稳定的充要条件。

定理 2 若 (H. 1)、(H. 2A)、(H. 3)成立,则对象式(12)在 GPC 控制下闭环系统是渐近稳定的。

证明 由 (H. 2A) 及式(14)和式(13)知 $\beta_j > 0, j = d, \dots, N_y$; 由式(11)知 $\sum_{j=d}^{N_y} \beta_j [-a_1 - (-a_1)^{j-d+2}] \geq 0$ 。因此,式(16)和式(17)成立。所以只需证式(18)。

由式(14)和式(13)得

$$\frac{b_{d-1}(a_1-1)}{1+a_1} \sum_{j=d}^{N_y} \beta_j + \frac{2b_{d-1}}{1+a_1} \sum_{j=d}^{N_y} \beta_j (-a_1)^{j-d+2} = \frac{b_{d-1}^2}{(\lambda + \sum_{i=d-1}^{N_y-1} g_i^2)(1+a_1)^2} \cdot \sum_{j=d}^{N_y} [1 - (-a_1)^{j-d+1}][a_1 - 1 + 2(-a_1)^{j-d+2}] \quad (19)$$

由 (H. 2A) 知

$$\left. \begin{aligned} 1 - (-a_1)^{j-d+1} > 0 \\ a_1 - 1 + 2(-a_1)^{j-d+2} < 0 \end{aligned} \right\} j \geq d \quad (20)$$

由式(13)知 $g_j = b_{d-1} \frac{[1 - (-a_1)^{j-d+2}]}{1+a_1}, j \geq d-1$

从而

$$\sum_{j=d-1}^{N_y-1} g_j^2 = \frac{b_{d-1}^2}{(1+a_1)^2} \sum_{j=d-1}^{N_y-1} [1 - (-a_1)^{j-d+2}] \quad (21)$$

注意到

$$\sum_{j=d}^{N_y} [1 - (-a_1)^{j-d+1}][-a_1 + 1 - 2(-a_1)^{j-d+2}] - 2(1-a_1) \sum_{j=d-1}^{N_y-1} (1 - (-a_1)^{j-d+2})^2 =$$

$$\sum_{j=d}^{N_y} [1 - (-a_1)^{j-d+1}][a_1 - 1 + 2(-a_1)^{j-d+1}],$$

从而由式(20)和式(21),及 $\lambda \geq 0$ 得

$$\frac{b_{d-1}^2}{(\lambda + \sum_{i=d-1}^{N_y-1} g_i^2)(1+a_1)^2} \sum_{j=d}^{N_y} [1 - (-a_1)^{j-d+1}] \cdot$$

$$[-a_1 + 1 - 2(-a_1)^{j-d+2}] < 2(1-a_1) \quad (22)$$

再由式(19)知式(18)成立。

定理 3 若 (H. 1)、(H. 2B)、(H. 3)成立,则对象式(12)在 GPC 控制下,闭环稳定的充要条件为

$$\lambda < \frac{-b_{d-1}^2 \sum_{j=d}^{N_y} [(-a_1)^{j-d+1} - 1]^2}{(1+a_1)^3} \triangleq \lambda^* \quad (23)$$

证明 由式(14)和式(13)可得 $b_{d-1} \sum_{j=d}^{N_y} \beta_j =$

$$\sum_{j=d}^{N_y} \frac{b_{d-1}^2 [1 - (-a_1)^{j-d+1}]}{(1+a_1)^2 (\lambda + \sum_{i=d-1}^{N_y-1} g_i^2)}$$

