电磁场与电磁波
Electromagnetic Fields and Waves

第9讲 静电学2
—分界面上的边界条件

褚庆昕

华南理工大学电子与信息学院
射频与无线技术研究所
TEL: 22236201-601
Email:qxchu@scut.edu.cn

Research Institute of RF & Wireless Techniques

第9讲内容

- 静电场的边界条件
  - 介质分界面上静电场的边界条件
  - 介质分界面上电位的边界条件
  - 理想电壁边界条件

(教材p67-72)

9.1 静电场的边界条件

❖ 已经得到静电场和电位满足的方程

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \quad \nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$ Possion方程

若无源，则 $\nabla^2 \phi = 0$ Laplace方程

❖ 这些方程反映空间点上静电场的特性。但是它们是微分方程，只适合于场函数连续可导的情形。

❖ 对于有媒质突变的问题，场函数不再是连续可导，因此场方程的微分形式不在适用。

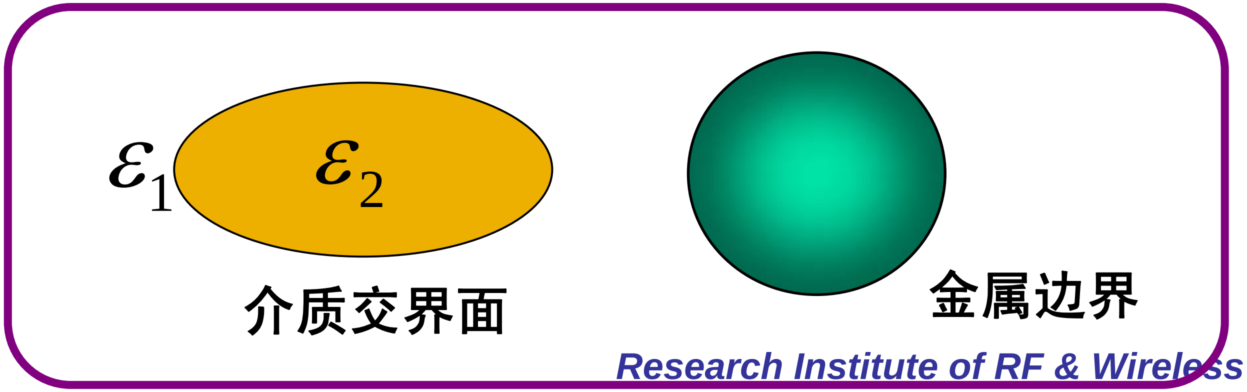
华南理工大学

❖ 有时研究的问题是有界的，在边界上，场方程的微分形式也不再适用。

❖ 为此，需要寻找分界面和边界上静电场满足的方程，称之为静电场的边界条件。

❖ 通常遇到的边界问题有由不同介质构成的介质分界面和金属边界。

❖ 研究边界问题的方法是从场方程的积分形式出发，因为积分形式的方程不受边界约束。

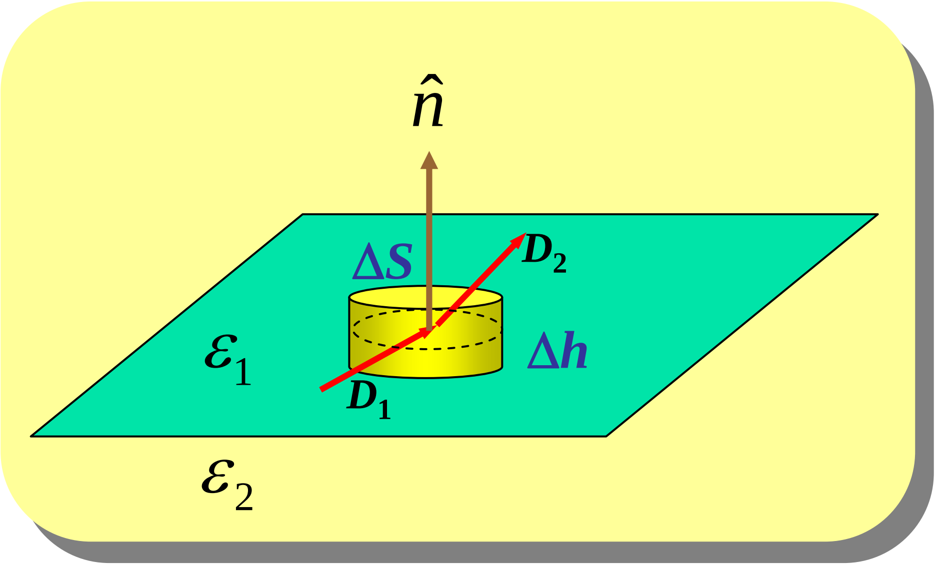


9.2 介质分界面上电场边界条件

【法向电场边界条件】

❖ 应用Gauss定理，由于柱面无限小，有

$$\int_S \vec{D}\bullet d\vec{S} = \vec{D}_1\bullet\hat{n}\Delta S - \vec{D}_2\bullet\hat{n}\Delta S$$
$$+\vec{D}_1\bullet\hat{a}_R 4\pi R\Delta h/2$$
$$+\vec{D}_2\bullet\hat{a}_R 4\pi R\Delta h/2$$
$$=(\vec{D}_1-\vec{D}_2)\bullet\hat{n}\Delta S \qquad \Delta h\to 0$$



❖ 同时

$$Q=\int_V \rho dv = \rho\Delta h\Delta S = \rho_s\Delta S \qquad \Delta h\to 0$$

注意：$\hat{n}$ 是由介质2指向介质1。

- 于是 $$(\vec{D}_1-\vec{D}_2)\cdot\hat{n}=\rho_s$$
- 写成标量形式 $$D_{1n}-D_{2n}=\rho_s$$

