

阻抗劈的 UTD 公式 (TM 情形)*

王秉中

(电子科技大学, 成都)

摘要 本文给出了 TM 平面波被一照射面为阻抗表面的导体劈绕射的一致性几何绕射公式。利用该公式, 我们计算了涂覆有耗介质的矩形平板的后向雷达散射截面, 计算结果与测量值吻合较好。

关键词 雷达散射截面; 阻抗劈; 几何绕射理论

一、引言

在实际应用中, 有效而准确地给出具有阻抗表面的劈尖(如涂有吸收材料的机翼、尾翼等)的高频绕射解是很重要的。一致性几何绕射理论 (UTD)^[1] 已被广泛而成功地用来处理了许多完纯导体劈高频绕射的问题^[2]。由于它具有物理概念清晰、简单易算的特点, 有人曾试图将其推广用于具有阻抗表面的劈尖或介质劈尖的绕射问题^[3-6], 但结果不是缺乏严格的推导就是算式过于繁杂。因此, 很有必要通过较严格的分析推导给出较简洁的 UTD 公式。本文将给出劈尖单面被 TM 平面波照射 (照射面为阻抗表面不是完纯导体)下的 UTD 公式。

二、阻抗劈的 UTD 公式

如图 1 所示, 一无限长劈尖的外角为 $n\pi$, 单位振幅 TM 平面波以角度 φ_0 入射到该劈尖, 入射电场为

$$E_z^{in} = \alpha_z \exp[jk\rho \cos(\varphi - \varphi_0)] \quad (1)$$

其中, k 为自由空间传播常数, α_z 是沿 z 轴方向的单位矢量, (ρ, φ) 为场点极坐标。设该平面波只照射到劈尖的 A 面 ($\varphi = 0$ 面), 即 $\varphi_0 < n\pi - \pi$ 。再设 A 面的表面阻抗为 Z_0/η_A ($\varphi = 0$ 面) 而 B 面 ($\varphi = n\pi$ 面) 为完纯导体, 其中 Z_0 为自由空间波阻抗。

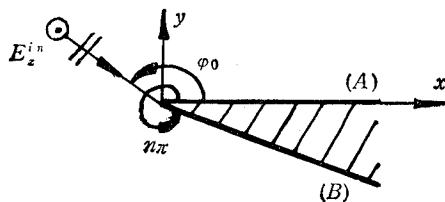


图 1 单面阻抗加载劈尖被 TM 平面波照射

定义 A 面的反射系数为

$$\Gamma_A = E_z^r / E_z^{in} |_{\varphi=0} \quad (2)$$

* 1988年1月12日收到, 1989年3月27日修改定稿。

其中, E_z^s 为散射场。于是, 反射系数可由下式定出。

$$\Gamma_A = \frac{Z_0/\eta_A - Z_0 \sec(\varphi - \pi/2)}{Z_0/\eta_A + Z_0 \sec(\varphi - \pi/2)} = \frac{\sin \varphi_0 - \eta_A}{\sin \varphi_0 + \eta_A} \quad (3)$$

边界条件可写成:

$$\begin{cases} E_z^s = \Gamma_A E_z^{\text{in}}, & \varphi = 0 \\ E_z^s + E_z^{\text{in}} = 0, & \varphi = n\pi \end{cases} \quad (4)$$

$$(5)$$

利用公式(见附录)

$$\exp(jk\rho \cos \Phi) = (2/\pi) \int_0^\infty K_{j\mu}(jk\rho) \text{ch}[\mu(\pi - |\Phi|)] d\mu \quad (6)$$

将平面波(1)写成如下的积分形式:

$$E_z^{\text{in}} = (2/\pi) \int_0^\infty K_{j\mu}(\gamma\rho) \text{ch}[\mu(\pi - |\varphi - \varphi_0|)] d\mu \quad (7)$$

其中, $\gamma = jk$ 。再设散射场具有相应的积分形式解,

$$E_z^s = (2/\pi) \int_0^\infty K_{j\mu}(\gamma\rho) [f_1(\mu) \text{ch}\mu\varphi + f_2(\mu) \text{sh}\mu\varphi] d\mu \quad (8)$$

