

# C-B 样条曲线的光顺逼近算法研究

杨雅迪, 秦新强, 胡 钢, 党发宁, 刘 飞

YANG Ya-di, QIN Xin-qiang, HU Gang, DANG Fa-ning, LIU Fei

西安理工大学 理学院, 西安 710054

School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China

E-mail: funallen@126.com

YANG Ya-di, QIN Xin-qiang, HU Gang, et al. Research on fairing and approximation algorithm of C-B spline curves. *Computer Engineering and Applications*, 2009, 45(35): 205-207.

**Abstract:** Based on the fairing requirements of the strain energy and jerk energy of a thin elastic beam, a method of fairing C-B spline curves is given. The main idea is: Fairing of C-B spline curves is fulfilled by adjusting the value of parameter and control points to reduce the implied energy. By using the technique of least square approximation and non-linear functional minimization, the data points of plane can be faired approximately. Finally, examples of C-B spline curve fairing show the efficiency of the method. The numerical example shows that this algorithm provides an effect and new method for the fairing of C-B spline curves.

**Key words:** fairing; approximation; C-B spline curves; least-squares solution; minimizing function

**摘 要:** 基于弹性均匀细梁的应力能和扰动能的光顺优化, 提出了一种光顺 C-B 样条曲线的算法。该算法的基本思想是: 通过调整控制参数和控制顶点使得曲线的能量最小, 得到最优的光顺逼近曲线。通过最小二乘法和非线性泛函的极小值优化计算, 对平面数据点进行光顺逼近, 达到了光顺的目的。最后, 给出了由数据拟合的 C-B 样条曲线光顺的实例。实例结果表明, 该算法为 C-B 样条曲线的光顺问题提供了一种有效的新方法。

**关键词:** 光顺; 逼近; C-B 样条曲线; 最小二乘法; 极小泛函

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2009.35.062 文章编号: 1002-8331(2009)35-0205-03 文献标识码: A 中图分类号: TP391

Bezier 曲线和均匀 B 样条曲线不能精确表示除抛物线之外的圆锥曲线, 为此引入 NURBS 曲线解决了表示和设计初等曲面时的构造问题, 但 NURBS 方法的权因子、参数化、曲线曲面的几何连续性问题仍然没有完全解决。C-B 样条曲线不仅很好地克服上述弊端, 更有着其特殊的性质, 从而可以处理自由曲线曲面, 精确表示圆弧和椭圆。在构造工程曲面时, 采用 C-B 样条方法, 具有算法简单、相对节省存储空间、运算速度快等特点<sup>[1]</sup>。目前, 国内外的研究主要集中在 C-B 样条的性质<sup>[2-4]</sup>、插值<sup>[5]</sup>、分割<sup>[6]</sup>、拼接<sup>[6]</sup>及造型<sup>[7]</sup>等方面, 但关于 C-B 样条的光顺问题却很少涉及。因此, 文章对 C-B 样条曲线的光顺问题进行了研究。曲线光顺的方法之一是能量法: 指弹性细梁所处的最自然状态, 其物理上的意义为应力能达到极小。文中的光顺准则定为将物理意义下的应力和应力能及动力学中的扰动能作加权线性组合, 使其达到最小。

## 1 C-B 样条曲线的定义

**定义** 设  $d_0, d_1, d_2, \dots, d_{n+1}, d_{n+2}$  是  $n+3 \geq 4$  个给定的控制顶点,  $\alpha$  是任意实数, 且  $0 < \alpha \leq \pi$ , 则曲线:

$$P_i(t) = T B D, 0 < \alpha \leq \pi, 0 < t \leq \pi \quad (1)$$

称为 C-B 样条曲线。式中:

$$T = [\sin t \quad \cos t \quad t \quad 1]$$

$$D = [d_i, d_{i+1}, d_{i+2}, d_{i+3}]^T \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

$$B = \frac{1}{2\alpha(1-C)} \begin{bmatrix} C & -(1+2C) & 2+C & -1 \\ -S & 2S & -S & 0 \\ -1 & 1+2C & -(1+2C) & 1 \\ \alpha & -2\alpha C & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

其中  $S = \sin \alpha$ ,  $C = \cos \alpha$ 。则式(1)可表示为:

$$P_i(t) = B_0(t)d_i + B_1(t)d_{i+1} + B_2(t)d_{i+2} + B_3(t)d_{i+3} \quad (2)$$

其中:

**基金项目:** 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.90510017, 50679073); 陕西省教育厅基金项目(No.08JK399)。

**作者简介:** 杨雅迪(1984-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向: 计算机辅助几何设计与图形学; 秦新强(1962-), 男, 博士, 教授, 硕导, 主要研究方向: 微分方程数值解、计算机辅助几何设计与图形学; 胡钢(1979-), 男, 讲师, 主要研究方向: 计算机辅助几何设计与图形学、图像融合; 党发宁(1962-), 男, 博士, 教授, 博导, 主要研究方向: 计算力学和岩土工程数值分析; 刘飞(1982-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向: 计算机辅助几何设计与图形学。

