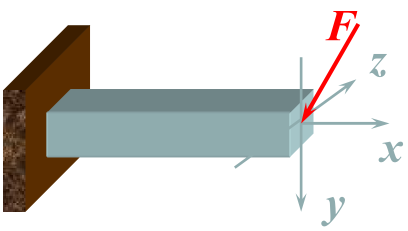
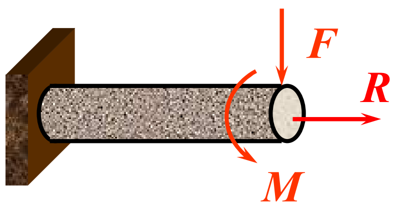
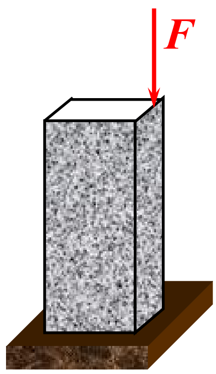
第十章
组合变形杆件的强度计算

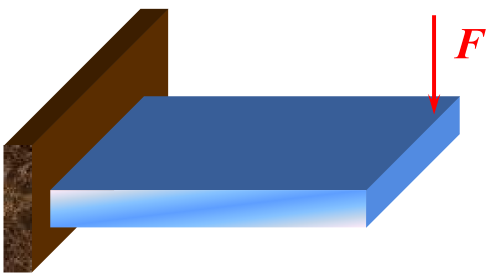
组合变形

组合变形 ：在复杂外载作用下，构件的变形会包含几种简单变形，当几种变形所对应的应力属同一量级时，不能忽略之，这类构件的变形称为组合变形。



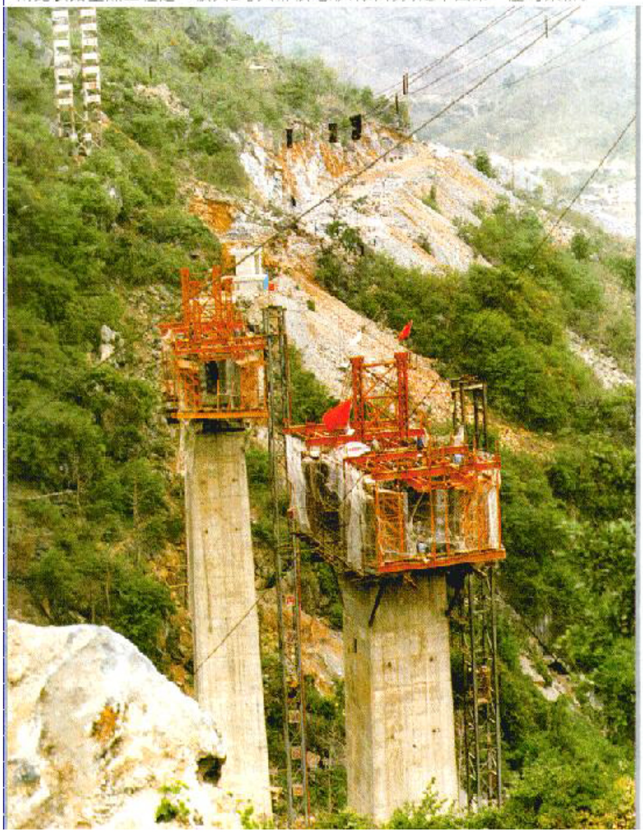


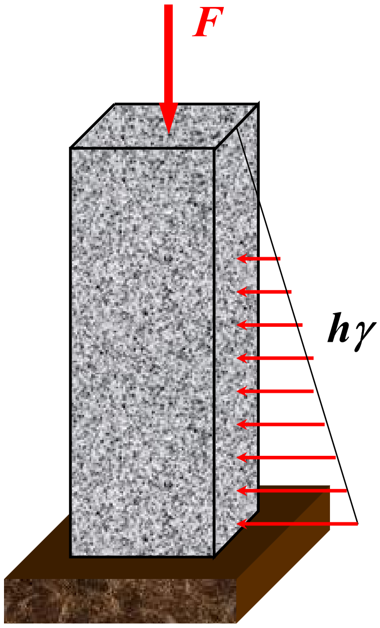




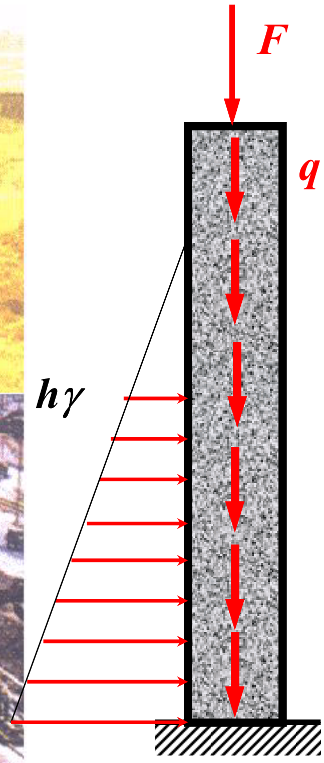
常见组合变形的类型：
（1）斜弯曲*
（2）偏心拉伸（压缩）
（3）拉伸（压缩）与弯曲组合
（4）弯扭组合

南昆铁路重点工程之一板其2号大桥依地形、顺山势，是中国第一座弯梁桥。





材料力学



水坝

叠加原理

构件在小变形和弹性范围（服从胡克定理）的条件下，力的独立性原理是成立的。即所有载荷作用下的内力、应力、应变等是各个单独载荷作用下的值的叠加。

解决组合变形的基本方法是将其分解为几种基本变形；分别考虑各个基本变形时构件的内力、应力、应变等；最后进行叠加。

组合变形的研究方法 —— 叠加原理

①外力分析：外力向形心简化并沿主惯性轴分解

②内力分析：求每个外力分量对应的内力方程和内力图，确定危险面。

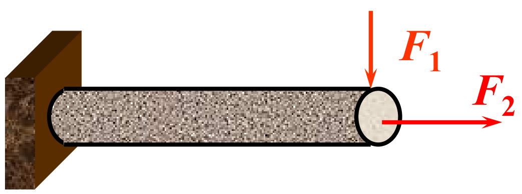
③应力分析：画危险面应力分布图，叠加，建立危险点的强度条件。

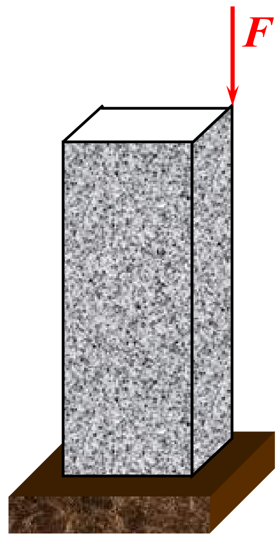
几种基本变形计算：

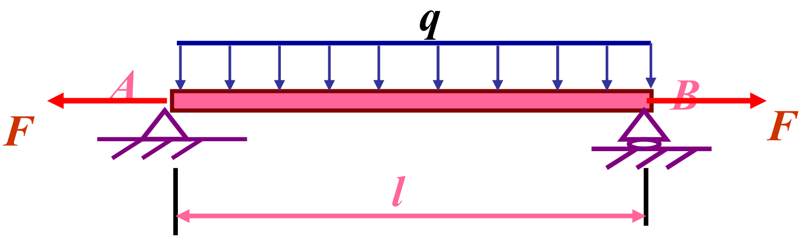
变形	轴向拉伸(压缩)	扭转	平面弯曲	
外力	轴向力	外力偶	横向力或外力偶	
内力	轴力(F_N)	扭矩(T)	剪力(F_S)	弯矩(M)
正负	拉为正，压为负	右手螺旋	+	+
应力	正应力σ	切应力τ	切应力τ	正应力σ
分布	均匀分布	线性分布	抛物线分布	线性分布
计算	$\sigma=\frac{F_N}{A}$	$\tau_\rho=\frac{T\rho}{I_p}$	$\tau(y)=\frac{F_S S_z^*(y)}{bI_z}$	$\sigma=\frac{My}{I_z}$
强度条件	$\sigma_{max}=\frac{F_{N\max}}{A}\le[\sigma]$	$\tau_{max}=\frac{T_{max}}{W_p}\le[\tau]$	$\tau_{max}\le[\tau]$	$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z}\le[\sigma]$
变形	绝对伸长	扭转角	转角	挠度
计算	$\Delta l=\frac{F_N l}{EA}$	$\varphi=\frac{Tl}{GI_p}$	$\left.\begin{matrix}w\\ \theta\end{matrix}\right\}=\frac{荷载\cdot l^n}{系数\cdot EI_z}$	
刚度条件	$\Delta l\le[\Delta l]$	$\theta_{max}=\frac{T}{GI_p}\le[\theta]$	$\theta_{max}\le[\theta]$	$\frac{w_{max}}{l}\le\left[\frac{w}{l}\right]$