其中的待定函数 $f_1(\mu)$ 、 $f_2(\mu)$ 由边界条件确定。

将(7)、(8)式代入边界条件(4)、(5)式, 得

$$\int_0^\infty K_{j\mu}(\gamma\rho) f_1(\mu) d\mu = \Gamma_A \int_0^\infty K_{j\mu}(\gamma\rho) \text{ch}[\mu(\pi - \varphi_0)] d\mu \quad (9)$$

$$\int_0^\infty K_{j\mu}(\gamma\rho) \{f_1(\mu) \text{ch}(\mu n\pi) + f_2(\mu) \text{sh}(\mu n\pi) + \text{ch}[\mu(\pi - n\pi + \varphi_0)]\} d\mu = 0 \quad (10)$$

上两式对任意 ρ 值均成立, 因此必有两式成立。

$$\begin{cases} f_1(\mu) = \Gamma_A \text{ch}[\mu(\pi - \varphi_0)] \\ f_1(\mu) \text{ch}(\mu n\pi) + f_2(\mu) \text{sh}(\mu n\pi) + \text{ch}[\mu(n\pi - \pi - \varphi_0)] = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$(12)$$

由(11)、(12)式可解出 $f_1(\mu)$ 、 $f_2(\mu)$, 代入(8)式, 整理得

$$E_z^s = \Gamma_A E_{z,A}^s - E_{z,B}^s \quad (13)$$

其中,

$$E_{z,A}^s = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K_{j\mu}(\gamma\rho) \left\{ \frac{\text{sh}[\mu(n\pi + \pi - \varphi - \varphi_0)]}{\text{sh}(\mu n\pi)} + \frac{\text{sh}[\mu(n\pi - \pi - \varphi + \varphi_0)]}{\text{sh}(\mu n\pi)} \right\} d\mu \quad (14)$$

$$E_{z,B}^s = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K_{j\mu}(\gamma\rho) \left\{ \frac{\text{sh}[\mu(n\pi - \pi + \varphi - \varphi_0)]}{\text{sh}(\mu n\pi)} - \frac{\text{sh}[\mu(n\pi - \pi - \varphi - \varphi_0)]}{\text{sh}(\mu n\pi)} \right\} d\mu \quad (15)$$

从散射场(13)式中减去反射场, 经过一系列推导, 我们可得如下绕射场的积分表达式

$$E_z^d = \Gamma_A E_{z,A}^d - E_{z,B}^d \quad (16)$$

其中,

$$E_{z,A}^d = I(\pi + (\varphi - \varphi_0), k\rho) - I[\pi - (\varphi + \varphi_0), k\rho] \quad (17)$$

$$E_{z,B}^d = I[\pi - (\varphi - \varphi_0), k\rho] - I[\pi + (\varphi + \varphi_0), k\rho] \quad (18)$$

其中,积分 I 的定义为:

$$I(\delta, k\rho) = \frac{1}{2n\pi} \sin\left(\frac{\delta}{n}\right) \int_0^\infty \frac{\exp(-\gamma\rho \operatorname{ch}x)}{\operatorname{ch}(x/n) - \cos(\delta/n)} dx \quad (19)$$

在高频情况下, $k\rho \gg 1$,用最陡下降法处理积分(19)式,得

$$I(\delta, k\rho) \approx \frac{\exp(-jk\rho)}{2n\sqrt{2\pi jk\rho}} \operatorname{ctg}\left(\frac{\delta}{2n}\right) F\left[n^2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2n}\right) 2k\rho\right] \quad (20)$$

