

迭代译码的级联 Reed-Solomon 乘积码与卷积码

孙小钧 刘晓健 赵春明

(东南大学移动通信国家重点实验室 南京 210096)

摘要: 该文提出用 Reed Solomon(RS)乘积码作为外码,卷积码作为内码的级联码方案并且内外码间用 Congruential 向量生成的交织图案对 RS 码符号进行重排列.对此级联码采用的迭代译码基于成员码的软译码算法.当迭代次数达到最大后,通过计算 RS 码的校正子,提出一种纠正残余错误的方法,进一步提高了系统的误比特性能.仿真结果表明,在 AWGN 信道中与迭代译码的级联 RS/卷积码相比,当误比特率为 $1e-5$ 时,新系统的编码增益大约有 0.4 dB.

关键词: 迭代译码; 乘积码; Reed-Solomon (RS); 卷积码

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)12-2917-05

Concatenated Reed-Solomon Product Code/Convolutional Code with Iterative Decoding

Sun Xiao-jun Liu Xiao-jian Zhao Chun-ming

(National Mobile Communication Research Laboratory, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: A concatenated coding scheme is proposed in this paper, which uses Reed-Solomon (RS) product code for outer code and convolutional code for inner code. The interleaving pattern, which is generated according to congruential sequence, is used to rearrange the symbols of RS product code. The iterative decoding of the concatenated coding scheme is based on the soft decoding of the component codes. When a given maximum number of iteration has been performed, a method is proposed to correct residual errors by computing the syndromes of RS codes. The simulation results show that coding gains up to 0.4 dB for a BER (Bit Error Rate) is of $1e-5$ on the Gaussian channel comparison with concatenation RS/CC codes.

Key words: Iterative decoding; Product code; Reed-Solomon (RS); Convolutional code

1 引言

由 Reed Solomon(RS)为外码,卷积码(Convolutional Code, CC)为内码的级联码(RS-CC)已广泛应用于许多系统中,如 Terrestrial -Digital Multimedia Broadcasting(T-DMB)^[1]和 WiMAX^[2]等系统.为了进一步提高性能,人们在 RS-CC 级联码中引入了迭代译码^[3],CC 内码采用 SOVA 算法,RS 外码采用 Chase-Pyndiah^[4]软输入软输出(SISO)算法,使得外信息在内、外码之间传递.图 1 给出了采用迭代译码的级联码的简化框图.

基于 RS 码的 Turbo Product Code(RS-TPC)^[5-7],能够纠正大量的随机和突发错误,在采用 Chase-Pyndiah 算法进行迭代译码后,性能接近香农限而译码复杂度较低.而级联码为了取得更好的性能,在迭代译码过程中,各个分量码采用有效

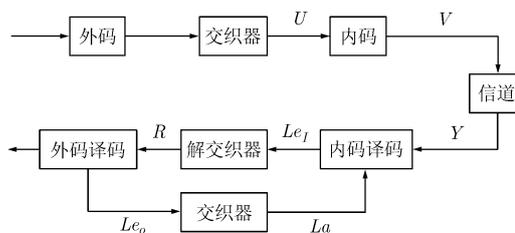


图 1 迭代译码的级联码系统框图

的 SISO 译码算法是必须的.但对于长码,如 RS(255, 223, 33),目前的 SISO 译码算法复杂度太高.RS-TPC^[6]的成员码是 Single-Error-Correcting (SEC)短码,能够很方便地应用 SISO 算法并且译码复杂度较低,因此将 RS-TPC 取代 RS 码,尤其是 RS(255, 223, 33),将会提高级联系统的性能.