材料力学

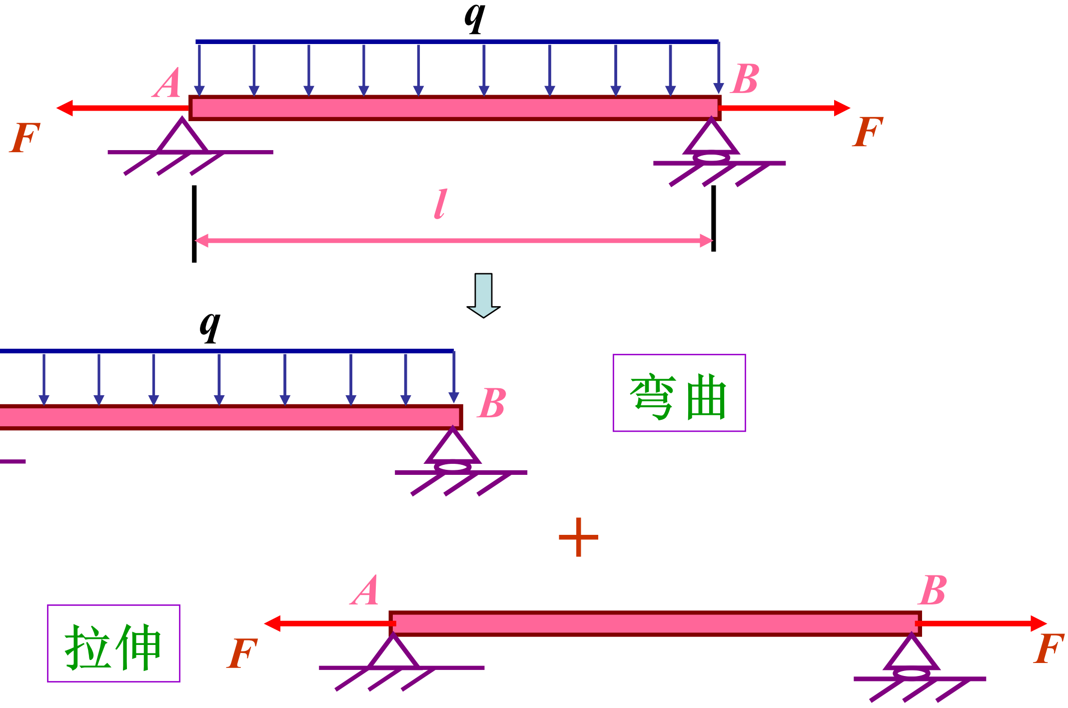
拉（压）与弯曲组合变形的强度计算

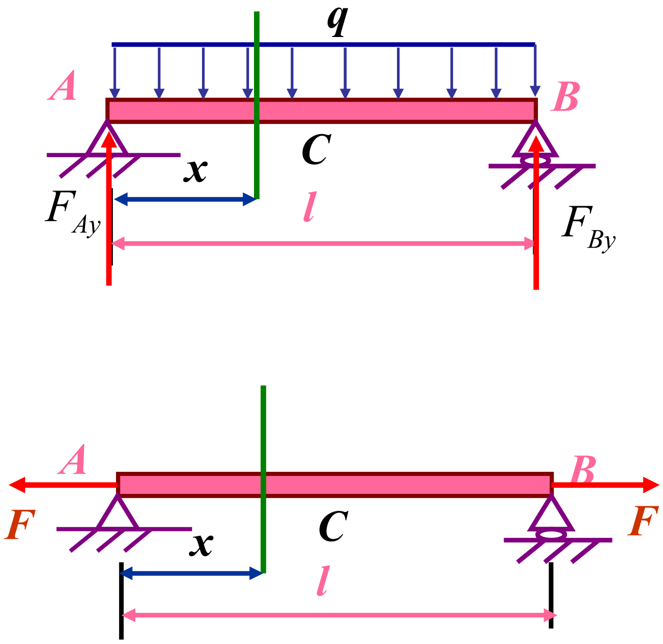






- 轴向荷载与横向荷载联合作用





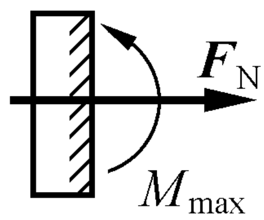
内力分析

剪力： $F_S = F_{Ay} - qx$

弯矩： $M = F_{Ay}x - \frac{1}{2}qx^2$

轴力： $F_N = F$

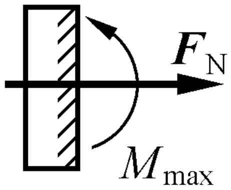
危险截面：跨中截面C

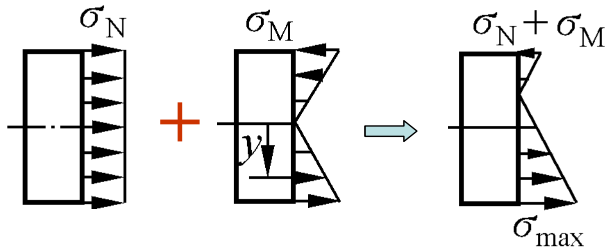


$F_N = F$

$M_C = \frac{1}{8}ql^2$

应力分析





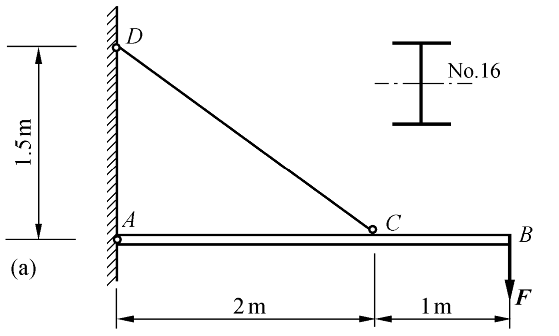
$$\sigma_N = \frac{F_N}{A}(\text{均布}),\quad \sigma_M = \frac{M_{\max}\,y}{I_z}(\text{线性分布}),$$

叠加 ⇨ $$\boxed{\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{\max}y}{I_z}}$$

正应力强度条件 $$\boxed{\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{F_N}{A} \pm \frac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma]}$$

- **例10-1** 起重机最大吊重F=12kN。横梁AB为No.16工字钢梁，材料的许用应力[σ]=100MPa，试校核梁AB的强度。

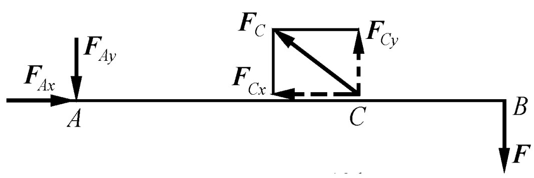
解：（1）受力分析



AB杆:

$$\sum M_A = 0, \sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

$$F_C = 30kN$$



$$F_{Cx} = 24kN,\ F_{Cy} = 18kN$$

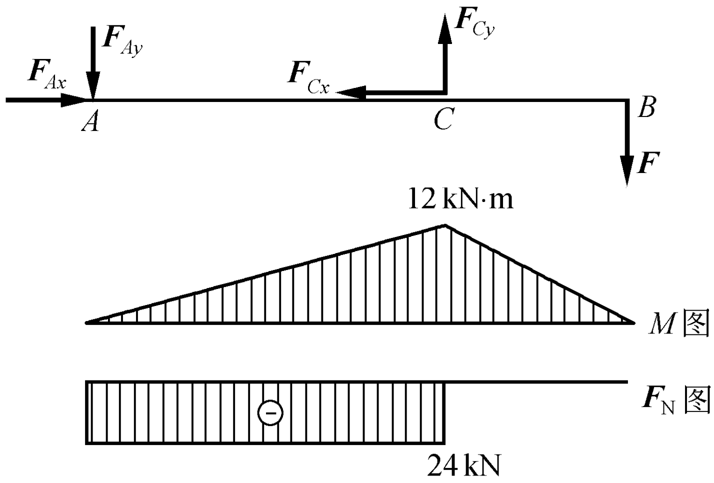
$$F_{Ax} = 24kN,\ F_{Ay} = 6kN$$

⇨ 横梁产生轴向压缩与平面弯曲的组合变形

（2）内力分析

忽略剪力的影响。

作弯矩图和轴力图。



确定危险截面

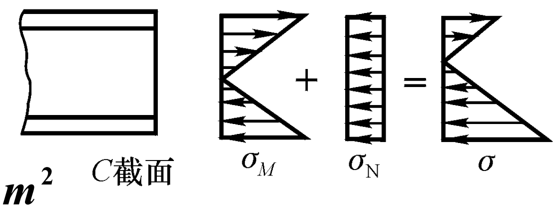
$$\left|M\right|_{\max}=\left|M_C\right|=30kN$$

$$\left|F_N\right|_{\max}=\left|F_N\right|_{AC}=24kN$$

危险截面为$C_{左}$截面。

（3）应力计算

由型钢规格表



$$W_z=141\times10^{-6}m^3 \quad A=26.1\times10^{-4}m^2$$

$$\sigma_{M\max}=\frac{\left|M\right|_{\max}}{W_z}=85MPa \quad \left|\sigma_N\right|=\frac{\left|F_N\right|}{A}=9.2MPa$$

