第八章　平面弯曲杆件的应力与强度计算

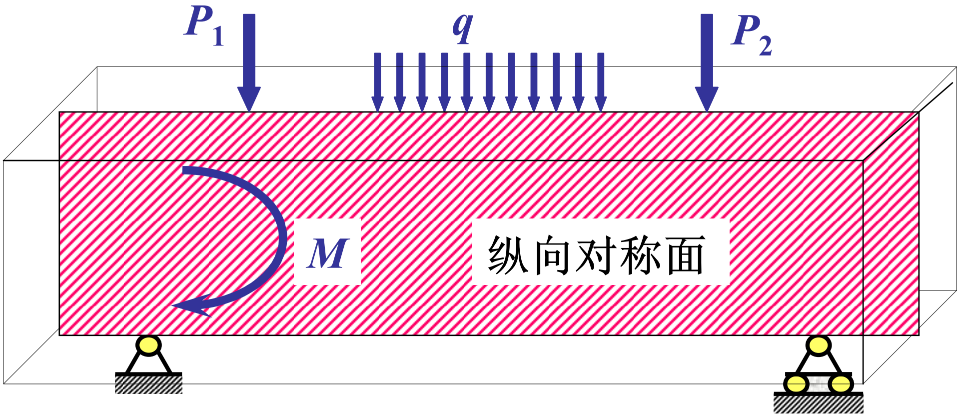
主要内容

- 纯弯曲时梁横截面上的正应力
- 横力弯曲时梁横截面上的应力
- 梁的强度计算
- 梁的合理强度设计

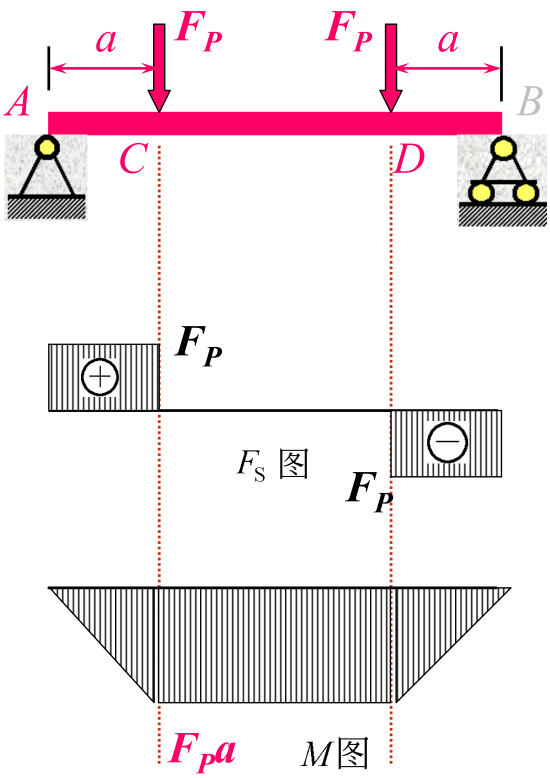
•梁的平面弯曲

–杆发生弯曲变形后，轴线仍然和外力在同一平面内。

•对称弯曲 — 平面弯曲的特例。



弯曲内力 {



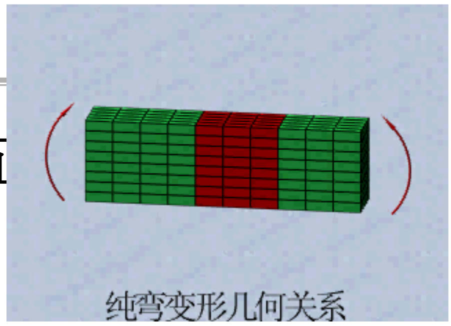
横力弯曲:

某段梁的内力既有弯矩又有剪力时，该段梁的变形称为横力弯曲（剪切弯曲）。如AC、BD段。

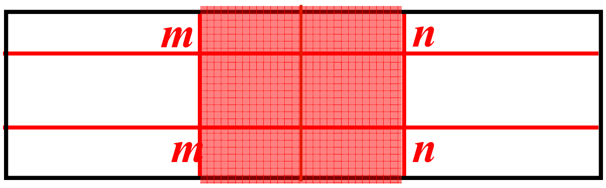
纯弯曲:

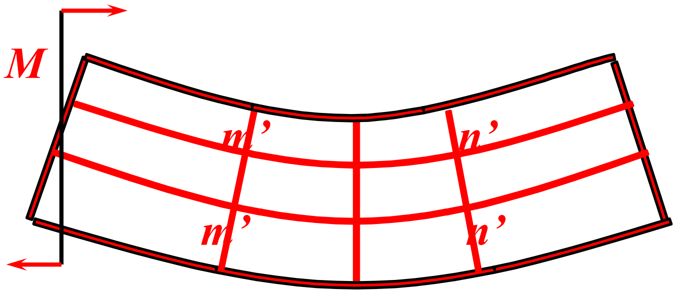
某段梁的内力只有弯矩没有剪力时，该段梁的变形称为纯弯曲。如CD段。

纯弯曲时梁横截面上的



- **平面假设**
  - 变形前原为平面的横截面在变形后仍保持为平面，且仍垂直于变形后的轴线。
- **纵向材料之间无挤压的假设**
  - 纵向材料之间没有挤压，材料的纵向变形只是沿梁轴的单向拉伸或压缩变形。