其中,过渡函数 $F(x)$ 的定义为^[1]:

$$F(x) = 2j|\sqrt{x}| e^{ix} \int_{|\sqrt{x}|}^\infty e^{-it^2} dt \quad (21)$$

利用(20)式,可写出高频情况下的绕射场表达式,即 UTD 公式:

$$\begin{aligned} E_z^d = & \frac{\exp(-jk\rho)}{2n\sqrt{2\pi jk\rho}} \left(\Gamma_A \left\{ \operatorname{ctg}\left[\frac{\pi + (\varphi - \varphi_0)}{2n}\right] F\left[n^2 \sin^2\left(\frac{\pi + (\varphi - \varphi_0)}{2n}\right) 2k\rho\right] \right. \right. \\ & - \operatorname{ctg}\left[\frac{\pi - (\varphi + \varphi_0)}{2n}\right] F\left[n^2 \sin^2\left(\frac{\pi - (\varphi + \varphi_0)}{2n}\right) 2k\rho\right] \left. \right\} \\ & - \left\{ \operatorname{ctg}\left[\frac{\pi - (\varphi - \varphi_0)}{2n}\right] F\left[n^2 \sin^2\left(\frac{\pi - (\varphi - \varphi_0)}{2n}\right) 2k\rho\right] \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{ctg}\left[\frac{\pi + (\varphi + \varphi_0)}{2n}\right] F\left[n^2 \sin^2\left(\frac{\pi + (\varphi + \varphi_0)}{2n}\right) 2k\rho\right] \right\} \right) \quad (22) \end{aligned}$$

可以验证,由(22)式给出的结果能够保证总场在反射影界及入射影界处是连续的。

当 $\Gamma_A = -1$ 时,(22)式变为双面均为完纯导体的劈尖的 UTD 公式,与通常使用的、由文献[1]给出的导体劈的 UTD 公式比较,我们发现:

(1) 两套公式具有相同的准确程度;

(2) 在应用上,本文的 UTD 公式使用更为方便。因为,当给定一组导体劈绕射参数 n, φ, φ_0 ,由本文的 UTD 公式可直接求出绕射场;而由文献[1]的公式计算绕射场,必须先由 n, φ, φ_0 判断出一个中间参数 N^\pm 的值,多一道手续^[1]。

三、计算实例

矩形导电平板是雷达及天线理论中广泛应用的一种基本结构。下面,我们将利用上

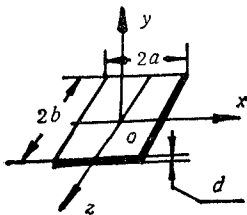


图 2 单面涂层矩形导体平板

述阻抗劈的 UTD 公式((22)式),计算照射面被覆以有耗介质的矩形导电板的后向雷达散射截面,并与测量数据进行比较。

设矩形板尺寸为 $2a \times 2b$,位于 xoz 平面被覆以一层均匀有耗介质,相对介电常数为 $\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r''$,相对导磁率为 $\mu_r = \mu_r' - j\mu_r''$,介质层厚度为 d ,如图 2 所示。设入射平面波为相对于 z 轴的 TM 平面波,即电场只有 z 分量,相对于 y 轴的人射角为 θ_0 ,入射面为 xy 平面。

计算步骤简述如下:

(1) 在几何光学近似下, 用无限大涂层导体板的反射系数作为 Γ_A , 其结果为^[7]

$$\Gamma_A = \frac{(\sqrt{\mu_r} \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_r} \cos \theta) \exp(j2k_y d) - (\sqrt{\mu_r} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_r} \cos \theta)}{(\sqrt{\mu_r} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_r} \cos \theta) \exp(j2k_y d) - (\sqrt{\mu_r} \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_r} \cos \theta)} \quad (23)$$

其中, 复数角 θ 及 k_y 由下列关系确定:

$$\begin{cases} \sin \theta_0 = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \sin \theta \\ k_y d = 2\pi(d/\lambda) [\mu_r \epsilon_r - \sin^2 \theta_0]^{1/2} \end{cases} \quad (24)$$