（4）强度校核

$$\sigma_{t\max}=\left(\sigma_M\right)_{t\max}+\sigma_N=75.8MPa$$

$$\sigma_{c\max}=\left(\sigma_M\right)_{c\max}+\sigma_N=94.2MPa$$

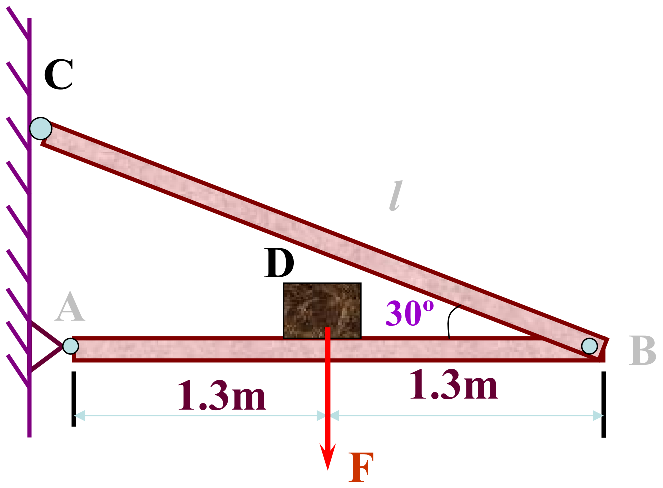
材料的抗拉和抗压强度相同

危险点：下边缘各点

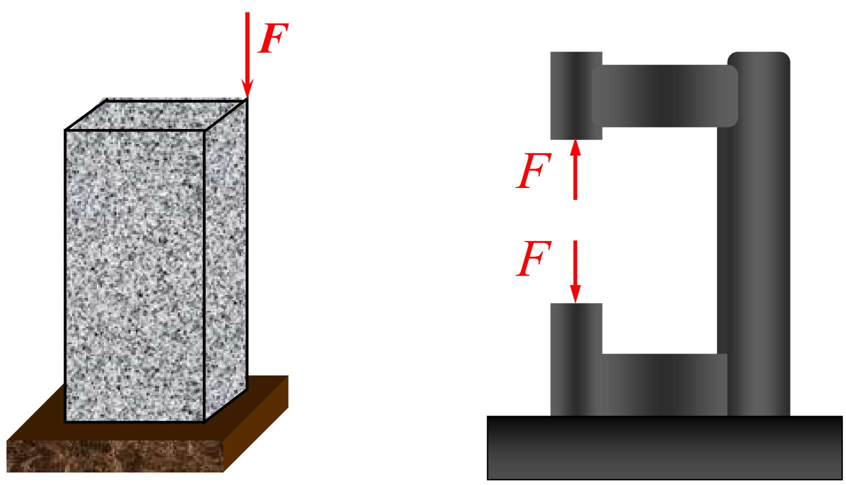
$$\sigma_{\max}=\sigma_{c\max}=94.2MPa<\left[\sigma\right]=100MPa$$

横梁AB 满足强度要求。

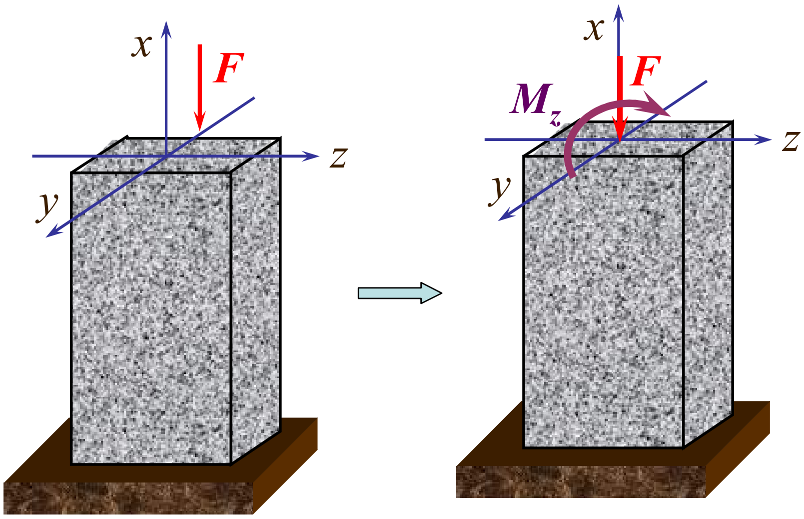
练习 旋转式悬臂吊车架横梁AB，由No.18工字钢制成，A处为光滑铰链，BC杆为拉杆，F=25kN，[σ]=100MPa，试校核横梁强度。



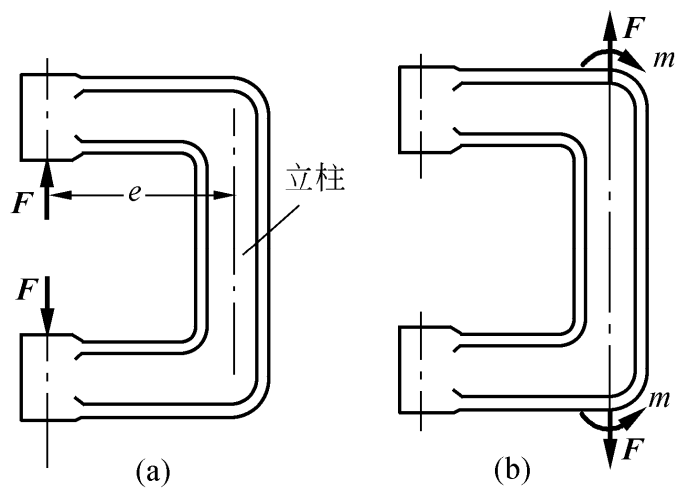
- **偏心拉伸（压缩）**
  - 外力作用线平行于杆轴但偏离截面形心。



偏心荷载作用在横截面的某一对称轴上的情形



铸铁压力机框架



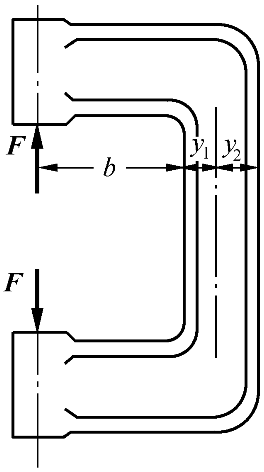
(a) (b)

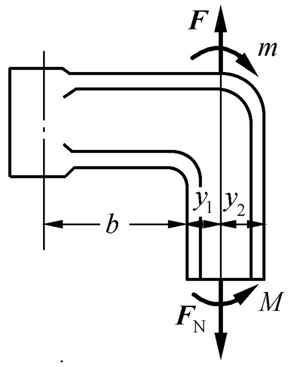
作用线与立柱轴线距离为e — 偏心距

将力F向立柱的轴线简化 ⇨ 集中力F

附加力偶$m=Fe$

例10-2　铸铁压力机框架，工作时受到的偏心荷载F=11kN，F 至立柱内侧的距离b=250mm，立柱横截面的形状和尺寸如图。已知立柱材料的许用拉应力$[\sigma_t]=30\text{MPa}$，许用压应力$[\sigma_c]=120\text{MPa}$。试校核该框架立柱的强度。





解：（1）计算横截面面积、形心位置、惯性矩

$$A = 4.2\times10^{-3}\,\text{m}^2$$

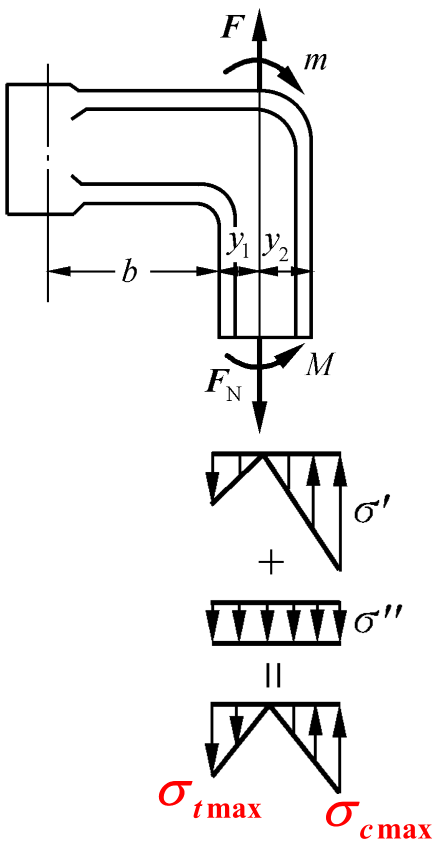
$$y_1 = 40.5\times10^{-3}\,\text{m}$$

$$I_z = 4.88\times10^{-6}\,\text{m}^4$$

（2）立柱横截面的内力

$$F_N = F = 11kN$$

$$M = m = F(b+y_1) = 3196(\text{N.m})$$



（3）立柱横截面的最大正应力

$$\sigma'_{t\max} = \frac{My_1}{I_z} = 26.5MPa$$

$$\sigma'_{c\max} = \frac{My_2}{I_z} = 39MPa$$

$$\sigma'' = \frac{F_N}{A} = 2.62MPa$$

$$\sigma_{t\max} = \sigma'_{t\max} + \sigma'' = 29.1MPa$$

$$\sigma_{c\max} = \sigma'_{t\max} - \sigma'' = 36.4MPa$$

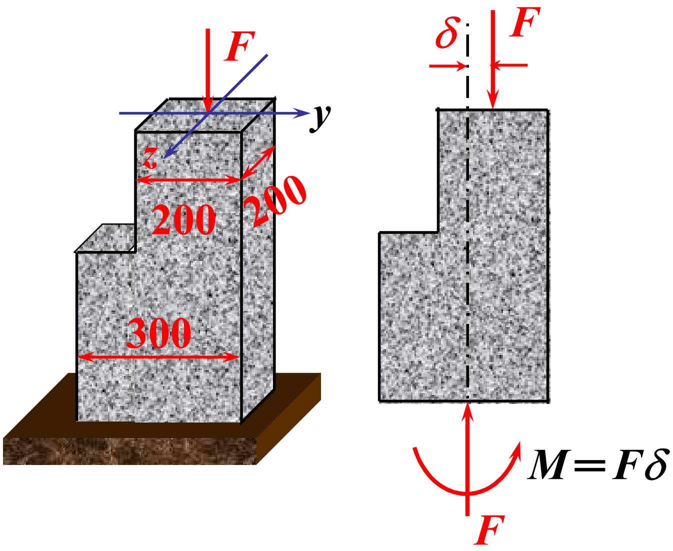
（4）校核强度

$$\sigma_{t\max} < [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c\max} < [\sigma_c]$$