。由此及 (H. 2B) 知式(16)成立。即在定理的条件下,式(16)是自然成立的。因此,闭环稳定的充要条件为式(17)和式(18)。

由 (H. 2B) 得 $1 - (-a_1)^{j-d+1} < 0, a_1 - 1 + 2(-a_1)^{j-d+2} > 0, j \geq d$ 。由此,类似于定理 2 的证明可得 $\sum_{j=d}^{N_y} [1 - (-a_1)^{j-d+1}][a_1 - 1 + 2(-a_1)^{j-d+2}] + 2(1-a_1) \sum_{i=d-1}^{N_y-1} [(-a_1)^{j-d+2} - 1]^2 = \sum_{j=d}^{N_y} [(-a_1)^{j-d+1} - 1][a_1 - 1 + 2(-a_1)^{j-d+1}] > 0$ 。再由式(21)及 $\lambda \geq 0$ 得

$$2(1-a_1) + \frac{b_{d-1}^2}{(\lambda + \sum_{i=d-1}^{N_y-1} g_i^2)(1+a_1)^2} \cdot$$

$$\sum_{j=d}^{N_y} [1 - (-a_1)^{j-d+1}][a_1 - 1 + 2(-a_1)^{j-d+2}] > 0 \quad (24)$$

由式(19)和式(24)知式(18)成立,所以闭环稳定的充要条件为式(17)。

由 (H. 2B) 及

$$\frac{b_{d-1}}{1+a_1} \sum_{j=d}^{N_y} \beta_j (a_1 + (-a_1)^{j-d+2}) = \frac{b_{d-1}^2 a_1}{(\lambda + \sum_{i=d-1}^{N_y-1} g_i^2) (1+a_1)^2} \sum_{j=d}^{N_y} [(-a_1)^{j-d+1} - 1]^2$$

知式 (17) 等价于式 (23)。

注 5 从定理 2 可以看出, 对开环稳定的一阶滞后对象, 只需 $N_u=1$, 就可以设计出鲁棒的广义预测控制器。这时对于任意给定的预测时域 $N_y \geq d$, 任意选取控制加权系数 $\lambda \geq 0$ 都能使闭环系统渐近稳定; 另一方面, N_y 和 λ 的选取既不依赖于开环增益 K 也不依赖于时间常数 T , 对于选定的 N_y 和 λ 无论对象的开环增益和时间常数如何变化都不会使闭环系统失去稳定性, 因此对于开环稳定的一阶对象控制器表现了很强的鲁棒性。此外, 如果对象时延变化的上界 d_{\max} 已知, 即 $d \leq d_{\max}$, 这时只要 $N_y \geq d_{\max}$, 无论对象的开环增益和时间常数及时延如何变化都不破坏闭环系统的稳定性, 因此对于开环稳定的一阶滞后对象, 控制器也表现了较强的鲁棒性。

定理 3 体现了开环不稳定与开环稳定的一阶滞后对象之间的明显区别, 对开环不稳定的一阶滞后对象, 给定 N_y, λ 的稳定域总有一个有限上界 λ^* , λ^* 依赖于模型参数 K, T 及预测时域 N_y , 而 N_y 的增大可以提高 λ^* 。因此, 文献[1]建议选取较大的 N_y 是合理的。一个很自然的想法是如果增大 N_u , 能否使不稳定一阶滞后对象闭环渐近稳定呢? 遗憾的是下面的定理 4 表明, 答案是否定的。

定理 4 在假设 (H. 1)、(H. 2B) 下, 若

$$\lambda \geq \| \mathbf{R}^T \mathbf{R} \| - \frac{\| \mathbf{R}^T \| b_{d-1}}{(1+a_1)^2} \left[N_u \sum_{j=d}^{N_y} ((-a_1)^{j-d+2} - (-a_1))^2 \right]^{1/2} \triangleq \tilde{\lambda} \quad (25)$$

则模型式 (12) 在 GPC 控制下的闭环系统是不稳定的。这里 $\| \cdot \|$ 表示向量的欧式范数或矩阵的 Frobinus 范数。

证明 不失一般性, 假设 $N_y \geq d$, 由 (H. 2B) 及式 (25) 知 $\lambda > \| \mathbf{R}^T \mathbf{R} \|$ 。因此

$$\| \mathbf{R}^T \mathbf{R} + \lambda \mathbf{I}^{-1} \| \| \mathbf{R}^T \| \leq \| \mathbf{R}^T \| \frac{\sqrt{N_u}}{\lambda - \| \mathbf{R}^T \mathbf{R} \|} \leq \frac{b_{d-1} \sqrt{\sum_{j=d}^{N_y} ((-a_1)^{j-d+2} - (-a_1))^2}}{(1+a_1)^2}$$

