

利用奇异值分解的鲁棒盲信源分离

张伟涛¹, 楼顺天¹, 张延良^{1,2}

(1. 西安电子科技大学 电子工程学院, 陕西 西安 710071;

2. 河南理工大学 计算机科学与技术学院, 河南 焦作 454001)

摘要: 利用 Amari 等提出的估计函数分析了在最小化非线性主分量标准的意义上分离矩阵的最优解, 将其描述为归一化的输入与非线性输出的互相关, 提出了一种采用奇异值分解的鲁棒盲信源分离方法. 该方法将分离矩阵的估计解释为一种非线性的能量迭代问题. 在求解过程中对能量项进行了奇异值分解, 从而避免了归一化矩阵的求逆以及计算平方根问题, 减小了运算量. 由于使用了能量项的正定逆平方根来归一化分离矩阵, 因此提高了算法的鲁棒性, 并且在每一步迭代中都能使分离矩阵保持正交. 实验仿真验证了算法的性能.

关键词: 盲信源分离; 奇异值分解; 非线性能量迭代; 预白化

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2400(2009)06-0985-05

SVD based robust approach for blind source separation

ZHANG Wei-tao¹, LOU Shun-tian¹, ZHANG Yan-liang^{1,2}

(1. School of Electronic Engineering, Xidian Univ., Xi'an 710071, China;

2. Dept. of Computer Science and Tech., Henan Polytechnic Univ., Jiaozuo 454001, China)

Abstract: From the point of view of the estimating function proposed by Amari, we investigate the intrinsic characteristics of the optimal separating matrix for blind source separation (BSS) in the sense of minimizing nonlinear principal component analysis criterion, which formulates the optimal solution as the normalized cross correlation between the input and nonlinearized output. We thus present a singular value decomposition (SVD) based robust scheme for BSS, which considers the estimating procedure of the separating matrix as a nonlinear power iteration problem. By performing SVD of the power term, the computational load can be significantly reduced, which results from circumventing the difficulty of solving the inverse square root of the normalization term. Since the separating matrix is properly normalized by the positive definite inverse square root of the power term, the robustness of this algorithm is greatly improved. Moreover, this guarantees the orthonormality of the separating matrix at each iteration. Some simulation results are also provided to demonstrate the performance of the proposed algorithm.

Key Words: blind source separation (BSS); singular value decomposition (SVD); nonlinear power iteration (NPI); pre-whitening

在源信号和传输信道完全或部分未知的情况下, 只利用传感器阵列的观测数据和源信号的统计独立性假设来辨识混合信道(或其逆信道)以及恢复源信号, 称为盲信源分离. 由于盲信源分离技术不需要过多的关于信源和信道的先验信息就可以进行信号分析和处理, 因此其应用领域^[1]十分广泛, 包括雷达信号处理、无线通信、特征提取、语音和医学信号分析与处理, 以及使用盲信源分离进行的子空间辨识^[2]等.

目前, 针对盲信源分离问题的典型自适应算法主要有: Cardoso 提出基于相对梯度的 EASI 算法^[3]、Amari 等通过优化最小互信息准则^[4]提出的自然梯度算法^[5]、Karhunen 和 Pajunen 提出的使用投影近似^[6]的 RLS 算法^[7-8]以及文献^[9]提出的一种使用自然梯度的 RLS 算法等. 事实上, 相对梯度和自然梯度在本质上是相同的, 只是推导过程不同, 前两种算法都属于 LMS 型自适应学习算法, 其迭代步长参数的选择往往

收稿日期: 2008-09-02

基金项目: 国家自然科学基金资助(60775013)

作者简介: 张伟涛(1983-), 男, 西安电子科技大学博士研究生, E-mail: zhwt-work@qq.com.

是算法稳态误差和收敛速度的折中,因此不容易确定.后两种算法属于 RLS 型自适应算法,其迭代步长可以随输入数据动态变化,因此收敛速度较快.事实上,这两种 RLS 算法属于文献[10]总结的带有正交性约束的最优化问题.