框架立柱满足强度要求。

例10-3 不等截面柱，上部为200mm×200mm 正方形截面，下部为200mm×300mm 截面，受力F=350kN，试求柱内最大压应力值。



解：柱子上部受轴向压缩

$$(\sigma_{c\max})_1=\frac{F}{A_1}=8.75MPa$$

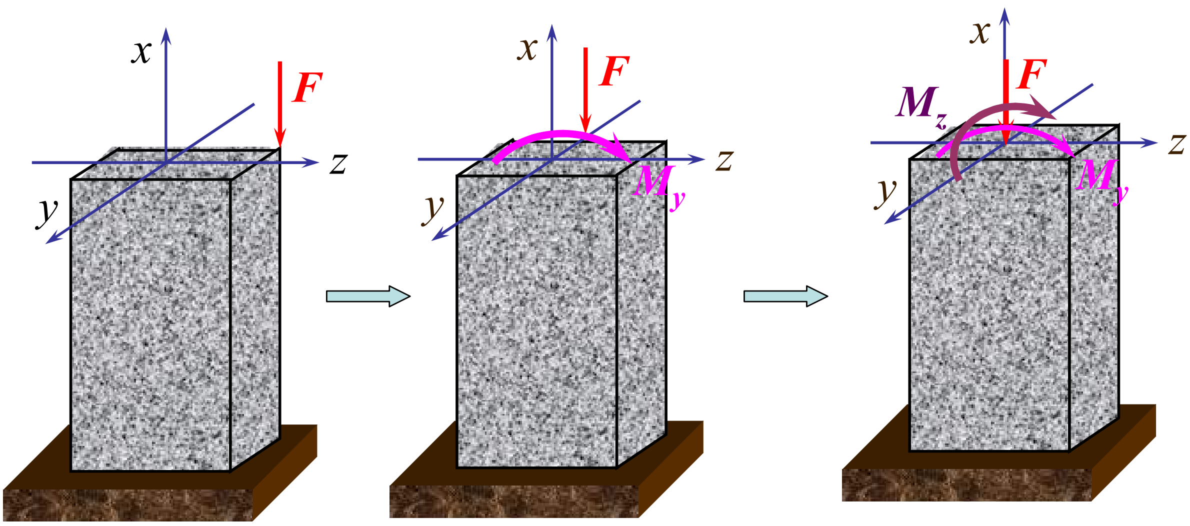
柱子下部受偏心压缩

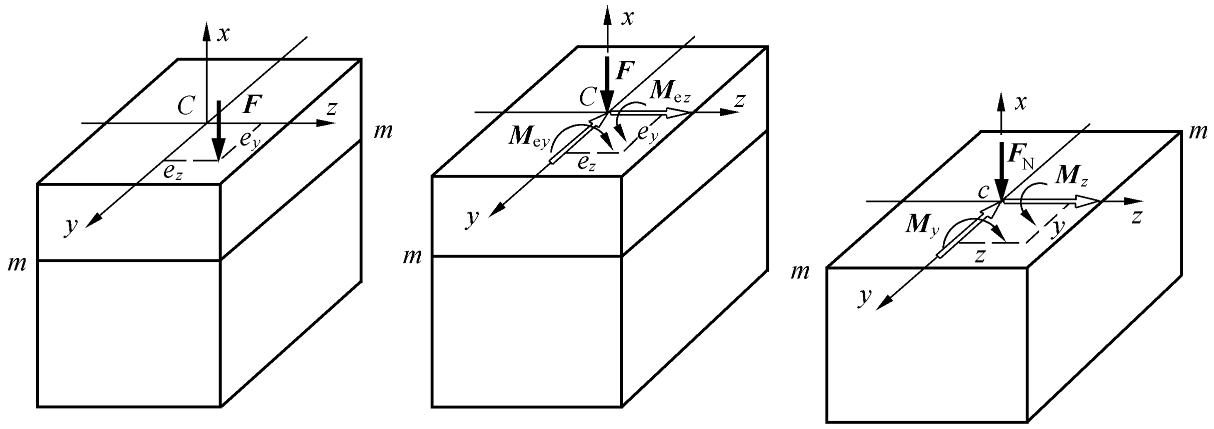
$$(\sigma_{c\max})_2=\frac{F}{A_2}+\frac{F\delta}{W_Z}=11.7MPa$$

柱内最大压应力值

$$\sigma_{c\max}=(\sigma_{c\max})_2=11.7MPa$$

偏心荷载不通过横截面任一对称轴的情形





（1）外力分析

将力F向截面形心简化 ⇨

轴向压力：F

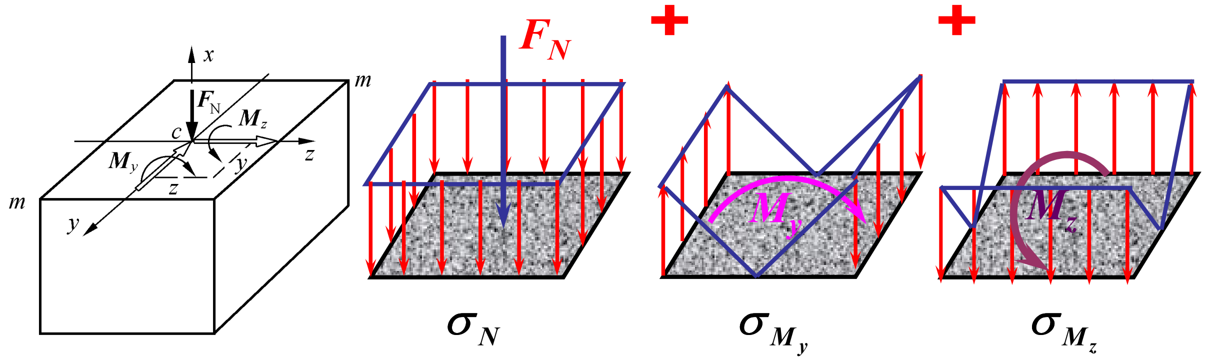
附加力偶:$M_{ey}=Fe_z$，　$M_{ez}=Fe_y$

（2）内力分析

轴力：　$F_N = F$

弯矩：　$M_y = M_{ey} = Fe_z$　　$M_z = M_{ez} = Fe_y$

（3）应力分析



$$\sigma_N = \frac{F_N}{A} = -\frac{F}{A} \qquad \sigma_M = \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} = -\frac{Fe_z z}{I_y} - \frac{Fe_y y}{I_z}$$

⇨

$$\boxed{\sigma = \sigma_N + \sigma_M = -\frac{F}{A} - \frac{Fe_z z}{I_y} - \frac{Fe_y y}{I_z}}$$

$$\sigma=\sigma_N+\sigma_M=-\frac{F}{A}-\frac{Fe_z z}{I_y}-\frac{Fe_y y}{I_z}$$

$I_y=i_y^2A, I_z=i_z^2A$

$$\sigma=-\frac{F}{A}\left(1+\frac{e_z z}{i_y^2}+\frac{e_y y}{i_z^2}\right)$$

在实际计算时，可将偏心压力作用点坐标以及所求点坐标的代数值代入；

也可以直接根据截面上内力分量的真实方向，判断它们在所求点所产生应力的拉、压性质，从而确定各项应力的正负号。

- 中性轴的确定

$$\sigma=\sigma_N+\sigma_M=-\frac{F}{A}-\left(\frac{Fe_z z}{I_y}+\frac{Fe_y y}{I_z}\right)$$

偏心距足够小

最大弯曲拉应力 $\sigma_{Mt\max}=\frac{Fe_z}{W_y}+\frac{Fe_y}{W_z}<|\sigma_N|$

横截面上正应力 $\sigma<0$ ⇨ 横截面上各点均受压，不存在中性轴。

偏心距足够大

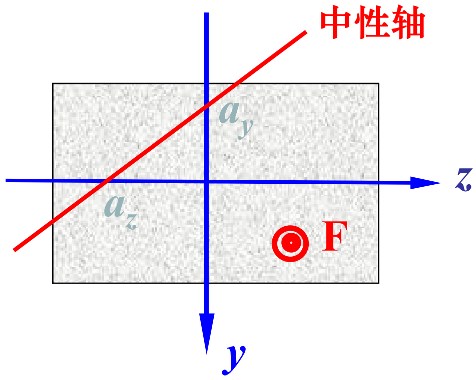
最大弯曲拉应力 $\sigma_{Mt\max}=\frac{Fe_z}{W_y}+\frac{Fe_y}{W_z}>|\sigma_N|$