由此及式 (7) 和式 (14), 柯西不等式得 $\sum_{j=d}^{N_y} |\beta_j| \cdot (a_1 + (-a_1)^{j-d+2}) \leq -\frac{(1+a_1)^2}{b_{d-1}}$ 。再由 (H. 2B) 可得 $\frac{b_{d-1}}{1+a_1} \sum_{j=d}^{N_y} \beta_j (a_1 + (-a_1)^{j-d+2}) \geq 1+a_1$ 即式 (17) 不成立。所以, 由引理 3 及注 4 可知闭环系统是不稳定的。

注 6 文献[13]指出, 实验表明对开环不稳定对象, 当 λ 的增大超过一定范围时, 闭环系统就会失去稳定性, 定理 4 就是针对一阶滞后对象对上述现象的一个定量刻画, 它表明, 对开环不稳定的一阶滞后对象, 当 λ 大于或等于一个依赖于模型参数 K, T 和控制器参数 N_y, N_u 的常数 $\tilde{\lambda}$ 时, 闭环系统会失去稳定性, 由 \mathbf{R} 和 $\tilde{\lambda}$ 的定义不难发现, $\tilde{\lambda}$ 是随着 N_y 和 N_u 的增大而增大的。

注 7 综合定理 2~定理 4, 不难发现, 广义预测控制器对开环稳定的一阶滞后对象和开环不稳定的一阶滞后对象的控制能力有明显区别。对开环稳定的对象, 总存在一组控制器参数 (事实上只需 $N_u=1, N_y \geq d, \lambda > 0$), 使得在该控制器控制下, 无论对象的开环增益 K 与时间常数 T 如何变化, 闭环系统都保持稳定; 而对开环不稳定对象, 无论控制器参数 N_u, N_y, λ 如何选取, 当 K 和 T 的变化超出一定范围时, 闭环系统就会失去稳定性。

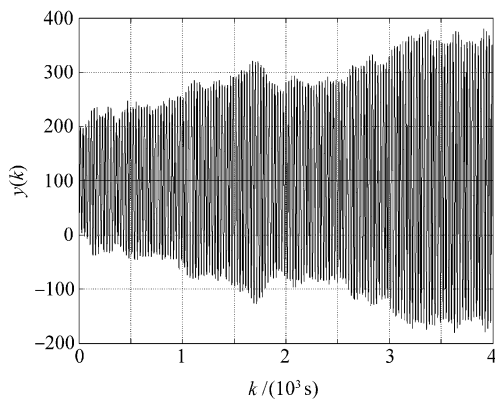
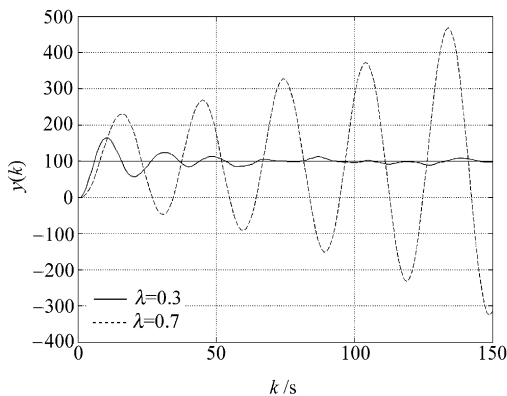
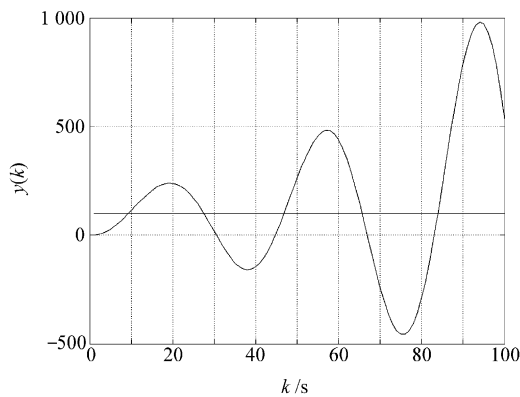
3 仿真算例