本文将 RS-TPC 与 CC 级联,RS-TPC 采用 Chase-Pyndiah 算法,CC 采用 log-MAP 算法,并进行迭代译码,取得了较好的效果.仿真结果表明,与迭代译码的 RS-CC 方案相比,在加性高斯白噪声信道下,当误比特率为 $1e-5$ 时,编码增益大约有 0.4

2008-11-27 收到,2009-09-04 改回

东南大学移动通信国家重点实验室自主研究项目(2008A10),国家自然科学基金(60802007),国家 863 计划项目(2009AA01Z235)和国家 973 计划项目(2007CB310603)资助课题

dB 并且译码复杂度基本相当。

文章的组织结构如下：第 2 节，简要介绍了 RS-TPC 采用 Chase-Pyndiah 的算法。第 3 节介绍了级联 RS-TPC-CC 码并给出了译码复杂度分析。第 4 节给出了仿真结果。第 5 节总结了全文。

2 Chase-Pyndiah 译码算法

考虑两个系统分组码 $C_1(n_1, k_1, d_1)$ 和 $C_2(n_2, k_2, d_2)$ ，其中 $n_i, k_i, d_i (i = 1, 2)$ 分别表示码长，信息位长和最小汉明距离，乘积码(product code)表示为 $C_1 \otimes C_2(n_1 n_2, k_1 k_2, d_1 d_2)$ 。乘积码的每一行是 $C_1(n_1, k_1, d_1)$ 中的码字，每一列是 $C_2(n_2, k_2, d_2)$ 中码字，见图 2。

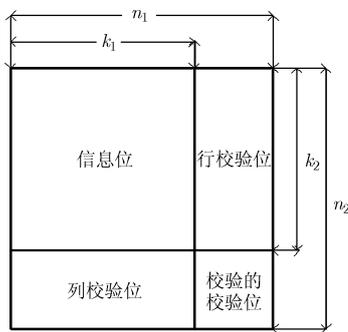


图 2 乘积码 $C_1 \otimes C_2$

RS-TPC [6]的成员码是 $GF(2^q)$ 上两个相同的 $(2^q - 1, 2^q - 3, 3)$ RS 码。RS 比特级的 Chase-Pyndiah 软输入软输出算法包括 Chase 软判决算法和软输出计算单元。

设 RS 译码器接收软输入向量 $\mathbf{r} = (r_{1,1}, \dots, r_{1,q}, \dots, r_{n,1}, \dots, r_{n,q})$ ，对应的硬判决向量为 $\mathbf{y} = (y_{1,1}, \dots, y_{1,q}, \dots, y_{n,1}, \dots, y_{n,q})$ 。在 $|\mathbf{r}| = (|r_{1,1}|, \dots, |r_{1,q}|, \dots, |r_{n,1}|, \dots, |r_{n,q}|)$ 选出 p 个幅值最低的位置即 p 个最不可靠位置，这些位置上的 0 和 1 的所有 2^p 种组合，形成了错误模式测试集 E 。对 E 的每个错误模式 e 形成修正向量 $\mathbf{e} + \mathbf{y}$ ，进行代数硬译码，若译码成功，则将得到的码字加入候选码字集中。为了降低计算校正子复杂度，相邻错误模式之间只有一个比特不同[8]，这样新的校正子可对前一个校正子进行简单的修正就能得到。因为在 Chase 译码过程中，很有可能多次代数硬译码后，译码器给出了相同的码字，通过比较 $GF(2^q)$ 上某个错误模式得到的修正向量与候选码字集中所有码字的汉明距离，若得到的所有汉明距离都大于 t ，则对此错误模式得到的修正向量执行代数译码，否则，不必译码，这样避免了不必要的代数硬译码[9]。

Pyndiah 的软输出计算单元首先从候选码字集

中找到码字 \mathbf{d} ，相关距离 $\langle \mathbf{r}, \mathbf{d} \rangle$ 最大。对于 $d_{i,j}$ ，从候选码字集中寻找码字 \mathbf{c} ，其满足 $c_{i,j} = -d_{i,j}$ 并且 $\langle \mathbf{r}, \mathbf{c} \rangle$ 最大。若码字 \mathbf{c} 存在，外信息由下式给出：

$$w_{i,j} = \alpha \left(d_{i,j} \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{r}, \mathbf{c} \rangle}{2} - r_{i,j} \right) \quad (1)$$