横截面上正应力有正有负 ⇨ 横截面上部分区域受拉，部分区域受压，存在中性轴。

$$\sigma = -\frac{F}{A}\left(1+\frac{e_z z}{i_y^2}+\frac{e_y y}{i_z^2}\right)$$

中性轴上正应力等于零

中性轴方程 $$1+\frac{e_z \bar{z}}{i_y^2}+\frac{e_y \bar{y}}{i_z^2}=0$$



*中性轴不通过截面形心

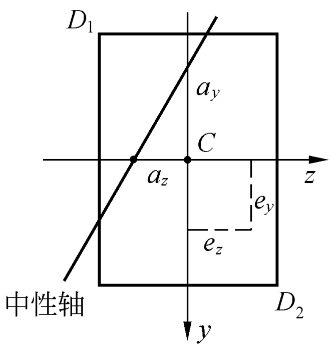
截距 $$a_y=-\frac{i_z^2}{e_y},a_z=-\frac{i_y^2}{e_z}$$

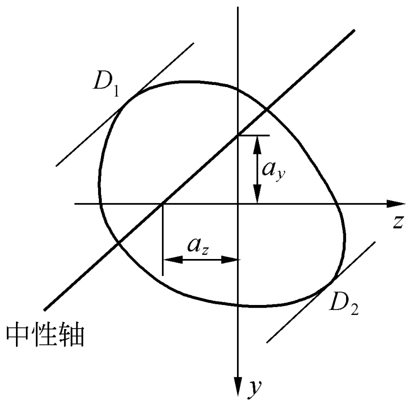
- 中性轴与偏心压力作用点分别处于截面形心的两侧；
- 中性轴把横截面分成受拉与受压两部分，距中性轴最远的点为最大拉应力或最大压应力所在的点。

横截面上的危险点

对于周边具有棱角的截面，其危险点必定在截面的棱角处。

对于周边无棱角的截面，可分别作两条与中性轴平行的直线与横截面的周边相切，两切点即为横截面上的危险点。

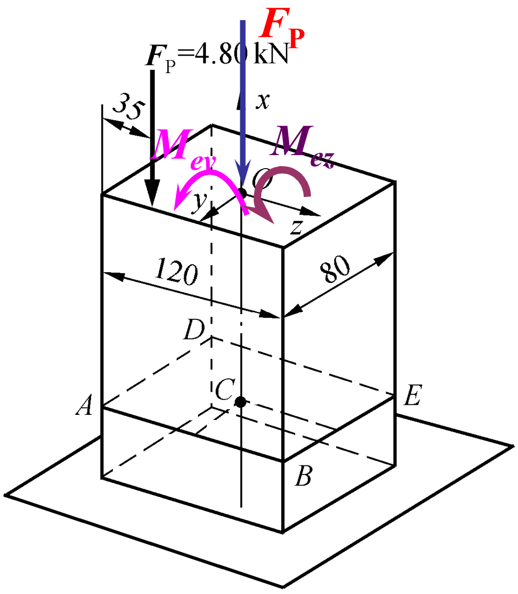




例10-4 矩形截面木柱承受偏心荷载F_P=4.8kN。

（1）确定任意横截面上A,B,C,D 四点的正应力。

（2）画出横截面上正应力分布图并确定截面上中性轴的位置。



解: ❶确定A,B,C,D 四点的正应力

(1) 外力分析

将荷载F_P向截面形心简化

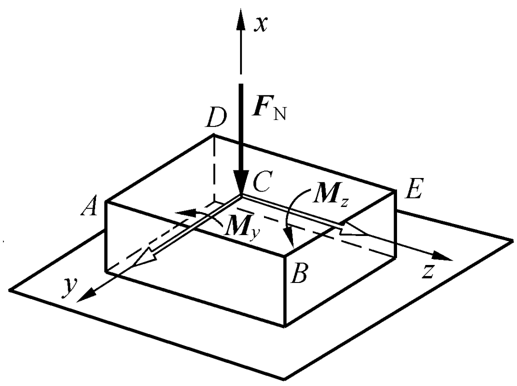
轴向压力：F_P

附加力偶：$M_{ey}=F_Pe_z$,$M_{ez}=F_Pe_y$

e_z＝60-35

e_y＝40

（2）内力分析



轴力： $F_N = F_P = 4.8kN$

弯矩： $M_y = M_{ey} = F_Pe_z = 120N\cdot m$

$M_z = M_{ez} = F_Pe_y = 192N\cdot m$

（3）应力分析

横截面的面积和弯曲截面系数

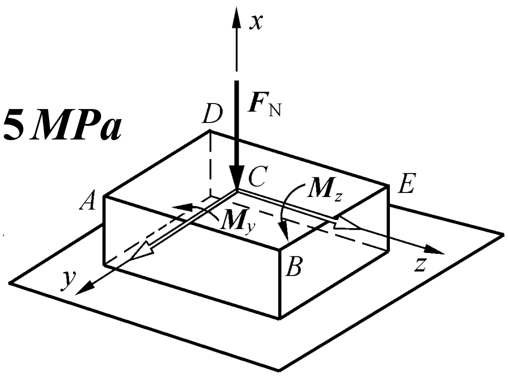
$$A = 9.6\times10^{-3}m^2 \quad W_y = 1.92\times10^{-4}m^3 \quad W_z = 1.28\times10^{-4}m^3$$

各正应力：

$$\frac{F_N}{A} = 0.5MPa \qquad \frac{M_y}{W_y} = 0.625MPa \qquad \frac{M_z}{W_z} = 1.5MPa$$

总应力：

$$\sigma_A = -\frac{F_N}{A} - \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = -2.625\,MPa$$



$$\sigma_B = -\frac{F_N}{A} + \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = -1.375\,MPa$$

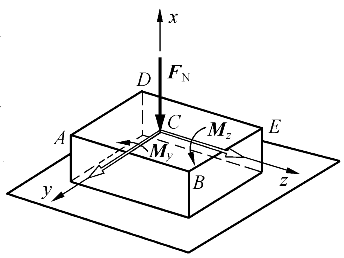
$$\sigma_D = -\frac{F_N}{A} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = 0.375\,MPa$$

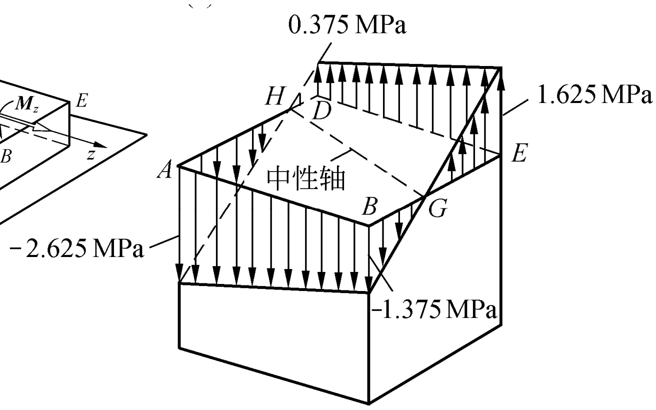
$$\sigma_E = -\frac{F_N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = 1.625\,MPa$$

❷画出正应力分布图并确定中性轴。

正应力分布图

$$\sigma_A = -2.625\,MPa$$
$$\sigma_B = -1.375\,MPa$$
$$\sigma_D = 0.375\,MPa$$
$$\sigma_E = 1.625\,MPa$$





确定中性轴

中性轴：应力矢量末端组成一个平面，与横截面的交线HG 。

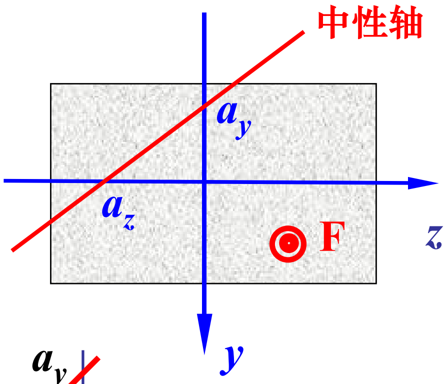
$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GE}} = \frac{|\sigma_B|}{\sigma_E} \qquad \frac{\overline{AH}}{\overline{HD}} = \frac{|\sigma_A|}{\sigma_D}$$

$$\overline{BG} = 36.7\,mm$$

$$\overline{AH} = 70\,mm$$

$$\overline{BG} + \overline{GE} = 80\,mm \qquad \overline{AH} + \overline{HD} = 80\,mm$$