笔者从 Amari 提出的估计函数^[11]出发,将上面两种基于非线性主分量标准的 RLS 算法归结为一种非线性的能量迭代问题,并把经典的能量迭代^[12-13]推广到非线性的情况,提出了一种估计分离矩阵的非线性能量迭代算法.文献[7-9]只能保证算法收敛到一个近似正交的分离矩阵,而笔者提出的算法可以确保每一步迭代所得到的分离矩阵都是正交归一的,而且使用了能量项的正定逆平方根来归一化分离矩阵,因此算法也具有很好的鲁棒性.

1 盲信源分离模型及预白化

信源混合模型可以用阵列信号处理模型表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_M(t)]^T$, $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_N(t)]^T$ 和 $\mathbf{n}(t)$ 分别表示 t 时刻阵列观测数据向量、源信号向量和加性噪声向量. \mathbf{A} 表示 $M \times N$ 阵列响应矩阵 ($M \geq N$), 它描述了传输信道的特性. 盲信源分离的目的就是要寻找一个分离矩阵 \mathbf{B} 来恢复源信号, 使输出向量

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}\mathbf{x}(t) \quad (2)$$

为源信号的估计. 由于混合矩阵和源信号均未知, 因此盲信源分离算法一般无法确定源信号的排列顺序和幅度. 在盲信源分离中一般存在 3 个假设^[5]: (1) 混合矩阵 \mathbf{A} 列满秩; (2) 源信号具有零均值, 相互统计独立并且与加性噪声不相关; (3) 源信号中最多有一个服从高斯分布. 盲信源分离所能够利用的先验信息甚少, 是一个极具挑战性的问题, 因此本文中暂不考虑加性噪声.

对观测数据进行白化是盲信源分离的一种预处理手段. 白化就是让观测数据向量 $\mathbf{x}(t)$ 通过一个线性变换 $\mathbf{R} \in \mathbf{C}^{N \times M}$ 得到向量

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}\mathbf{x}(t) \quad (3)$$

其中 $\mathbf{r}(t) \in \mathbf{C}^N$ 满足不相关条件 $E[\mathbf{r}(t)\mathbf{r}(t)^H] = \mathbf{I}$, \mathbf{I} 表示单位矩阵. 线性变换矩阵 \mathbf{R} 称为白化矩阵, 白化矩阵一般可以通过标准的主分量分析方法^[1]得到, 也可以采用文献[14]中介绍的更精确的白化算法. 文献[1]中指出, 白化使盲信源分离算法更稳定, 因为通过白化将观测信号向量二阶去相关, 并使针对白化数据的分离矩阵的求解约束在一个正交的矩阵空间. 那么总的分离矩阵就可以表示成 $\mathbf{B} = \mathbf{W}^H\mathbf{R}$, 其中 $\mathbf{W}^H \in \mathbf{C}^{N \times N}$ 表示正交的分离矩阵. 笔者提出的方法以及文献[7-9]中的算法都需要首先对观测数据进行白化处理.

2 非线性能量迭代盲分离算法

假设白化矩阵已经由标准的主分量分析方法(或利用文献[14]中的算法)得到. 那么源信号的估计可以表示为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}^H\mathbf{r}(t) \quad (4)$$

其中矩阵 \mathbf{W} 满足正交性约束 $\mathbf{W}^H\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{W}^H = \mathbf{I}$.

Amari 在文献[11]中提出了一种估计函数的方法来求解分离矩阵, 其中估计函数是矩阵值函数 $F(\mathbf{r}, \mathbf{W}^H)$, 若 \mathbf{W}^H 表示真实的分离矩阵, 那么有

$$E\{F(\mathbf{r}, \mathbf{W}^H)\} = 0 \quad (5)$$

其中 $E[\cdot]$ 表示估计函数关于 \mathbf{r} 的概率密度 $p_{\mathbf{r}}(\mathbf{r})$ 的数学期望. 这说明真实的分离矩阵就是上述方程的根. 估计函数与其他独立分量分析方法的区别在于通常盲分离问题的出发点是选择一个合适的代价函数, 它在某种程度上度量了输出信号的独立性, 那么分离矩阵就可以通过极小化代价函数得到. 而估计函数的方法不需要代价函数, 在某种意义上说, 估计函数对于盲分离更具有一般性.