若码字 \mathbf{c} 不存在，外信息由下式给出：

$$w_{i,j} = \beta d_{i,j} \quad (2)$$

其中 α 和 β 是预先设定的常数并且随着迭代次数的增加而增大。

3 级联 RS-TPC-CC 码

$GF(2^q)$ 的 k^2 信息符号经过乘积码编码后变为 $n \times n$ 的方阵，由于卷积码的突发错误特性，为了打散突发错误，内码和外码之间要采用交织器，交织器在 RS 码符号间进行交织。由于乘积码的每一行(列)都是 RS 码，如果采用行列交织器，卷积码的突发错误就会集中于若干个 RS 码，使得错误无法得到纠正。针对此情况，本文使用了基于同余向量(congruential sequence)的代数交织器[10]，其按 $A_{n+1} = (a \cdot A_n + b) \bmod N$ 产生，其中参数 a, b 要满足：

- (1) $a < N, b < N$ ， b 与 N 互素；
- (2) $a - 1$ 是 N 的每个素因数的倍数；
- (3) 如果 N 是 4 的倍数，那么 $a - 1$ 也是 4 的倍数。同余向量交织器不仅长度灵活可变，还可以在线产生交织图案，从而节省了存储空间。

$GF(2^q)$ 的 n^2 个 RS 码元交织后转换成二进制比特流 \mathbf{u} ，由卷积编码器生成码比特流 \mathbf{v} ，采用 BPSK 调制 ($1 \rightarrow +1, 0 \rightarrow -1$)，设接收向量为 $\mathbf{y} = \mathbf{v} + \mathbf{n}$ ， \mathbf{n} 为独立同分布的零均值，方差 σ^2 的高斯白噪声流。信息比特 u_i 的第 p 次迭代的后验概率似然比为

$$L^p(u_i) = \ln \frac{\Pr(u_i = 1 | \mathbf{y})}{\Pr(u_i = 0 | \mathbf{y})} \quad (3)$$

卷积码 log-MAP 译码后，输出的信息为

$$Le_i^p(u_i) = L^p(u_i) - La^p(u_i) \quad (4)$$

其中 $La^p(u_i)$ 为信息比特 u_i 由外码提供的先验信息。 $Le_i^p / Lc (Lc = 2 / \sigma^2)$ 解交织后表示为 \mathbf{R}^p ，为乘积码译码器的输入软信息。

乘积码的一次译码包括行译码和列译码，如图 3 所示。乘积码的第 p 次行译码给第 i 个行 RS 码的比特级 Chase-Pyndiah 译码器的输入软信息表示为

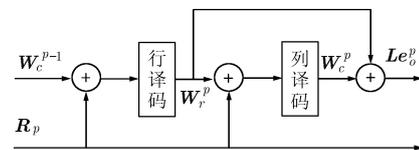


图 3 乘积码软译码简化框图

$$r_i^p = R_{r,i}^p + W_{c,i}^{p-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

其中 $W_{c,i}^{p-1}$ 为乘积码的第 $p-1$ 次列译码产生的比特级外信息。乘积码第 p 次行译码产生的外信息 W_r^p 用于第 p 次的列译码, 第 i 个列 RS 码的比特级 Chase-Pyndiah 译码器的输入软信息表示为

$$r_i^p = R_{c,i}^p + W_{r,i}^p, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

产生的外信息表示为 W_c^p 。仿真表明, 对 W_r^p , W_c^p 中由式(1)产生的外信息进行一定的限幅处理, 能够提高性能。乘积码第 p 次译码产生的外信息表示为

$$Le_o^p = W_c^p + W_r^p \quad (7)$$

交织后作为卷积码下次译码的先验信息 La^{p+1} 。第 p 次迭代译码得到的硬判决比特为

$$\text{bit}^p = \begin{cases} 1, & r^p + le_o^p > 0 \\ 0, & r^p + le_o^p < 0 \end{cases} \quad (8)$$