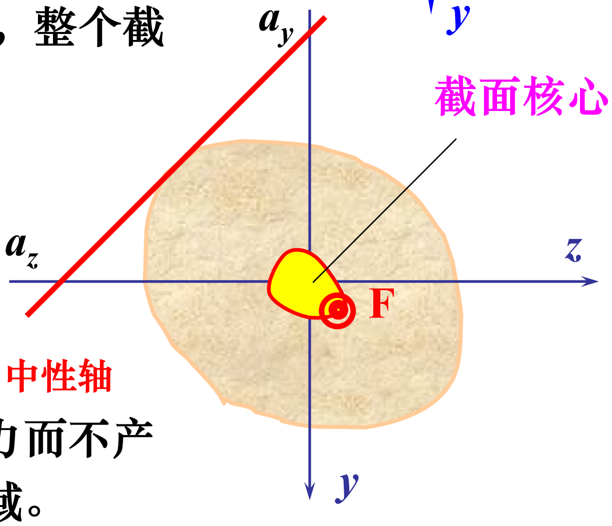
- **截面核心** $a_y=-\frac{i_z^2}{e_y}, a_z=-\frac{i_y^2}{e_z}$



偏心压力作用点越靠近截面形心，中性轴越远离截面形心。

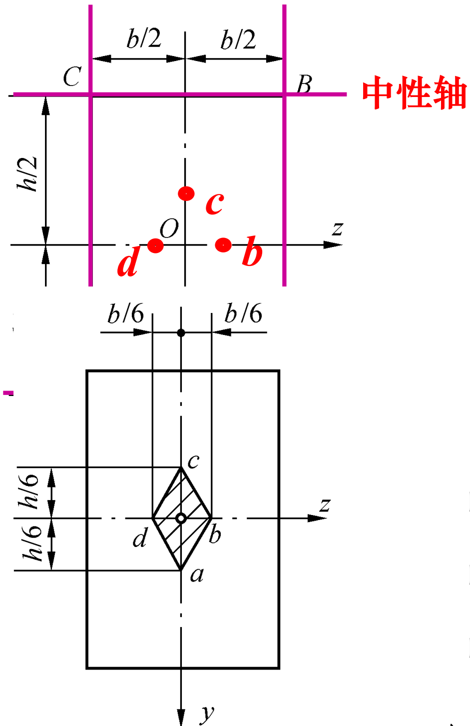
偏心压力作用点在截面形心附近一点，中性轴与截面周边相切，整个截面只有压应力。

截面边界各点切线为中性轴，可得一系列压力作用点，围成一封闭区域。



截面核心：截面上只有压应力而不产生拉应力的偏心压力作用区域。

例10-5 确定矩形截面的截面核心。



解：中性轴在BC边

$$a_y=-\frac{i_z^2}{e_y}=-\frac{h}{2}, a_z=-\frac{i_y^2}{e_z}=\infty$$

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\frac{b}{2\sqrt{3}}, i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}=\frac{h}{2\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow$ $e_y=\frac{h}{6}, e_z=0$

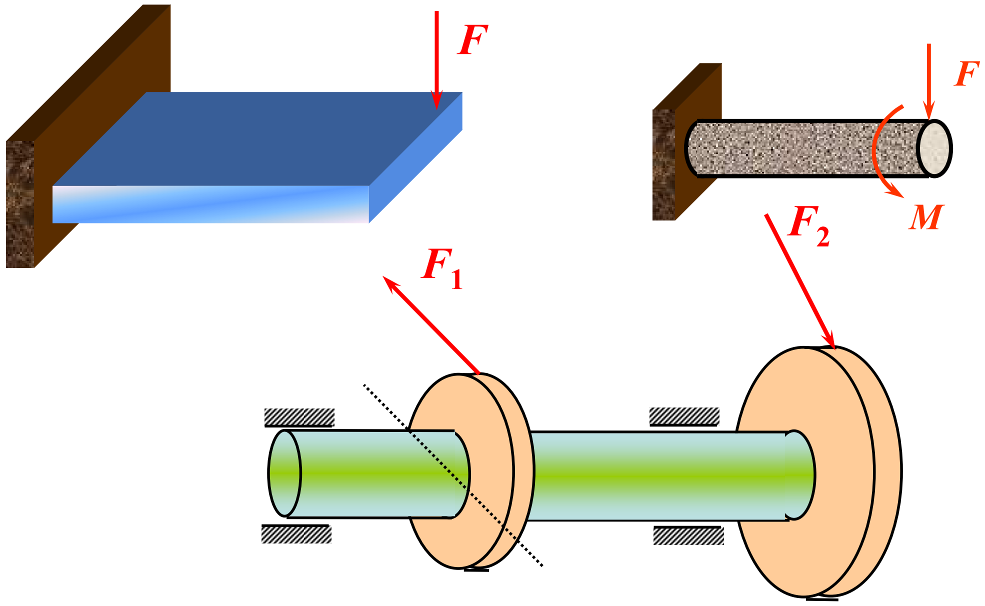
中性轴在DC边 $e_y=0, e_z=\frac{h}{6}$

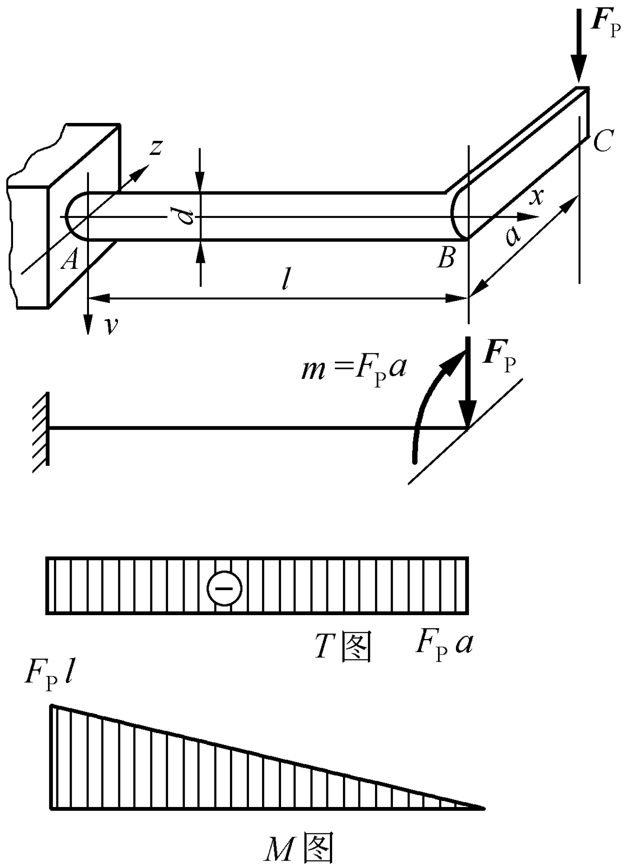
中性轴在DA边 $e_y=-\frac{h}{6}, e_z=0$

中性轴在AB边 $e_y=0, e_z=-\frac{h}{6}$

$\Rightarrow$ **截面核心为菱形*abcd*。**

- **弯扭组合变形的强度计算**





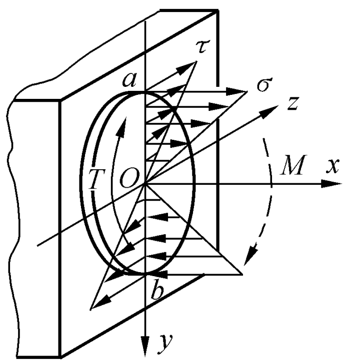
（1）受力分析

（2）内力分析

危险截面：截面A

$$M = F_P l \qquad T = F_P a$$

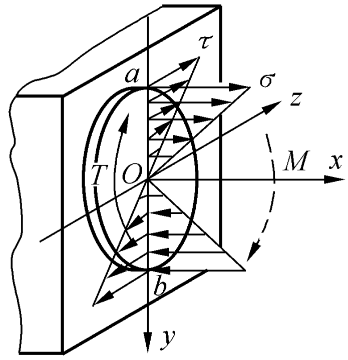
（3）应力分析



危险点：*a*，*b*点

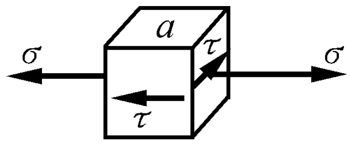
$$\sigma_M = \frac{M}{W} \quad (W = \frac{\pi d^3}{32})$$

$$\tau_T = \frac{T}{W_P} \quad (W_p = \frac{\pi d^3}{16})$$



（4）强度条件

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma_M^2 + 4\tau_T^2} \le [\sigma]$$



$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_M^2 + 3\tau_T^2} \le [\sigma]$$

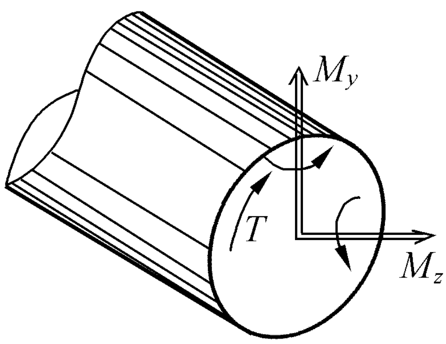
$$\boxed{\sigma_{r3} = \frac{1}{W}\sqrt{M^2 + T^2} \le [\sigma]} \quad \boxed{\sigma_{r4} = \frac{1}{W}\sqrt{M^2 + 0.75T^2} \le [\sigma]}$$