**收稿日期:** 2008-07-10 **修回日期:** 2008-10-13

$$B_0(t) = \frac{(\alpha-t) - \sin(\alpha-t)}{2\alpha(1-C)}$$

$$B_3(t) = \frac{t - \sin t}{2\alpha(1-C)}$$

$$B_1(t) = B_3(t) - 2B_0(t) + \frac{\alpha-t}{\alpha}$$

$$B_2(t) = B_0(t) - 2B_3(t) + \frac{t}{\alpha}$$

称为 C-B 样条曲线的基函数, 它们满足权性和非负性, 即:

$$(1) \sum_{i=0}^3 B_i(t) \equiv 1$$

$$(2) B_i(t) \geq 0 (i=0, 1, 2, 3)$$

C-B 样条曲线有许多类似于 B 样条曲线的性质: 端点插值、凸包、离散性质、对称性、几何不变性、局部调整性等, 还可以精确表示二次曲线, 它依赖于控制参数  $\alpha$ , 这增加了曲线构造的自由度<sup>[2,7]</sup>。

### 2 光顺准则

在工程上的曲线外形设计中, 一条富有弹性的均匀细梁 (thin elastic beam) 常作为曲线的光顺模型, 此时, 细梁所在位置趋向于一个自然位置: 应力能达到极小。在材料力学上, 可以分析均匀细梁的应力为<sup>[8]</sup>:

$$\int \|x'(t)\|^2 dt \quad (3)$$

相应的应力能为:

$$\int k^2(t) \|x'(t)\|^2 dt \quad (4)$$

其中  $x(t)$  为细梁所在位置曲线,  $\|x(t)\|$  取平方范数 (2-范数),  $k(t)$  为曲线  $x(t)$  的曲率。在小挠度 (small deflection) 的情况下,  $\|x'(t)\|$  较小,  $k(t) \approx \|x''(t)\|$ 。这时, 作为对积分 (4) 的一个逼近, 可以用如下积分作为近似应力能:

$$\int \|x''(t)\|^2 dt \quad (5)$$

使应力和应力能极小化常作为曲线光顺的一个准则。在实际应用中时, 还要考虑到均匀细梁的扰动, 要求光顺的曲线满足扰动最小原理。经过动力学分析, 扰动能可以用下式积分来近似

$$\int \|x'''(t)\|^2 dt \quad (6)$$

将应力、应力能和扰动能综合考虑, 对它们作一加权组合, 得到:

$$\int (a \|x'(t)\|^2 + b \|x''(t)\|^2 + c \|x'''(t)\|^2) dt \quad (7)$$

这里取式 (7) 为光顺曲线的极小泛函, 其中  $a, b, c$  为预先给定的常数, 满足  $a, b, c \geq 0, a+b+c=1$ 。特别地, 当  $a=0, b=1, c=0$  时, 式 (7) 为 Hagen, Wang 等提出的光顺标准<sup>[9-10]</sup>; 当  $a=0, b+c=1$  时, 式 (7) 为李平安等提出的光顺标准<sup>[11]</sup>; 当  $a+b=1, c=0$  时, 式 (7) 为 Tzvetomir 等提出的光顺标准<sup>[12]</sup>。将式 (7) 极小化, 得到一个变分问题, 解此变分问题可求得控制参数  $\alpha$  和控制顶点, 其中  $a, b, c$  可以作为参数, 适当调整它们的值, 以便得到最满意的光顺曲线。

### 3 C-B 样条曲线的光顺逼近

首先考虑:

问题 1 已知数据点列  $\{P_i\} (i=0, 1, \dots, n \in \mathfrak{R}^2)$ , 求一条 C-B

样条曲线  $\Gamma: r=P_0(t), t \in [0, \alpha]$ , 使得矢径  $P_i$  的终点  $P_i \in \Gamma$ 。求解方法如下。

首先将型值点参数化, 可采用规范累加弦长参数化:

$$t_0=0, t_k = \frac{\sum_{i=1}^k |P_i - P_{i-1}|}{\sum_{i=1}^n |P_i - P_{i-1}|} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