Amari 在文献[11]中给出了估计函数最典型最直接的形式为

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{W}^H) = \mathbf{A} - f(\mathbf{y})\mathbf{y}^H \quad (6)$$

其中, $f(\mathbf{y}) = [f(y_1), \dots, f(y_N)]^T$ 为非线性化的输出向量, f 为一个合适的非线性函数(f 的选择与源信号

的概率密度有关,可参考文献[1]), $\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ 为对角矩阵,其对角元素为 $\lambda_i = E\{f(y_i)y_i^*\}$. Amari 在结论中指出:对于一个给定的估计函数,总可以找到一个比它更好或至少一样好的估计函数.这暗示着估计函数的更一般形式为^[11]

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{W}^H) = \mathbf{A} - f(\mathbf{y})g(\mathbf{y})^H, \quad (7)$$

其中, $g(\cdot)$ 也是一个非线性函数,而 $\lambda_i = E\{f(y_i)g(y_i^*)\}$. 接下来,我们利用估计函数的理论来分析文献[7,9]中使用的非线性主分量代价函数所得到的分离矩阵最优解.

文献[7,9]中使用的非线性主分量代价函数为

$$J(\mathbf{W}) = E\{\|\mathbf{r} - \mathbf{W}f(\mathbf{W}^H\mathbf{r})\|^2\}. \quad (8)$$

令此代价函数关于 \mathbf{W} 的梯度等于零,得到文献[7]中 RLS 算法的最优解为

$$\mathbf{W}_{\text{opt}}^{[7]} = \mathbf{C}_{rz}\mathbf{C}_{zz}^{-1}, \quad (9)$$

其中, $\mathbf{z}(t) = f(\mathbf{y}(t))$ 表示非线性化的输出向量, $\mathbf{C}_{rz} = E\{\mathbf{r}(t)\mathbf{z}(t)^H\}$ 和 $\mathbf{C}_{zz} = E\{\mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t)^H\}$ 分别代表 $\mathbf{r}(t)$ 与 $\mathbf{z}(t)$ 的互协方差矩阵和 $\mathbf{z}(t)$ 的自协方差矩阵. 而文献[9]则采用了代价函数式(8)关于 \mathbf{W} 的自然梯度,并令自然梯度等于零得到基于自然梯度的 RLS 算法最优解为

$$\mathbf{W}_{\text{opt}}^{[9]} = \mathbf{C}_{rz}\mathbf{C}_{yz}^{-1}, \quad (10)$$

其中, $\mathbf{C}_{yz} = E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{z}(t)^H\}$ 表示向量过程 $\mathbf{y}(t)$ 和 $\mathbf{z}(t)$ 的互协方差矩阵. 可以看出文献[7,9]的 RLS 算法的最优解的差别仅在于使用了不同的归一化项. 文献[7]使用了 \mathbf{C}_{zz} 来进行最优解的归一化,而文献[9]则使用了 \mathbf{C}_{yz} 进行归一化.