然后计算乘积码的每个 RS 码的校正子, 如果行、列所有 RS 码的校正子都为 0 并且连续若干次都是如此, 就判断迭代译码成功并停止译码。停止准则的应用, 减少了平均迭代次数, 从而降低了整体的译码复杂度。

当迭代次数达到最大并停止译码后, 通过观察 RS 乘积码的错误模式并利用 RS 乘积码的每行、每列都是 RS 码的结构, 我们发现如果对得到的硬判决比特进行进一步的处理, 能够纠正乘积码的某些错误模式, 提高误比特性能, 即硬判决译码辅助纠错方法。

硬判决译码辅助纠错方法的过程如下:

(1) 计算行、列 RS 码校正子不为零的码字数目。

(2) 如果行 RS 码校正子不为零的码字数目较大, 则先对乘积码的行进行代数硬译码, 再对列进行代数硬译码(反之, 则先对列进行代数硬译码, 再对行进行代数硬译码)。

(3) 计算乘积码的行、列 RS 码的校正子, 如果校正子全为零, 表示译码成功, 否则重复(2)。仿真表明此过程重复(2)两次后, 性能提高明显并且代价较低。

对于 SEC 的 RS (31,29,3) 来说, Peterson-Gorenstein-Zierler(PGZ)代数硬判决算法复杂度大大低于 Berlekamp-Massey(BM)算法^[6]。表 1 总结了 RS-TPC 采用 PGZ 译码算法及计算输出软信息的复杂度, 表 2 总结了 RS(255,223,33)采用 BM 算法的复杂度, 其中假设 chsae 软判决共有 16 次 PGZ 译码, 相邻错误模式之间只有一个比特不同^[8]。

4 仿真结果和分析

仿真基于 BPSK 调制和加性高斯白噪声信道。

表 1 RS-TPC 的 Chase-Pyndiah 算法复杂度($n=31$)

算法	乘法次数	加法次数
校正子	184n	184 n
错误位置	32n	0
错误值	32n	32n
相关	0	4096n
软输出	310n	约 124n
总计	558n	约 4436n

表 2 RS(255, 223, 33)BM 及软信息输出算法复杂度($N=255$)

算法	乘法次数	加法次数
校正子	约 32 N	约 32 N
错误方程	约 6 N + N / 8	约 3N + N / 8
钱搜索	约 16 N	约 16 N
错误值	约 8 N + N / 16	约 33 N
软输出	约 8 N	0
总计	约 76 N + 3 N / 16	约 84 N + N / 8

在级联 RS 乘积码与卷积码的系统中, RS 乘积码的成员码是 GF(32) 的 (31,29,3) RS 码, 乘积码的码率 0.87。级联 RS 码与卷积码的系统中, RS 长码是 GF(256) 的 (255,223,33), RS 短码是 GF(32) 的 (31,27,5), 码率都是 0.87^[3]。所有系统中卷积码都是 0.5 码率的系统反馈卷积码(RSC)编码器, 其生成多项式用 8 进制表示为(23,35)^[3]。级联码的码率都是 0.435。

级联 RS-TPC-CC 的最大迭代次数 8 次, 最不可靠位置的个数是 4, 16 个错误模式, Chase-Pyndiah 译码器的参数设置如下:

$$\alpha = (0.2, 0.2, 0.25, 0.25, 0.3, 0.3, 0.35, 0.35, 0.4, 0.4,$$

$$0.4, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4)$$

$$\beta = (0.02, 0.05, 0.075, 0.105, 0.14, 0.18, 0.225, 0.275,$$

$$0.33, 0.39, 0.455, 0.525, 0.6, 0.72, 0.9, 1)$$

如第 3 节所述, 对式(1)产生的外信息的幅值按 $0.3 \leq |w_{i,j}| \leq 3.5$ 处理。如果连续 2 次乘积码行、列所有 RS 码的校正子都为 0, 则判断迭代译码成功。仿真表明这既没有损失误比特性能, 也降低了整体的译码复杂度。