其中 $\rho_s=\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{Q}{\Delta S}=\lim\limits_{\Delta h\to 0}\rho\Delta h$， 称为分界面上的面电荷密度。

- 介质分界面上的法向电位移的差等于分界面上的面自由电荷密度。
- 如果分界面上无自由电荷，则介质分界面上法向电位移矢量连续，即

$$D_{1n}=D_{2n}$$

❖ 对于各向同性媒质，边界条件可写出

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \rho_s$$

❖ 如果分界面上无自由电荷，则

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

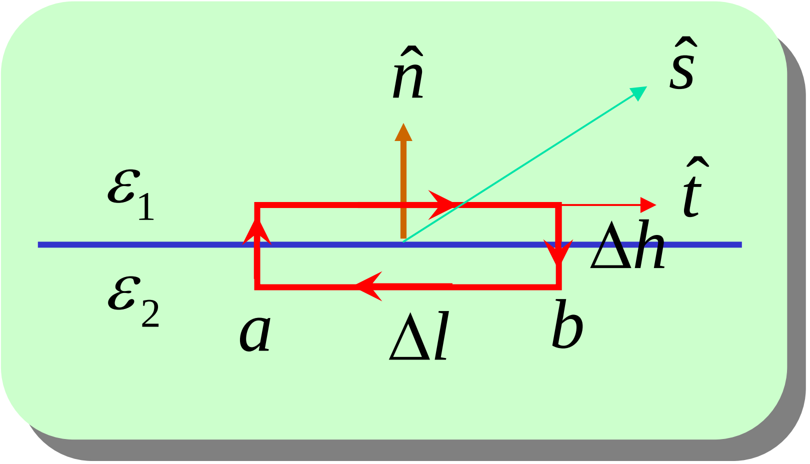
❖ 说明介质分界面上法向电场强度不连续。

❖ 如果考虑介质分界面上的束缚电荷密度 ρ_s'，则不难导出

$$E_{1n} - E_{2n} = (\rho_s + \rho_s') / \varepsilon_0$$

❖ 可见，在介质分界面上法向电位移和电场强度之所以不连续是因为在分界面上分布有表面电荷。

【切向电场边界条件】



- 应用电场环路积分公式

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \vec{E}_1\cdot\hat{t}\Delta l - \vec{E}_2\cdot\hat{t}\Delta l$$

$$+\vec{E}_1^a\cdot\hat{n}\Delta h/2+\vec{E}_2^a\cdot\hat{n}\Delta h/2$$

$$-\vec{E}_1^b\cdot\hat{n}\Delta h/2-\vec{E}_2^b\cdot\hat{n}\Delta h/2=(\vec{E}_1-\vec{E}_2)\cdot\hat{t}\Delta l \qquad \Delta h\to 0$$

$$=0$$

- 即 $(\vec{E}_1-\vec{E}_2)\cdot\hat{t}=\vec{0}$
- 写出标量形式 $E_{1t}-E_{2t}=0$
- 所以，分界面上切向电场连续。

- 通常希望用分界面法向单位矢表示边界条件，为此考虑

$$\hat{t} = \hat{s} \times \hat{n}$$

- 则

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \bullet \hat{t} = (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \bullet (\hat{s} \times \hat{n})$$
$$= \hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \bullet \hat{s} = \vec{0}$$