系统模型为: $\frac{K e^{-s}}{1+T_s s} = \frac{1}{1-10s}$, 取 $T_s=1$ s, 通过零阶保持器离散化后的系统参数为 $a_1 = -1.105 170 9, b_0 = -0.105 170 9, d=1$, 取 $C(z^{-1})=1, y_r(t)=100, \epsilon(t)$ 是方差为 0.5 的高斯白噪声。

当 $N_u=1, N_y=2$ 时, 由定理 3 可以算出使闭环系统稳定的控制加权系统的临界值为 $\lambda^* = 0.571 3$ 。在设计 GPC 控制时, 若取 $\lambda=0.571 3$, 则相应的闭环系统是不稳定的, 但发散的速度很慢, 如图 1 所示。

取 $\lambda=0.3$, 闭环系统是稳定的; 取 $\lambda=0.7$, 闭环系统是不稳定的, 见图 2。

当 $N_u=2, N_y=2$ 时, 由定理 4 可以算出 $\tilde{\lambda}=1.041 0$, 当 $\lambda=1.1 > \tilde{\lambda}$ 时, 闭环系统的响应见图 3。可见此时闭环系统是不稳定的。

图1 $\lambda=0.5713, N_y=2, N_u=1$ 时闭环系统的时域响应Fig. 1 Output response with $\lambda=0.5713, N_y=2, N_u=1$ 图2 $\lambda=0.3$ 和 $\lambda=0.7, N_y=2, N_u=1$ 时闭环系统的时域响应Fig. 2 Output response with $\lambda=0.3, \lambda=0.7, N_y=2, N_u=1$ 图3 $\lambda=1.1, N_y=2, N_u=2$ 时闭环系统的时域响应Fig. 3 Output response with $\lambda=1.1, N_y=2, N_u=2$

4 结 论

利用被控对象的阶跃响应模型给出了 GPC 闭环系统特征多项式新的表达形式,得到了 GPC 应用于—阶滞后对象时闭环稳定的充要条件。发现对于开环稳定对象,总存在一组控制器参数 N_y, N_u, λ 使得在具有上述参数的控制器控制下,

无论对象的开环增益 K 与时间常数 T 如何变化,闭环系统都保持稳定;而对于开环不稳定对象,无论控制器参数如何选取,当 K 和 T 的变化超出一定范围时,闭环系统就会失去稳定性。未来可望将本文的分析方法应用于其他典型的工业过程对象,如积分滞后模型、二阶滞后模型,分析其在 GPC 控制下的闭环稳定性,也可以进行广义预测控制与其他预测控制方法(如智能预测控制与智能采样控制)的比较研究。

参 考 文 献

- [1] Clarke D W, Mohtadi C, Thuffs P S. Generalized predictive control[J]. Automatica, 1987, 23(2): 137-160.
- [2] Clarke D W, Mohtadi C, Thuffs P S. Properties of generalized predictive control[J]. Automatica, 1989, 25(6): 859-875.
- [3] 周德云, 陈新海, 佟明安. 自适应广义预测控制系统的鲁棒稳定性分析[J]. 航空学报, 1994, 15(7): 833-840. Zhou D Y, Chen X H, Tong M A. Robust stability analysis of adaptive generalized predictive control systems[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1994, 15(7): 833-840. (in Chinese)
- [4] 师五喜, 霍伟, 毕树生, 等. 一种新的极点配置广义预测控制方法[J]. 航空学报, 2002, 23(2): 129-134. Shi W X, Huo W, Bi S S, et al. New pole assignment approach for generalized predictive control[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2002, 23(2): 129-134. (in Chinese)
- [5] 陈增强, 张青, 梁秀霞, 等. 串联系统广义预测控制及在飞行控制中应用[J]. 控制工程, 2004, 11(z1): 79-80, 127. Chen, Z Q, Zhang Q, Liang X X, et al. Generalized predictive control of chain system and its application to flight control[J]. Control Engineering of China, 2004, 11(z1): 79-80, 127. (in Chinese)
- [6] Shi J J, Kelkar A G, Soloway D. Reconfigurable GPC with application to flight control[C]// Proceedings of the 2005 American Control Conference. Evanston: American Automatic Control Council, 2005: 2116-2121.
- [7] 丁宝苍, 席裕庚. 基于 Kleinman 控制器的广义预测控制稳定性分析[J]. 中国科学(E辑), 2004, 34(2): 176-189. Ding B C, Xi Y G. Stability analysis of GPC based on Kleinman controllers[J]. Science China (Series E), 2004, 34(2): 176-189. (in Chinese)
- [8] Bordons C, Camacho E F. A generalized predictive controller for a wide class of industrial processes[J]. IEEE Transaction on Control Systems Technology, 1998, 6(3): 372-387.
- [9] Seborg T E, Edgar T F, Mellichamp D A. Process dynamics and control [M]. New York: John Wiley and Sons, 1989.