根据上述估计函数理论可知,最优解 $\mathbf{W}_{\text{opt}}^{[7]}$ 和 $\mathbf{W}_{\text{opt}}^{[9]}$ 必然满足方程式(5),那么当式(5)中的估计函数取式(7)的形式,并令非线性函数 $g(\cdot) = f(\cdot)$, 就有:

$$E\{f(\mathbf{y})f(\mathbf{y})^H\} = \mathbf{A}_z, \quad (11)$$

即 $\mathbf{C}_{zz} = \mathbf{A}_z$, 其中 \mathbf{A}_z 代表式(7)中的对角矩阵. 将其代入式(9)得到

$$\mathbf{W}_{\text{opt}}^{[7]} = \mathbf{C}_{rz}\mathbf{A}_z^{-1}. \quad (12)$$

同理,当式(5)中的估计函数取式(6)的形式有

$$E\{f(\mathbf{y})\mathbf{y}^H\} = \mathbf{A}_{yz} \quad (13)$$

成立,即 $\mathbf{C}_{yz} = \mathbf{A}_{yz}^H$, 其中 \mathbf{A}_{yz} 代表式(6)中的对角矩阵. 将其代入式(10)得到

$$\mathbf{W}_{\text{opt}}^{[9]} = \mathbf{C}_{rz}\mathbf{A}_{yz}^{*-1}, \quad (14)$$

比较式(12)和(14)可知: $\mathbf{W}_{\text{opt}}^{[7]}$ 和 $\mathbf{W}_{\text{opt}}^{[9]}$ 的差别仅在于对应列的范数不同,这并不影响分离源信号,因为源信号的幅度在盲信源分离中是不确定的. 因此最优解 $\mathbf{W}_{\text{opt}}^{[7]}$ 和 $\mathbf{W}_{\text{opt}}^{[9]}$ 在本质上是完全相同的,由于 \mathbf{A}_z 和 \mathbf{A}_{yz} 的对角元素只是影响分离出的源信号幅度,不失一般性,令 $\mathbf{A}_z = \mathbf{A}_{yz} = \mathbf{I}$, 那么式(12)和(14)将完全相同,且具有统一的形式

$$\mathbf{W}_{\text{opt}} = \mathbf{C}_{rz}. \quad (15)$$

事实上,式(15)可以解释为一种经典能量迭代问题的推广. 如果去掉 \mathbf{C}_{rz} 中的非线性函数,即 $f(t) = t$ 取线性函数并结合公式(4),那么式(15)将变成如下的经典能量迭代^[15]

$$\mathbf{W}(t) = E\{\mathbf{r}(t)\mathbf{y}(t)^H\} = E\{\mathbf{r}(t)\mathbf{r}(t)^H\}\mathbf{W}(t-1) = \mathbf{C}_{rr}\mathbf{W}(t-1), \quad (16)$$

其中 \mathbf{C}_{rr} 是输入的自协方差矩阵. 那么带有非线性函数的公式(15)可以看作是一种非线性的能量迭代. 通常情况下,有必要对矩阵 $\mathbf{W}(t)$ 的列进行归一化,以防止迭代发散,那么归一化矩阵自然的选择为^[12] $[\mathbf{W}(t)^H\mathbf{W}(t)]^{-1/2}$. 至此,文献[7,9]中的 RLS 算法都被归结为非线性能量迭代问题. 根据统一的非线性能量迭代公式(15),提出如下盲信源分离的非线性能量迭代算法

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(t-1)^H\mathbf{r}(t), \mathbf{z}(t) = f(\mathbf{y}(t)), \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{rz}(t) = (1-\beta) \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} \mathbf{r}(i)\mathbf{z}(i)^H, \quad (18)$$

$$\mathbf{W}(t) = \hat{\mathbf{C}}_{rz}(t)[\hat{\mathbf{C}}_{rz}(t)^H\hat{\mathbf{C}}_{rz}(t)]^{-1/2}. \quad (19)$$

式(18)中使用了互协方差矩阵的采样估计,其中 $0 < \beta < 1$ 是遗忘因子. 事实上式(18)可以自适应估计

$$\hat{\mathbf{C}}_{rz}(t) = \beta\hat{\mathbf{C}}_{rz}(t-1) + (1-\beta)\mathbf{r}(t)\mathbf{z}(t)^H. \quad (20)$$

式(19)中的矩阵逆平方根作为归一化项保证了算法的迭代不会发散. 与[7,9]中的 RLS 算法不同,此归一化项确保了分离矩阵在每一步迭代之后都是正交的,这正是白化后的观测数据对分离矩阵所期望的特性.