则上述的问题归之为解非线性方程组:

$$\sum_{k=0}^3 B_k(t_i) d_k = P_i (i=0, 1, 2, \dots, n, k=0, 1, 2, 3)$$

如果写成矩阵形式则有

$$AD = P \quad (8)$$

式中:  $D=[d_0, d_1, d_2, d_3]^T$ ,  $d_0, d_1, d_2, d_3$  分别为 C-B 样条曲线的 4 个控制顶点。

$$A = [P_0, P_1, \dots, P_n]^T \begin{bmatrix} B_0(t_0) & B_1(t_0) & B_2(t_0) & B_3(t_0) \\ B_0(t_1) & B_1(t_1) & B_2(t_1) & B_3(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_0(t_n) & B_1(t_n) & B_2(t_n) & B_3(t_n) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+1) \times 4}$$

其中  $B_k(t) (k=0, 1, 2, 3)$  是 C-B 样条曲线基函数 (见式 (2))。

一般情况下, 式 (8) 是没有精确解的, 即不存在严格通过这些数据点的插值曲线, 但可以求这些型值点的最小二乘逼近解, 即求参数多项式曲线:

$$\Gamma: r=P_0(t)$$

$$\text{使得 } \sum_{i=0}^n |P_0(t_i) - P_i|^2 = \min。$$

因  $A$  是列满秩, 即  $rank(A)=4$ , 则式 (8) 对应的 Gauss 正交方程组为

$$A^T AD = A^T P$$

则有

$$D = A^+ P \quad (9)$$

其中  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ 。

由方程 (9) 求得 C-B 样条曲线的控制顶点  $d_0, d_1, d_2, d_3$ , 从而得到问题 1 的解。

问题 2 如何调整控制参数  $\alpha$  和控制顶点  $d_0, d_1, d_2, d_3$ , 使对应的 C-B 样条曲线  $\Gamma: r=P_0(t)$  光顺。

根据上文第 2 章提出的光顺准则, 可建立光顺的约束方程为:

$$E = \int_0^\alpha (a \|P_0'(t)\|^2 + b \|P_0''(t)\|^2 + c \|P_0'''(t)\|^2) dt = \min \quad (10)$$

下面给出求 C-B 样条曲线的光顺量  $E$  的具体表达式, 由式 (1) 得

$$P_0'(t) = T^T B D, P_0''(t) = T''^T B D, P_0'''(t) = T'''^T B D \quad 0 < \alpha \leq \pi, 0 < t \leq \alpha$$

其中:  $T'=[\cos t \quad -\sin t \quad 1 \quad 0]$ ,  $T''=[-\sin t \quad -\cos t \quad 0 \quad 0]$ ,  $T'''=[-\cos t \quad \sin t \quad 0 \quad 0]$ 。

$D$  和  $B$  的意义同式 (1)。

由式 (10) 有:

$$E = (BD)^T \begin{bmatrix} \frac{\alpha-b+c}{4} \sin 2\alpha + \frac{a+b+c}{2} \alpha & -\frac{a+b+c}{2} \sin^2 \alpha & a \sin \alpha & 0 \\ -\frac{a-b+c}{2} \sin^2 \alpha & \frac{a-b+c}{4} \sin 2\alpha + \frac{a+b+c}{2} \alpha & a \cos \alpha & 0 \\ a \sin \alpha & a \cos \alpha & a \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (BD)$$

在进行光顺时,既要考虑曲线的偏差,同时又要考虑到光顺量达到最小,所以综合问题 1 和问题 2,整个系统的能量可令:

$$E \rightarrow \min$$

这样可求出光顺后的控制参数  $\alpha$  和控制顶点  $d_0, d_1, d_2, d_3$ ,但在设计中希望曲线通过首末控制顶点,所以令  $P_0=d_0, P_n=d_3$ ,这样只要对  $E$  求关于控制参数  $\alpha$  和控制顶点  $d_1, d_2$  的偏导,从而达到光顺的目的。即由变分原理有:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial E}{\partial d_1} = 0, \frac{\partial E}{\partial d_2} = 0 \quad (11)$$

综合问题 1 和问题 2 给出 C-B 样条曲线的光顺逼近算法如下:

- (1) 采用累加弦长方法将数据点参数化;
- (2) 给定  $\alpha$  的初始值,由方程(9)求得 C-B 样条曲线的控制顶点  $d_0, d_1, d_2, d_3$ ;
- (3) 给定  $a, b, c$  的值,令  $P_0=d_0, P_n=d_3$ ,由式(11)确定  $a, d_1, d_2$ ;
- (4) 将  $\alpha, d_1, d_2$  的值代入式(2),从而得相应的光顺逼近曲线  $\Gamma: r=P_0(t) \in \mathcal{R}^2, t \in [0, a]$ 。

### 4 数值例子

给定一组数据点  $P_i(x_i, y_i) (i=0, 1, \dots, 9)$  如表 1 所示。

表 1 一组数据点  $P_i(x_i, y_i)$

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_i$	0.5	1.0	0.5	1.5	1.2	2.7	1.7	2.0	4.5	6.0
$y_i$	0.5	1.0	1.0	0.8	2.1	2.2	2.3	2.0	2.0	1.0