- 由于 的任意性，所以有

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0}$$

- 上述的单位矢量变换方法在电磁场理论中常遇到。

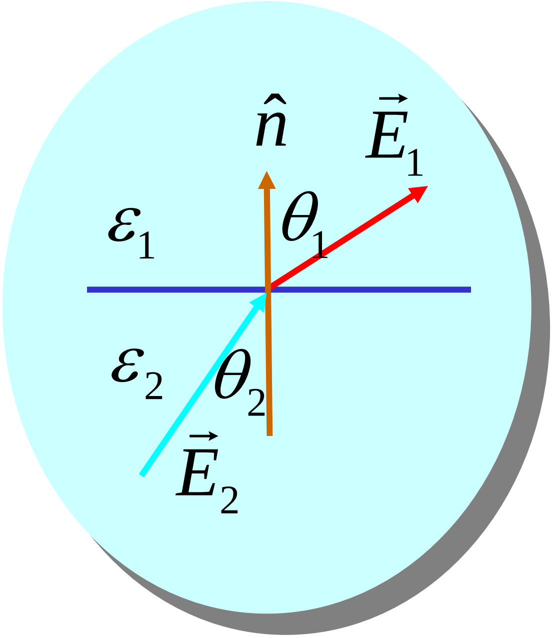
9.3 理想介质分界面上电场方向的关系

❖ 所谓理想介质分界面是指分界面上无自由电荷。

❖ 根据边界条件，可得

$$\varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$$

$$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$$



❖ 于是

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

❖ 可见在分界面两侧，电场一般不在同一方向。只有在电场与分界面垂直时，分界面两侧的电场才具有相同方向。

9.4 介质分界面上电位边界条件

- 利用电位与电场的关系 $\vec{E}=-\nabla\phi$，可得

$$\hat{n}\cdot\vec{E}=-\hat{n}\cdot\nabla\phi=-\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

$$\hat{t}\cdot\vec{E}=-\hat{t}\cdot\nabla\phi=-\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

- 将上式带入电场边界条件，可得

$$\varepsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n}=-\rho_s$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t}-\frac{\partial\phi_2}{\partial t}=0 \quad\Rightarrow\quad \phi_1-\phi_2=const.$$

- 在未规定电位参考点的情况下，const可以是任意常数。但是，一旦电位参考点给定，const就是一个固定的常数。因为边界条件在分界面上任意一点都成立，const只能是零。
- 最终，得到电位在分界面上的边界条件

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = -\rho_s \qquad \phi_1 = \phi_2$$

- 分界面上电位连续，电位法向导数不连续。
- 注意，书中69页的证明值得商榷，边界上电场的积分与路径无关缺乏证明。

9.5 理想电壁边界条件

- 无损耗的电导体称为理想导体，理想导体的表面称为理想电壁（Perfect Electric Wall）。理想电壁边界条件（Perfect Electric Condition, PEC)是指理想电壁上电场满足的方程。
- 我们已经知道，导体中静电场始终为零，电位保持常数（等位体）。把导体看成介质2，从介质分界面边界条件不难得到电壁的边界条件。

$$\hat{n}\cdot\vec{D}=\rho_s \qquad \hat{n}\times\vec{E}=0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=-\frac{\rho_s}{\varepsilon} \qquad \phi=const$$

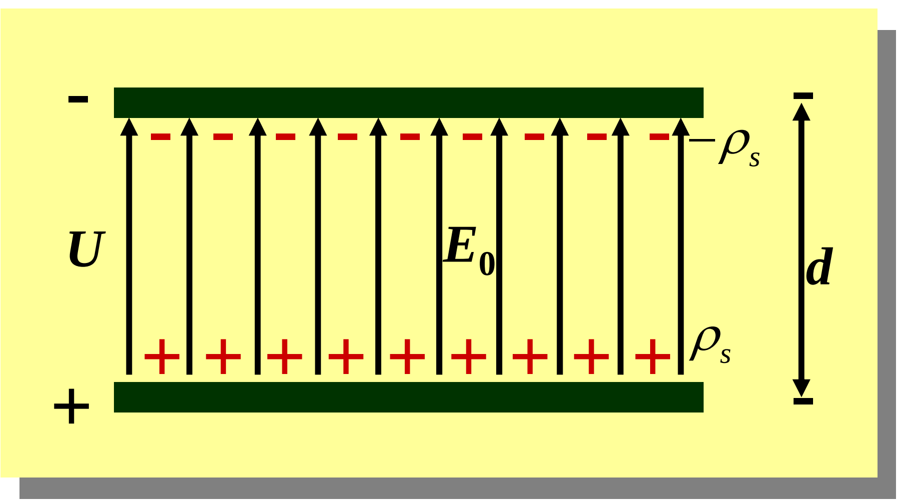
- 所以理想电壁上切向电场为零。

【例9-1】两块很大的平行导电板，板间距离为d，而且d比平行板的场和宽都小很多。两板接于直流电压U上充电后断开电源，然后在板间放入一块均匀介质板($\varepsilon_r = 9$) 设介质板的厚度比d略小一点，留下一小个空气隙。求放入介质板前后平行板间的电场强度。