注意到,非线性能量迭代算法(19)虽然很好地保证了分离矩阵的正交性,但是其计算量很大,主要来自于归一化项中的矩阵平方根和之后的求逆运算. 鉴于此,在迭代之前首先对采样互协方差矩阵进行奇异值分解

$$\hat{\mathbf{C}}_{rz}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{\Sigma}(t)\mathbf{V}(t)^H, \quad (21)$$

其中 $\mathbf{U}(t)$ 和 $\mathbf{V}(t)$ 分别为左右奇异向量矩阵, $\mathbf{\Sigma}(t)$ 是一个由相应奇异值为对角元素的对角矩阵. 令 $\mathbf{X}(t) = \mathbf{V}(t)\mathbf{\Sigma}(t)\mathbf{V}(t)^H$, 由如下推导很容易看出 $\mathbf{X}(t)$ 即为 $[\hat{\mathbf{C}}_{rz}(t)^H\hat{\mathbf{C}}_{rz}(t)]$ 的对称正定的平方根.

$$\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t)^H = \mathbf{V}(t)\mathbf{\Sigma}(t)^2\mathbf{V}(t)^H = [\mathbf{V}(t)\mathbf{\Sigma}(t)^H\mathbf{U}(t)^H][\mathbf{U}(t)\mathbf{\Sigma}(t)\mathbf{V}(t)^H] = \hat{\mathbf{C}}_{rz}(t)^H\hat{\mathbf{C}}_{rz}(t). \quad (22)$$

将 $\mathbf{X}(t)$ 和式(21)中的奇异值分解代入式(19)得到

$$\mathbf{W}(t) = \hat{\mathbf{C}}_{rz}(t)\mathbf{X}(t)^{-1} = [\mathbf{U}(t)\mathbf{\Sigma}(t)\mathbf{V}(t)^H][\mathbf{V}(t)\mathbf{\Sigma}(t)^{-1}\mathbf{V}(t)^H] = \mathbf{U}(t)\mathbf{V}(t)^H. \quad (23)$$

更新式(23)很好地说明了分离矩阵的正交性. 由于 $\mathbf{X}(t)^{-1}$ 是对称正定的归一化矩阵, 因此与文献[9]中的 RLS 算法相比, 本算法具有更好的鲁棒性. 至此, 式(17), (20), (21)以及式(23)组成了笔者提出的非线性能量迭代算法. 可以看出, 奇异值分解的使用避免了计算矩阵求逆和平方根, 极大地降低了计算复杂度.

3 实验仿真

为了说明本文算法的性能, 对经典的 ESAI 算法^[3], Pajunen 提出的 RLS 算法^[7], 使用自然梯度的 RLS 算法^[9] (记为 NRLS) 和笔者提出的非线性能量迭代 (记为 NPI) 算法进行了仿真研究. 盲分离算法的性能可以通过 Cross-talking 误差^[3-9] E_{PI} 来进行评价

$$E_{PI} = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \frac{|c_{ij}|}{\max_k |c_{ik}|} - 1 \right) + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \frac{|c_{ij}|}{\max_k |c_{kj}|} - 1 \right),$$

其中, $\mathbf{C} = \{c_{ij}\} = \mathbf{BA}$ 表示混合分离合成系统. 为了方便仿真, 混合矩阵 \mathbf{A} 取任意的正交矩阵, 则白化矩阵 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ 为单位矩阵. 5 个源信号分别为: $s_1(t) = \text{sign}(\cos(2\pi 80t))$, $s_2(t) = \sin(2\pi 25t) \sin(2\pi 800t)$, $s_3(t) = \sin(2\pi 300t + 6 \cos(2\pi 60t))$, $s_4(t) = \cos(2\pi 120t^2)$, $s_5(t)$ 是一个取值在 $[-1, 1]$ 之间的均匀白噪声. 由于上面的 5 个源信号都是亚高斯的, 所以式(16)中的非线性函数取 $f(\cdot) = \tanh(\cdot)$.