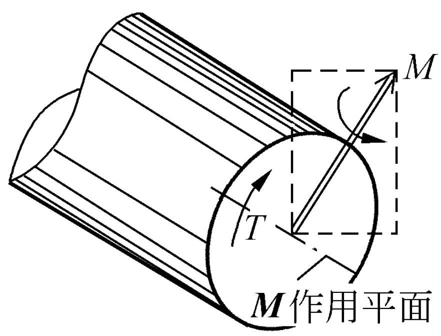
材料力学

圆截面杆，横截面上有两个弯矩M_y和M_z同时作用

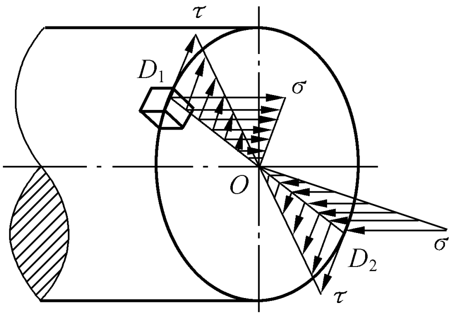
将M_y和M_z按矢量求和得总弯矩M,作用平面仍然是纵向对称面，大小为

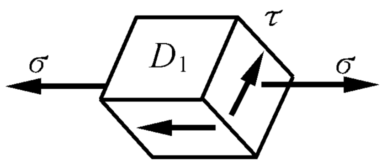
$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

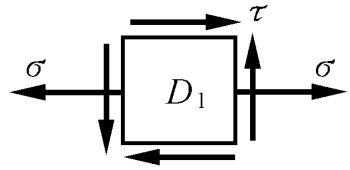




应力状态





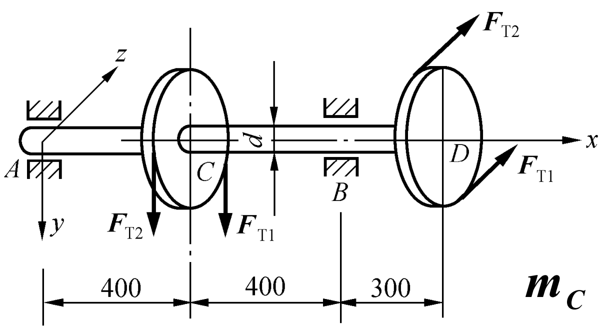


强度条件

$$\sigma_{r3}=\frac{\sqrt{M_y^2+M_z^2+T^2}}{W}\le[\sigma]$$

$$\sigma_{r4}=\frac{\sqrt{M_y^2+M_z^2+0.75T^2}}{W}\le[\sigma]$$

例10-8 传动轴AD。两胶带轮直径均为D=500mm，轮C上的胶带拉力沿铅垂方向，轮D上的胶带拉力沿水平方向，胶带拉力F_{T1}=5kN， F_{T2}=2kN 。许用应力[σ]=160MPa，不计自重，试按第四强度理论设计该轴的直径。



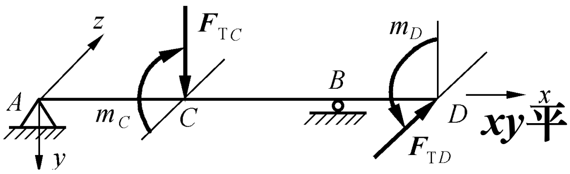
解: (1)外力分析，计算简图

$$F_{TC}=F_{T1}+F_{T2}=7kN$$

$$F_{TD}=F_{T1}+F_{T2}=7kN$$

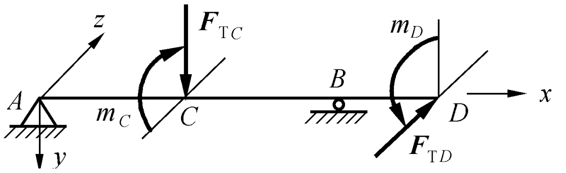
$$m_C=\frac{D}{2}\left(F_{T1}-F_{T2}\right)=750N\cdot m$$

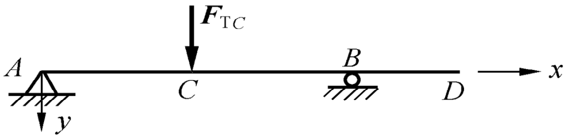
$$m_C=750N\cdot m$$

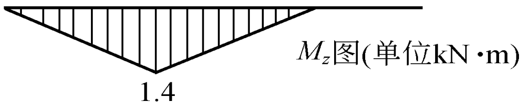


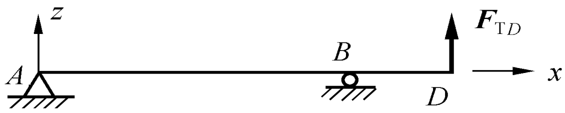
xy平面内弯曲＋xz平面内弯曲+扭转

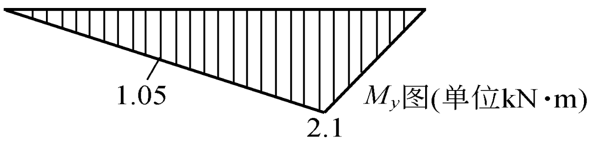
弯扭组合变形











(2)内力分析

弯矩 $M=\sqrt{M_y^2+M_z^2}$

AC段：斜直线

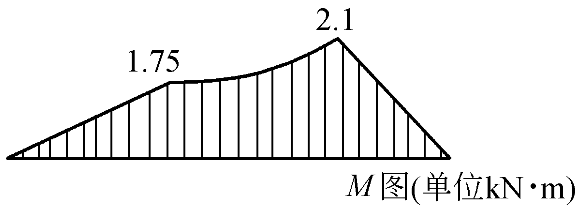
$$M_A=0 \quad M_C=1.75kN\cdot m$$

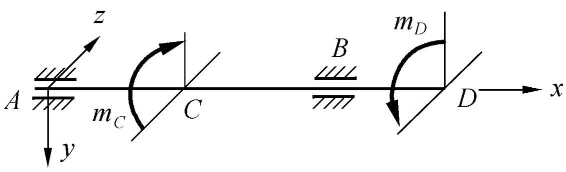
BD段：斜直线（$M=M_y$）

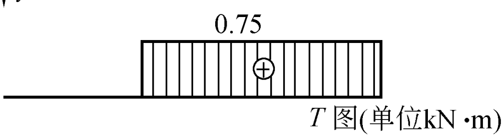
CB段：曲线（由方程确定）

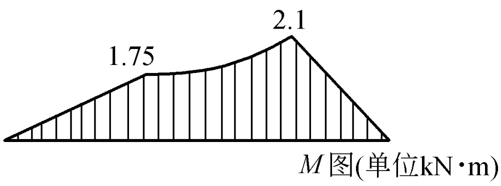
$$M_z=-3.5x+2.8$$
$$M_y=2.625x$$

$$M=\sqrt{19.14x^2-19.6x+7.84}$$









扭矩

危险截面：B截面

$$M_B=2.1k\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$
$$T_B=0.75k\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

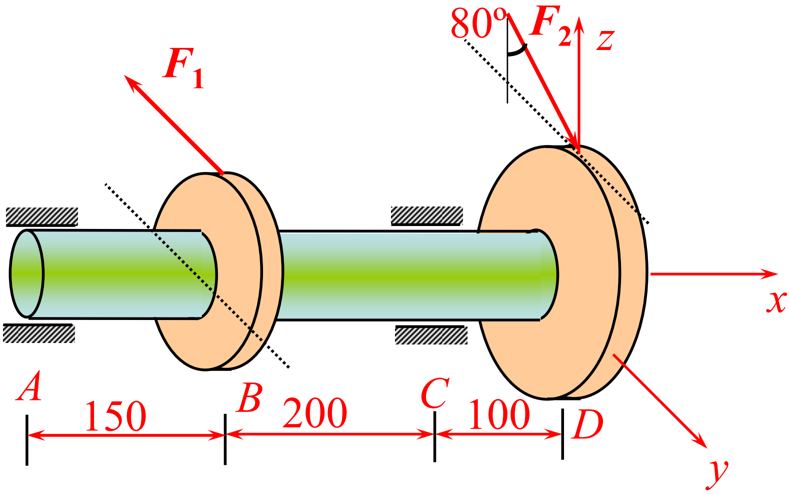
(3)强度分析

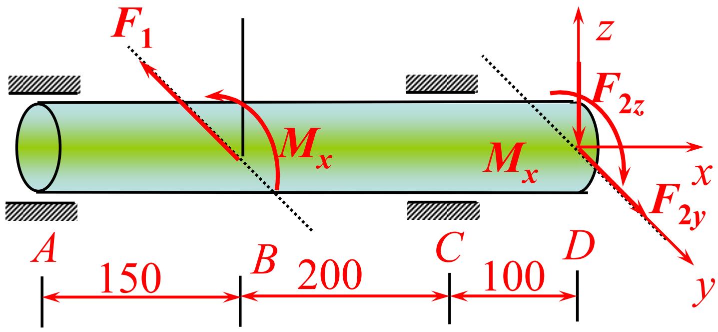
$$\sigma_{r4}=\frac{\sqrt{M_B^2+0.75T_B^2}}{W}\le[\sigma]$$

$$W=\frac{\pi d^3}{32}\ge\frac{\sqrt{M_B^2+0.75T_B^2}}{[\sigma]}=13.75\times10^{-6}m^3$$