级联 RS (31,27,5) 与卷积码的系统迭代次数 8 次, RS 码与卷积码之间的行列交织器的交织深度为 31, 最不可靠位置的个数是 4, 16 个错误模式, Chase-Pyndiah 译码器的参数设置是 $\alpha = (0.6, 0.8, 0.9, 1, 1, 1, 1), \beta = (0.24, 0.56, 0.8, 0.95, 1, 1, 1, 1)$ 。

级联 RS (255,223,33) 与卷积码的系统迭代次数

8次, RS码与卷积码之间的行列交织器的交织深度为6, RS产生的外信息按式(2)计算, $d_{i,j}$ 由RS码硬判决代数译码器得到^[3], 公式(2)用到的参数设置是 $\beta = (0.6, 0.8, 1, 1, 1, 1, 1)$ 。其停止迭代的条件为连续2次RS码的校正子都为0, 则判断迭代译码成功。

图4为RS-TPC-CC在不同的迭代次数下的误比特性能, 仿真结果表明当迭代次数为8时误比特性能基本收敛。图5的仿真结果表明, 采用代数交织器的RS-TPC-CC系统的误比特性能明显优于采用行列交织器的RS-TPC-CC系统的误比特性能, 因此行列交织器不适合RS-TPC-CC系统。但对于RS-CC系统来说, 仿真结果表明行列交织器比代数交织器效果更好。

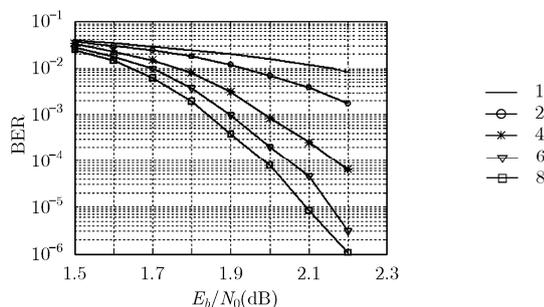


图4 不同迭代次数的RS-TPC-CC的BER性能

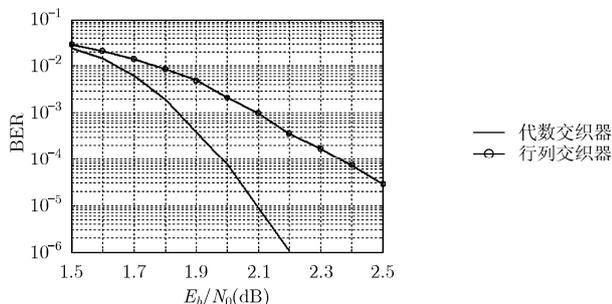


图5 不同交织器的RS-TPC-CC的BER性能

图6为RS(31,27,5)-CC, RS-TPC-CC, RS(255,223,33)-CC系统误比特性能的仿真结果。当误比特率 10^{-5} 时, 与RS(31,27,5)-CC相比, RS-TPC-CC大约有0.4 dB的编码增益, 与RS(255,223,33)-CC相比, RS-TPC-CC大约也有0.4 dB的编码增益。当误比特率 10^{-5} 时, 与码率0.431的扩展BCH(32,21)分组turbo码^[11]相比, RS-TPC-CC有0.3 dB的编码增益, 但RS-TPC-CC在复杂度和码长方面付出了较大的代价。

应用停止准则后, RS-TPC-CC的平均迭代次数约为2 dB 5.3次, 2.1 dB 4.9次, 2.2 dB 4.6次。RS(255,223,33)-CC的平均迭代次数约为2.4 dB 2.7