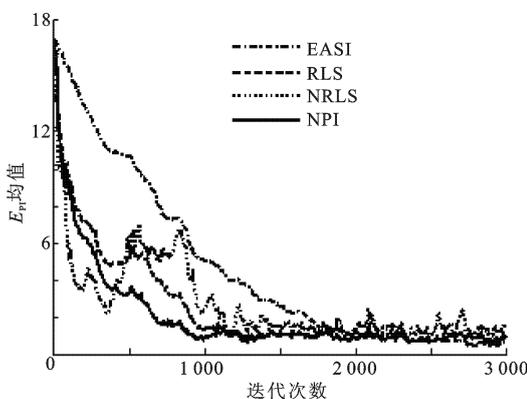


图 1 收敛曲线

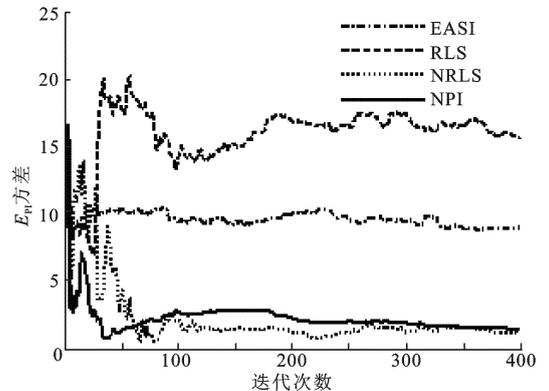


图 2 方差对比曲线

图 1 和图 2 分别为 100 次独立试验的 E_{PI} 均值和方差. ESAI 算法属于 LMS 型自适应算法, 其迭代步长取经验值 $\eta = 0.008$. 两种 RLS 算法以及本文的非线性能量迭代算法 (NPI) 的遗忘因子为 $\beta = 0.983$, $\mathbf{W}(0) = \mathbf{I}$. 混合矩阵 \mathbf{A} 每次随机取不同的正交矩阵. 从图 1 可以看出: ESAI 收敛最慢, 这主要是由于它属于 LMS 型自适应算法, 其固定步长无法使算法快速收敛. 在其他 3 种算法中, 使用自然梯度的 RLS 算法在开始阶段收敛最快, 但遗憾的是, 它不能保持稳定收敛, 在中间阶段有发散趋势, 而且稳态误差也比较大. 从能量迭代的意义上讲, 这主要是由于它所使用的归一化矩阵 \mathbf{C}_{yz}^{-1} 不能保证是正定的, 而笔者提出的方法和文献[7]中的 RLS 算法都分别使用了对称正定的归一化矩阵 \mathbf{X}^{-1} 和 \mathbf{C}_{zz}^{-1} , 因此收敛较稳定, 而且笔者提出的算法收敛更快. 从图 2 也可以看出, 笔者提出的算法在整个独立运行中方差也很小.

图 3 比较了两种 RLS 算法和笔者提出的非线性能量迭代算法所得到的分离矩阵的正交性误差 (由于 ESAI 算法并不约束分离矩阵为正交矩阵, 因此比较时没有考虑). 可以看出, 笔者提出的算法在每一步迭代

都能保证分离矩阵的列向量是正交的(事实上也是归一的),其中正交性误差 E 由下式计算^[9].

$$E = \|\mathbf{W}^H \mathbf{W} - \text{diag}(\mathbf{W}^H \mathbf{W})\|_F^2 .$$

4 结束语

本文利用估计函数理论分析了优化非线性主分量标准得到的分离矩阵的最优解,将其归结为一种非线性的能量迭代问题,并提出了一种鲁棒的非线性能量迭代盲信源分离算法,由于该算法使用了能量项的正定逆平方根来归一化分离矩阵,因此其鲁棒性更好,而且在每一步迭代中都能保持分离矩阵的正交性.注意到,本文使用了奇异值分解来避免矩阵求逆和平方根所带来的巨大计算量,事实上,若能结合文献[16]提出的自适应奇异值分解,那么算法的计算量便可以进一步降低.