- [10] Bordons C, Camacho E F. Model predictive control[M]. London: Springer-Verlag, 1999.
- [11] Huang J J, DeBra D B. Liquid temperature control for a hydraulic turning machine [J]. IEEE Control Systems Magazine, 1997, 17(4): 55-63.
- [12] Camacho E F, Berenguel M. Robust adaptive model predictive control of a solar plant with bounded uncertainties [J]. International Journal of Adaptive Control and Signal-Processing, 1998, 11(4): 311-325.
- [13] Åström K J, Wittenmark B. Adaptive control[M]. 2nd Ed. Boston, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [14] Dorf R, Bishop R. Modern control systems[M]. 10th Ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, INC, 2005.
- [15] 倪中坚. 惯性平台数字温控系统[J]. 国际航空, 1994, (6): 11-12.
Ni Z J. Digital temperature control system for inertial platforms[J]. International Aviation, 1994, (6): 11-12. (in Chinese)
- [16] 孙明玮, 陈增强, 袁著祉, 等. 飞航导弹高精度自适应预测控制设计[J]. 中国工程科学, 2005, 7(10): 23-27.
Sun M W, Chen Z Q, Yuan Z Z, et al. High precision adaptive predictive control for cruise missile[J]. Engineering Science, 2005, 7(10): 23-27. (in Chinese)
- [17] 张有济. 战术导弹飞行力学设计[M]. 北京: 中国宇航出版社, 1998.
Zhang Y J. Flight dynamics design for tactical missiles [M]. Beijing: China Astronautics Publishing House, 1998. (in Chinese)
- [18] 屈香菊, 方振平, 王诚华, 等. 驾驶员数学模型的拟配研究[J]. 飞行力学, 1993, 11(3): 15-22.
Qu X J, Fang Z P, Wang C H, et al. The match study of mathematical model of human pilot[J]. Flight Dynamics, 1993, 11(3): 15-22. (in Chinese)
- [19] 王亮, 王占林, 高峰. 人在回路控制指示器信号速率提取特性的描述及最优控制律[J]. 宇航学报, 2001, 22(1): 48-52, 58.
Wang L, Wang Z L, Gao F. The characteristics description of extracting director signal rate and optimal control law of man-in-loop control[J]. Journal of Astronautics, 2001, 22(1): 48-52, 58. (in Chinese)
- [20] Åström K J, Wittenmark B. Computer-controlled systems: theory and design[M]. 3rd Ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1997.

作者简介:

李 韬(1981—) 男, 博士研究生。主要研究方向: 系统建模与适应控制, 复杂系统等。

E-mail: litao@amss.ac.cn

张纪峰(1963—) 男, 研究员、博士。主要研究方向: 随机系统、适应控制等。

E-mail: jif@iss.ac.cn

陈增强(1964—) 男, 教授、博士。主要研究方向: 非线性自适应控制、预测控制、智能控制等。

E-mail: chenzz@nandai.edu.cn

(责任编辑: 鲍亚平)