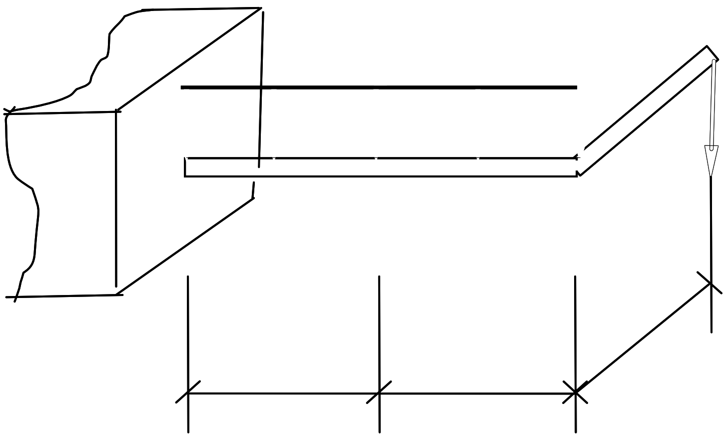
$$d\ge 52mm$$

练习

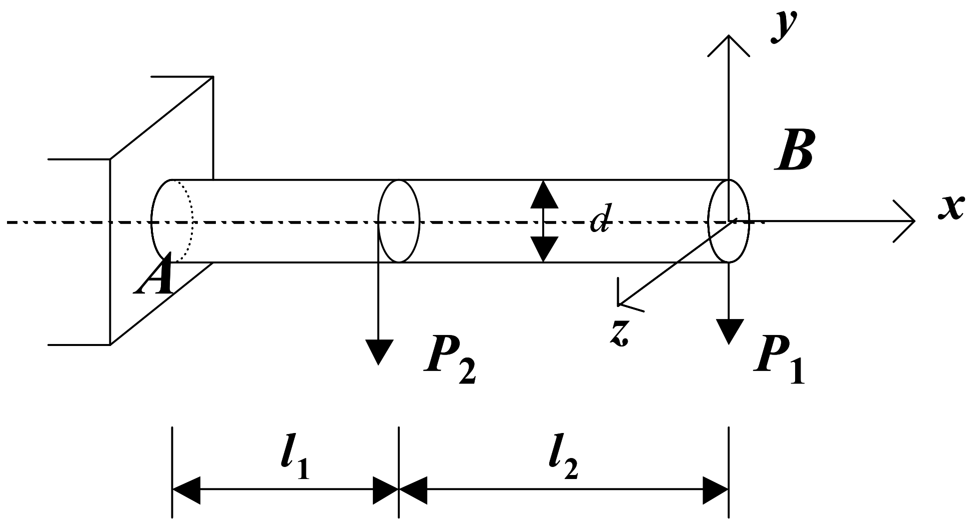

80°
F_2
z
F_1
x
A
150
B
200
C
100
D
y


F_1
z
F_{2z}
M_x
M_x
x
F_{2y}
A
150
B
200
C
100
D
y

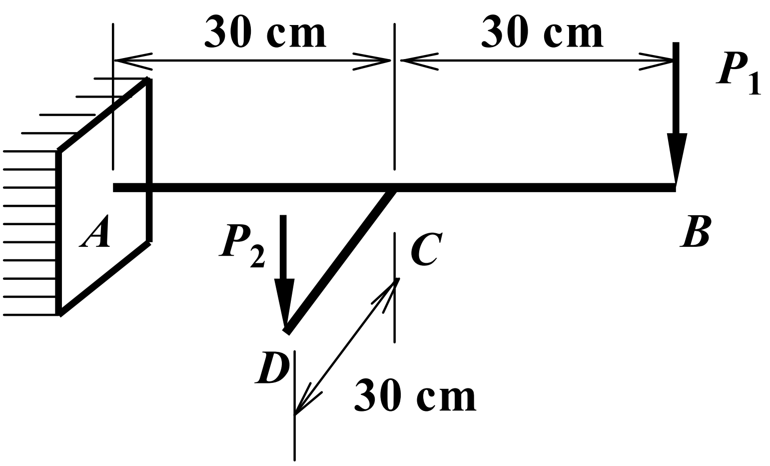
练习

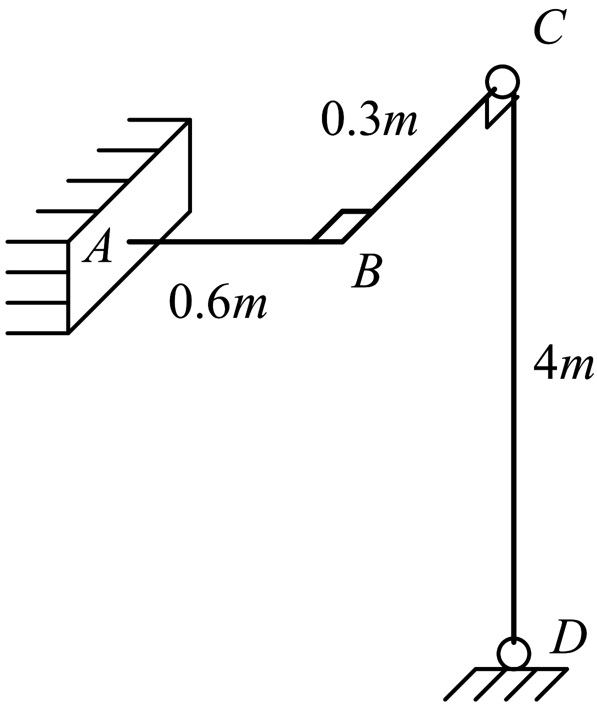


练习



练习





各种组合变形杆件的强度条件：

1. 轴向拉伸（压缩）与弯曲组合：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{F_N}{A} \pm \frac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma]$$

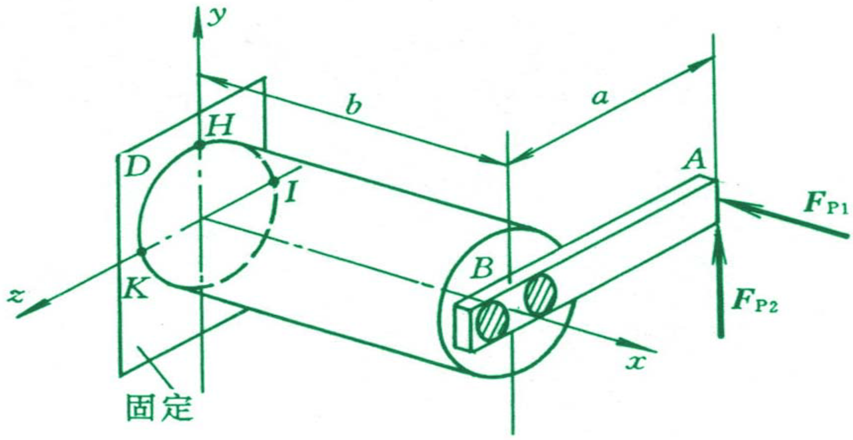
2. 偏心压缩（拉伸）：

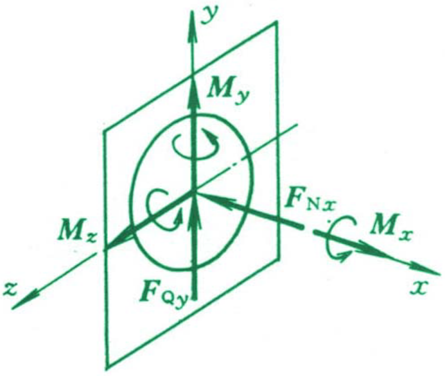
$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{F}{A} \pm \frac{My}{I_z} \le [\sigma]$$

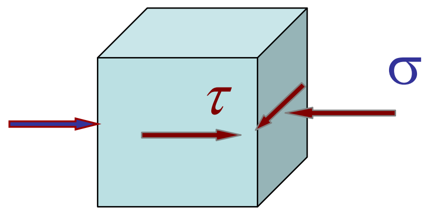
3. 弯曲与扭转组合：

$$\sigma_{r3} = \frac{1}{W}\sqrt{M^2 + T^2} \le [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \frac{1}{W}\sqrt{M^2 + 0.75T^2} \le [\sigma]$$



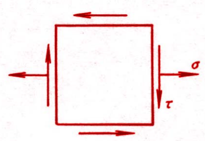




拉压、弯曲与扭转组合：

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3\le[\sigma];$$
$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}\le[\sigma];$$

常见应力状态



$$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\le[\sigma];$$
$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\le[\sigma];$$

弯扭组合

$$\sigma_{r3}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+T^2}\le[\sigma]$$
$$\sigma_{r4}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+0.75T^2}\le[\sigma]$$

拉（压）弯扭

$$\sigma_{r3}=\sqrt{\left(\frac{F_N}{A}+\frac{M}{W}\right)^2+4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2}\le[\sigma]$$
$$\sigma_{r4}=\sqrt{\left(\frac{F_N}{A}+\frac{M}{W}\right)^2+3\left(\frac{T}{W_p}\right)^2}\le[\sigma]$$