给定初始值  $\alpha=\pi/3, a=b=c=1/3$ ,如图 1、图 2;再给定初始值  $\alpha=\pi/2, a=1/4, b=1/4, c=1/2$ ,如图 3、图 4。

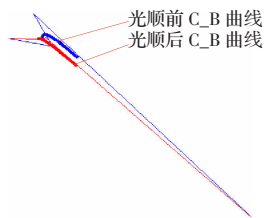


图 1 光顺前后的 C-B 样条曲线 ( $\alpha=\frac{\pi}{3}, a=b=c=\frac{1}{3}$ )

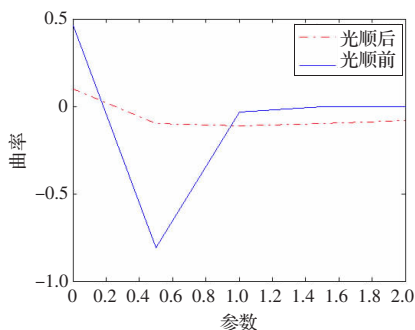


图 2 光顺前后的曲线曲率变化对比 ( $\alpha=\frac{\pi}{3}, a=b=c=\frac{1}{3}$ )

图 1、图 3 为光顺前后的 C-B 样条曲线图;图 2、图 4 为光顺前后的曲线曲率变化对比。从图 2、图 4 可以看出,光顺后的曲线的曲率图较之光顺前的曲线的曲率图变化趋于平稳,从而达到光顺的目的。

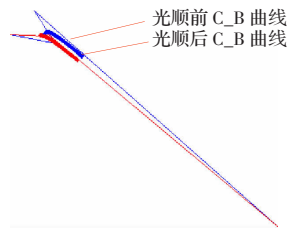


图 3 光顺前后的 C-B 样条曲线 ( $\alpha=\frac{\pi}{2}, a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{4}, c=\frac{1}{2}$ )

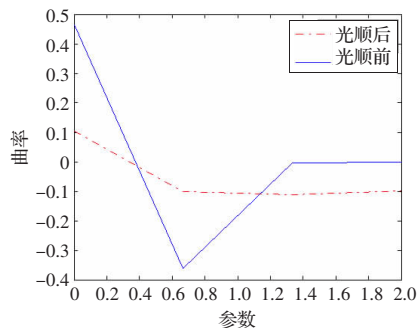


图 4 光顺前后的曲线曲率变化对比 ( $\alpha=\frac{\pi}{2}, a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{4}, c=\frac{1}{2}$ )

### 5 结束语

文章提出的通过调整控制参数  $\alpha$  和控制顶点使得 C-B 样条曲线的能量最小,得到最优的光顺逼近曲线的方法具有简单、直观和实用的特点,并可以进一步推广到高阶 C-B 样条曲线和曲面的光顺逼近。

### 参考文献:

- [1] 曾庭俊,王卫民,张纪文.C-B 样条旋转曲面造型研究[J].工程图学学报,2004(2):104-108.
- [2] Zhang Jiwen.C-curves:An extension of cubic curves[J].Computer Aided Geometric Design,1996,13(3):199-217.
- [3] Mainar E,Pea J M.A basis of C-Bezier splines with optimal properties[J].Computer Aided Geometric Design,2002,19:291-295.
- [4] 陈秦玉,杨勋年.四次 C-曲线的性质及其应用[J].高等应用数学学报:A 辑,2003,18(1):45-50.
- [5] 刘华勇.C<sup>2</sup> 连续的 C-B 样条的插值和拟合方法[J].湖南工程学院学报,2005,15(4):68-71.
- [6] 李鹏,李原,刘平,张开富.C-B 样条曲线及曲面的光滑拼接与应用[J].西北工业大学报,2007,25(6):890-895.
- [7] Zhang Jiwen.Two different forms of C-B splines[J].CAGD,1997,14:31-41.
- [8] 丁友东,华宣积.基于光顺优化的 NURBS 曲线权因子估计方法[J].计算机辅助设计与图形学学报,2000,12(5):325-329.
- [9] Hagen H,Bonneau G.Variational design of smooth rational Bezier curves[J].CAGD,1991,8:393-399.
- [10] Wang X F,Cheng F H,Barsky B A.Energy and B-spline interpolation[J].CAD,1997,29(7):485-496.
- [11] Li Anping,Jiang Dawei.The weights optimization fairing algorithm for the cubic uniform rational B-spline curves[J].Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics,1997,9(6):562-567.
- [12] Tzvetom ir I V.Fair interpolation and approximation of B-spline by energy minimization and points insertion[J].CAD,1996,28(9):753-760.