参考文献:

- [1] Hyvarinen A, Karhunen J, Oja E. Independent Component Analysis [M]. New York: Wiley, 2001.
- [2] Wentrup M G, Buss M. Subspace Identification from Blind Source Separation [J]. IEEE Signal Process Lett, 2006, 13(2): 100-103.
- [3] Cardoso J F, Laheld H. Equivariant Adaptive Source Separation [J]. IEEE Trans on Signal Process, 1996, 44(2): 3017-3029.
- [4] Yang H H, Amari S. Adaptive On-line Learning Algorithms for Blind Separation-maximum Entropy and Minimum Mutual Information [J]. Neural Computation, 1997, 9(1): 1457-1482.
- [5] Aamri S, Cichocki A. Adaptive Blind Signal Processing-neural Network Approaches[J]. Proceedings of the IEEE, 1998, 86(10): 2026-2048.
- [6] Yang B. Projection Approximation Subspace Tracking [J]. IEEE Trans on Signal Process, 1995, 43(1): 95-107.
- [7] Pajunen P, Karhunen J. Least-squares Methods for Blind Source Separation Based on Nonlinear PCA [J]. Int J Neural Syst, 1998(8): 601-612.
- [8] Karhunen J, Pajunen P, Oja E. The Nonlinear PCA Criterion in Blind Source Separation: Relations with Other Approaches [J]. Neurocomputing, 1998, 22(1): 5-20.
- [9] Zhu X L, Zhang X D. Adaptive RLS Algorithm for Blind Source Separation Using a Natural Gradient [J]. IEEE Signal Process Lett, 2002, 9(12): 432-435.
- [10] Abrudan T E, Eriksson J, Koivunen V. Steepest Descent Algorithms for Optimization under Unitary Matrix Constraint [J]. IEEE Trans on Signal Process, 2008, 56(3): 1134-1147.
- [11] Amari S, Cardoso J F. Blind Source Separation-semi Parametric Statistical Approach [J]. IEEE Trans on Signal Process, 1997, 45(11): 2692-2700.
- [12] Hua Y, Xiang Y, Chen T, et al. A New Look at the Power Method for Fast Subspace Tracking [J]. Dig Signal Process, 1999, 9(2): 297-314.
- [13] Badeau R, David B, Richard G. Fast Approximated Power Iteration Subspace Tracking [J]. IEEE Trans on Signal Process, 2005, 53(8): 2931-3941.
- [14] Feng D Z, Zheng W X, Cichocki A. Matrix-group Algorithm Via Improved Whitening Process for Extracting Statistically Independent Sources from Array Signals [J]. IEEE Trans on Signal Process, 2007, 55(3): 962-977.
- [15] Golub G H, Loan C F V. Matrix Computations [M]. 3rd Ed. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [16] Willink T J. Efficient Adaptive SVD Algorithm for MIMO Applications [J]. IEEE Trans on Signal Process, 2008, 56(2): 615-622.

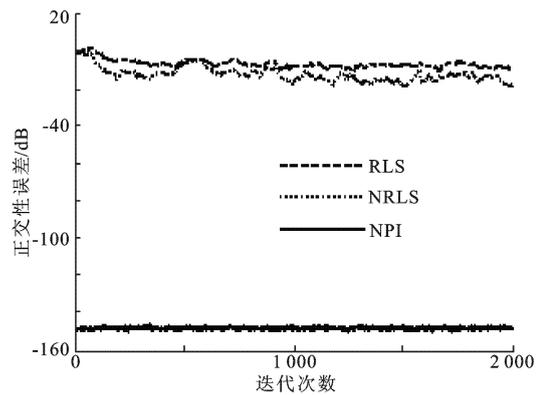


图 3 正交性误差曲线