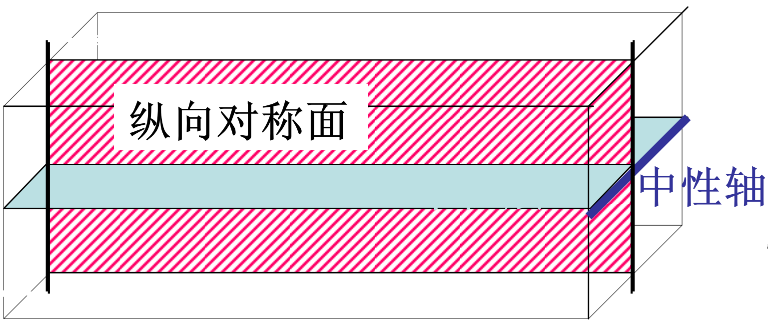


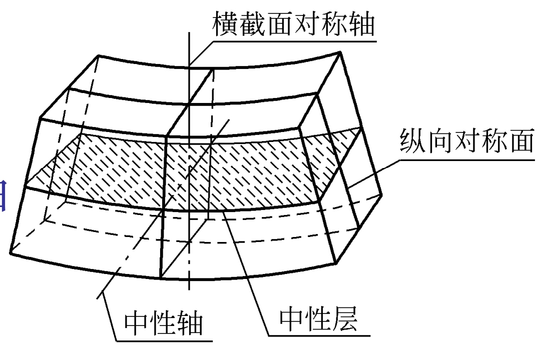
•横截面上只有正应力而无切应力。

中性层： 梁内一层材料既不伸长也不缩短，因而材料不受拉应力和压应力。

中性轴： 中性层与横截面的交线。

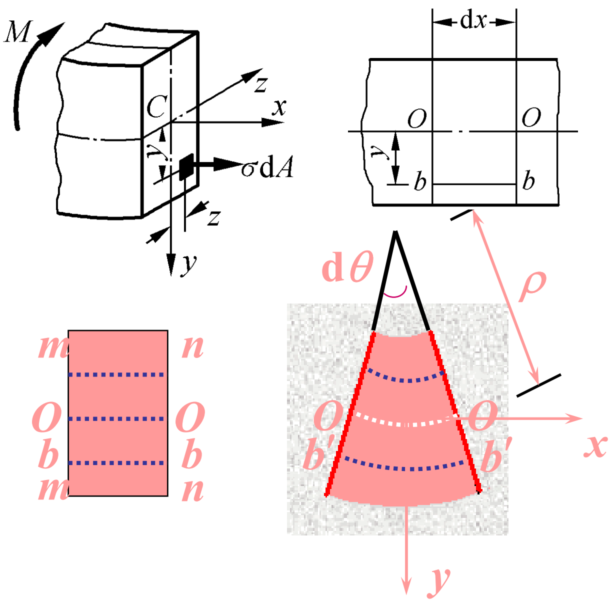
- 中性轴必垂直于纵向对称面
- 在横截面上，中性轴必垂直于截面的纵向对称轴。

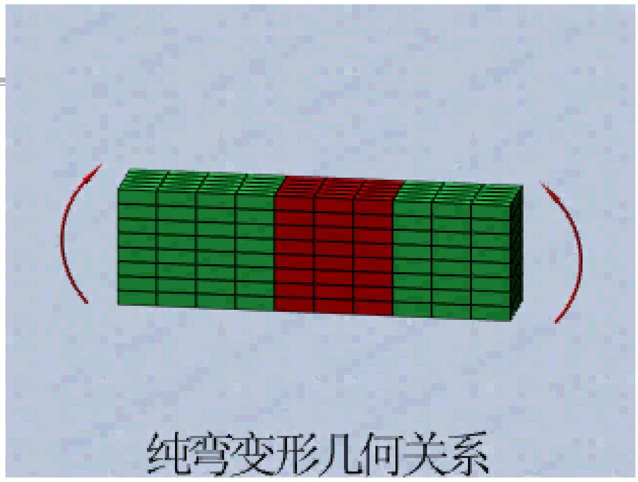




- 纯弯曲时梁横截面上的正应力，需综合考虑
  - 变形几何关系
  - 物理关系
  - 静力关系

- 1．变形几何关系





变形前 $\overline{bb}=\overline{OO}=\mathrm{d}x$

变形后 $\widehat{b'b'}=(\rho+y)\mathrm{d}\theta$

$\widehat{O'O'}=\rho\mathrm{d}\theta=\overline{OO}$

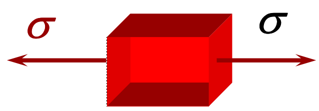
$$\varepsilon=\frac{\widehat{b'b'}-\overline{bb}}{\overline{bb}}=\frac{\widehat{b'b'}-\widehat{O'O'}}{\widehat{O'O'}}$$