❖ 解：未放入介质板前，板间电场强度为

$$E_0 = \frac{U}{d}$$

❖ E_0的方向为正极板指向负极板，如图。



- 在下极板导体与空气的分界面上，根据分界面边界条件 $D_{1n}-D_{2n}=\rho_s$ ，和 $D_{1n}=D_1=D_0\,,D_2=0$ (导体内场为0)，有

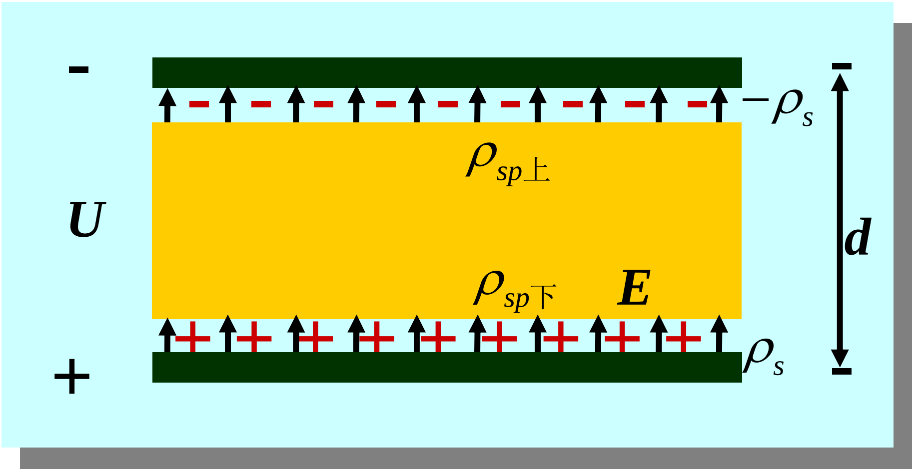
$$\rho_s=D_0=\varepsilon_0 E_0=\varepsilon_0\frac{U}{d}$$

- 若在上极板与空气界面应用边界条件，同样可以求出上极板下表面自由电荷面密度为 $-\rho_s$ 。

- 因为先断电，后放入介质板，且介质板均匀，故放入介质板后导体表面上的自由电荷总量及分布(ρ_s)不变，即空气隙中 $D_0=\rho_s=\varepsilon_0\dfrac{U}{d}$ 不变。

❖ 又因为空气隙与介质分界面上没有自由面电荷，且介质块平行极板，当再一次在此界面上应用电位移矢量法向矢量连续的边界条件时，便可得介质中的电位移D为

$$D = D_0 = \varepsilon_0 \frac{U}{d}$$



❖ 介质中电场强度E为

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{9\varepsilon_0} = \frac{E_0}{9}$$

❖ 介质与空气的分界面上 $\vec{E}$ 是不连续的。因为介质板表面上出现束缚电荷，束缚电荷产生的附加场强消弱了原场强。

❖ 介质中的极化强度 $\vec{P}$ 为

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \frac{E_0}{9}\hat{a}_y = \frac{8}{9}\rho_s \hat{a}_y$$

❖ 根据

$$\rho_{sp} = \vec{P} \bullet \hat{n}$$

❖ 有

$$\rho_{sp上} = \vec{P} \bullet \hat{a}_y = \frac{8}{9}\rho$$

$$\rho_{sp下} = \vec{P} \bullet (-\hat{a}_y) = -\frac{8}{9}\rho_s$$

【例9-2】在聚苯乙烯($\varepsilon = 2.6\varepsilon_0$)与空气的分界面两侧，聚苯乙烯中的电场强度为2500V/m，电场方向与分界面法线的夹角是20^o，试求(1)空气与分界面法线的夹角；(2)空气中的电场强度与电位移。

- 解：(1)令聚苯乙烯为介质1，空气为介质2，得

$$\tan\theta_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\tan\theta_1 = 0.14 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 8^\circ$$

- (2)由界面上的$E_{1t} = E_{2t}$，即 $E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$，得

$$E_2 = E_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = 6144(V/m)$$

- 故

$$D_2 = \varepsilon_2 E_2 = 5.44\times10^{-8}(C/m^2)$$

第9讲总结

❖静电场的边界条件

第9讲作业

p90: 2-19，2-20