$$(25)$$

λ 为自由空间波长。

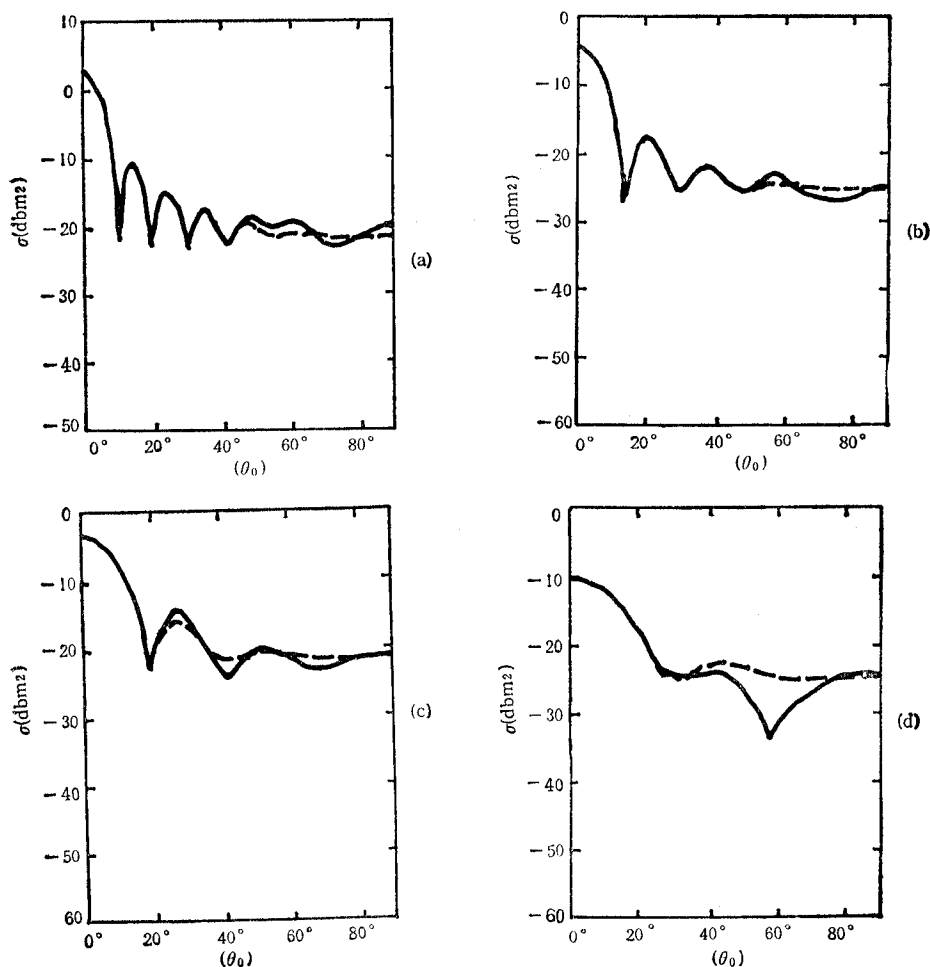


图3 单面涂层方铝板的后向雷达散射截面

--- 本文计算值 — [9] 测量值

(a) $f = 6\text{GHz}$ $d = 0.762\text{mm}$ $2a \times 2b = 15\text{cm} \times 15\text{cm}$

(b) $f = 6\text{GHz}$ $d = 0.762\text{mm}$ $2a \times 2b = 10\text{cm} \times 10\text{cm}$

(c) $f = 3\text{GHz}$, a, b, d 同(a)

(d) $f = 3\text{GHz}$, a, b, d 同(b)

(2) 将矩形平板在 z 方向无限延拓, 计算此无限长涂层条带每单位长度的后向雷达散射截面积。

$$\sigma_{\text{length}} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho |E_z^s / E_z^{\text{in}}|^2 \quad (26)$$

其中, 远区散射场 E_z^s 可由前述阻抗劈的 UTD 公式计算, 此时, 将此条带的两个边缘看作外角为 2π 的无限长劈尖的边缘。

(3) 矩形板的后向雷达散射截面可由下式计算^[8]:

$$\sigma_{\text{返}} = (8b^2/\lambda)\sigma_{\text{length}} \quad (27)$$

图 3 是我们计算的照射面涂覆有 Eccosorb FDS 雷达吸收材料的方铝板的后向雷达散射截面, 图中还给出了文献[9]提供的测试数据. 从图中可见计算值与测量值吻合较好, 并且, 物体的电尺寸愈大(频率愈高), 计算值与测量值吻合得愈好。