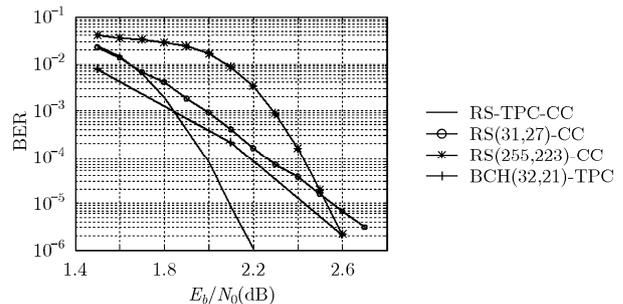


图6 不同级联系统的误比特性能

次, 2.5 dB 2.3次, 2.6 dB 2.1次。由表1和表2可见RS-TPC-CC的译码的复杂度基本与RS(255,223,33)-CC的复杂度相当。

5 结束语

本文提出了将RS乘积码作为外码, RSC码作为内码的级联码方案。由于乘积码每行(列)都是RS码的, 行列交织器并不适合此级联码, 本文使用了由同余向量产生的交织图案来打散RSC码译码产生的突发错误。此级联码采用了软输入软输出的迭代译码算法。通过观察RS乘积码的错误模式, 本文提出了硬判决译码辅助纠错方法来纠正乘积码的某些错误模式。仿真结果表明, 与迭代译码的级联RS/卷积码相比, 在加性高斯白噪声信道下, 当误比特率为 $1e-5$ 时, 系统的编码增益大约有0.4 dB并且译码的复杂度基本相当。

参考文献

- [1] Nguyen M V, Ko K, and Lee W, *et al.* A new scheme to predict erasures for Reed-Solomon decoder in T-DMB receiver. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2007, 53(2): 530-538.
- [2] Xu Chang-long. Soft decoding algorithm for RS-CC concatenated codes in WiMAX system. *IEEE VTC 2007-spring. Proceedings. Vehicular Technology Conference, Dublin, Ireland, 22-25 April 2007*: 740-742.
- [3] Aitsab O and Pyndiah R. Performance of concatenated Reed-Solomon convolutional codes with iterative decoding. *IEEE GLOBECOM 97. Proceedings. Global Telecommunications conference, Phoenix, USA, 3-8 Nov. 1997*: 934-938.
- [4] Pyndiah R, Glavieux A, Picart A, and Jacq S. Near optimum decoding of product codes. *IEEE. GLOBECOM 94. Proceedings. Global Telecommunications conference, San Francisco, USA, 28 Nov.-2 Dec.1994*: 339-343.
- [5] Aitsab O and Pyndiah R. Performance of reed-solomon block turbo code. *IEEE GLOBECOM 96. Proceedings. Global*

- Telecommunications conference, London, UK, 18-22 Nov. 1996: 121-125.
- [6] Rong Zhou, Le Bidan R, Pyndiah R, and Goalic A. Low-complexity high-rate Reed-Solomon block turbo codes. *IEEE Transactions on Communications*, 2007, 55(9): 1656-1660.
- [7] Le Bidan R, Pyndiah R, and Adde P. Some results on the binary minimum distance of Reed-Solomon codes and block turbo codes. IEEE. ICC2007. Proceedings. communications conference, Glasgow, Scotland, 24-28 June 2007: 990-994.
- [8] Hirst S A, Honary B, and Markarian G. Fast chase algorithm with an application in turbo decoding. *IEEE Transactions on Communications*, 2001, 49(10): 1693-1699.
- [9] Chi Zhipei, Song Leilei, and Parhi K K. On the performance/complexity tradeoff in block turbo decoder design. *IEEE Transactions on Communications*, 2004, 52(2): 173-175.
- [10] Clark G C Jr and Cain J B. Error-Correction Coding for Digital Communications. New York: Plenum, 1981.
- [11] Pyndiah R. Near-optimum decoding of product codes: block turbo codes. *IEEE Transactions on Communications*, 1998, 46(8): 1003-1010.
- 孙小钧: 男, 1981 年生, 博士生, 研究方向为纠错码解码技术.
刘晓健: 男, 1982 年生, 博士生, 研究方向为纠错码解码技术.
赵春明: 男, 1959 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为移动通信系统、纠错码编码技术、自适应滤波技术及通信专用集成电路设计.