虽然图 3 中物体的最大电尺寸才只有 3λ (位于谐振区低端), 但计算值已与测量值吻合较好; 那么, 当物体位于高频区(电长度大于 10λ)时, 可以预计, 由前述阻抗劈的 UTD 公式计算的 RCS 值会与物体真实的 RCS 值吻合得更好. 同时还可以看出: 虽然我们的阻抗劈 UTD 公式是高频近似公式, 但有时它也可以用于更广的范围, 例如在本例中用于谐振区内。

附 录

公式(6)的证明

根据文献[10]中的[6.794(1)]公式

$$\int_0^\infty K_{ix}(a)K_{ix}(b)\text{ch}[(\pi - \varphi)x]dx = \frac{\pi}{2}K_0(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}) \quad (A1)$$

可得

$$\begin{aligned} \pi^2/4j)H_0^{(2)}(kR) &= (\pi/2)K_0(jkR) \\ &= (\pi/2)K_0[\sqrt{(\gamma\rho)^2 + (\gamma\rho_0)^2 - 2\gamma^2\rho\rho_0\cos(\varphi - \varphi_0)}] \\ &= \int_0^\infty K_{i\mu}(\gamma\rho)K_{i\mu}(\gamma\rho_0)\text{ch}[\mu(\pi - |\varphi - \varphi_0|)]d\mu \end{aligned} \quad (A2)$$

令 $\rho_0 \rightarrow \infty$, 利用 $H_0^{(2)}(z)$ 、 $K_\nu(z)$ 的大宗量渐近式:

$$H_0^{(2)}(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \sqrt{2j/(\pi z)} \exp(-jz) \quad (A3)$$

$$K_\nu(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \sqrt{\pi/(2z)} \exp(-z) \quad (A4)$$

(A2)式化为

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{4j} \sqrt{\frac{2j}{\pi k\rho_0}} e^{-ik\rho_0} e^{ik\rho\cos(\varphi - \varphi_0)} \\ \approx \int_0^\infty K_{i\mu}(\gamma\rho) \sqrt{\frac{\pi}{2jk\rho_0}} e^{-ik\rho_0} \text{ch}[\mu(\pi - |\varphi - \varphi_0|)]d\mu \end{aligned}$$

于是可得

$$\exp[jk\rho\cos(\varphi - \varphi_0)] = (2/\pi) \int_0^\infty K_{i\mu}(\gamma\rho) \text{ch}[\mu(\pi - |\varphi - \varphi_0|)]d\mu \quad (A5)$$

即

$$\exp[jk\rho\cos\Phi] = (2/\pi) \int_0^\infty K_{i\mu}(\gamma\rho) \text{ch}[\mu(\pi - |\Phi|)]d\mu \quad (6)$$

参 考 文 献

- [1] R. G. Kouyoumjian, P. H. Pathak, *Proc. IEEE*, **62**(1974), 1448—1461.
- [2] R. C. Hansen, et al., *Geometric Theory of Diffraction*, IEEE Press, New York, 1981.
- [3] W. D. Burnside, K. W. Burgener, *IEEE Trans. on AP*, **AP-31**(1983), 104—110.
- [4] K. C. Chamberlin, R. J. Luebbers, *IEEE Trans. on AP*, **AP-30**(1982), 1093—1098.
- [5] R. J. Luebbers, *IEEE Trans. on AP*, **AP-32**(1984), 70—76.
- [6] R. Tiberio, G. Pelosi, G. Manare, *IEEE Trans. on AP*, **AP-33**(1985), 867—873.
- [7] J. R. Wait, *Electromagnetic Waves in Stratified Media*, Academic Press, New York, 1980.
- [8] R. A. Ross, *IEEE Trans. on AP*, **AP-14**(1966), 329—335.
- [9] Steven W. Rogers, AD-A170973(1986).
- [10] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, And Products*, Academic Press, New York, 1980.

UTD FORMULA FOR AN IMPEDANCE WEDGE (TM CASE)

Wang Bingzhong

(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu)

Abstract A uniform GTD formula for the TM plane wave diffraction by a perfect conducting wedge loaded with an impedance surface on the illuminated side is given. This formula is used to compute the back-scattered RCS of some rectangular flat plates coated with lossy dielectric. The results computed here are in fair agreement with the experimental values.

Key words Radar scattering cross section; Impedance wedge; Geometrical diffraction theory