$$=\frac{(\rho+y)\mathrm{d}\theta-\rho\mathrm{d}\theta}{\rho\mathrm{d}\theta}=\frac{y}{\rho}$$

$$\boxed{\varepsilon=\frac{y}{\rho}\qquad\ldots\ldots\quad(1)}$$

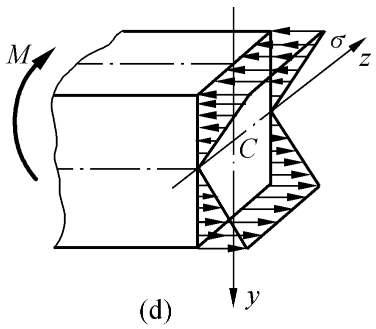
• 2．物理关系

梁上任意一点均处于单向应力状态

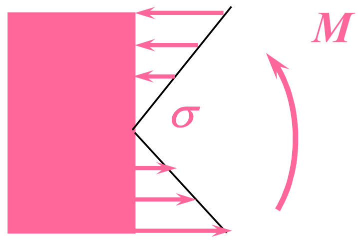


$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho} \quad \text{......} \ (2)$$

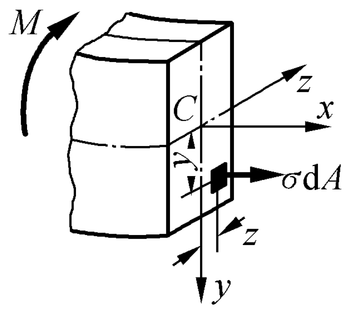
- 纵向材料的正应力与其距中性层的距离成正比；
- 横截面上任一点的正应力与其距中性轴的距离成正比，正应力沿横截面高度按线性规律变化。

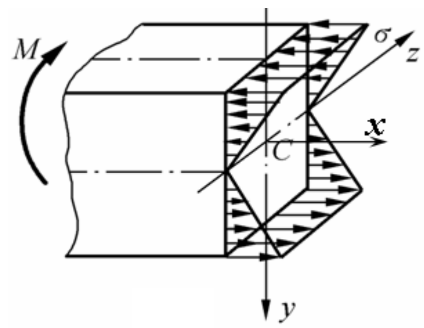


(d)



• 3．静力关系





$$F_N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = 0$$

$$M_y = \int_A (\sigma \mathrm{d}A) z = 0$$

$$M_z = \int_A (\sigma \mathrm{d}A) y = M$$

$$F_N=\int_A \sigma \mathrm{d}A=\int_A \frac{Ey}{\rho}\mathrm{d}A=\frac{E}{\rho}\int_A y\mathrm{d}A=\frac{ES_z}{\rho}=0$$

$\Rightarrow$ $S_z=0$ $\therefore$ z轴(中性轴)必通过截面形心

y 轴为横截面对称轴

$$\Rightarrow M_y=\int_A(\sigma\mathrm{d}A)z=\int_A\frac{Eyz}{\rho}\mathrm{d}A=\frac{E}{\rho}\int_A yz\mathrm{d}A=\frac{EI_{yz}}{\rho}=0$$

$$M_z=\int_A(\sigma\mathrm{d}A)y=\int_A\frac{Ey^2}{\rho}\mathrm{d}A=\frac{E}{\rho}\int_A y^2\mathrm{d}A=\frac{EI_z}{\rho}=M$$

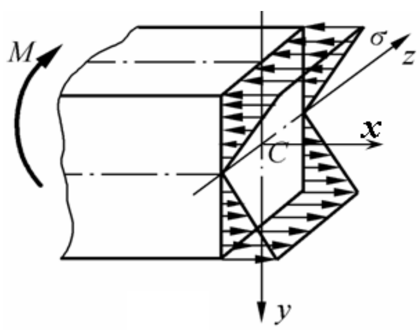
$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z}\quad\cdots\cdots(3)}$$

$1/\rho \Longrightarrow$ 梁轴线曲率

$EI_z \Longrightarrow$ 梁的弯曲刚度

纯弯曲梁的正应力计算公式

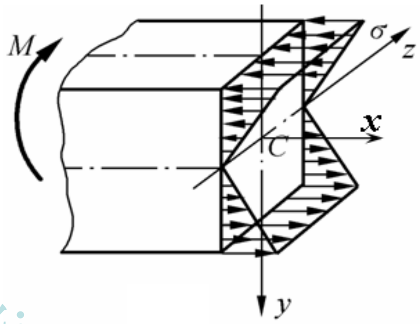
$$\boxed{\sigma=\frac{My}{I_z}\quad\cdots\cdots(4)}$$



- 取M、y绝对值代入，由弯曲变形来判定拉压应力：以中性轴为界，梁凸出的一侧受拉，凹入的一侧受压。

- 最大正应力

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \quad \cdots\cdots(4)$$



•正应力沿横截面高度按线性规律变化；
•在中性轴处的正应力等于零，距中性轴越远处的正应力数值越大，在截面的上、下边缘处达到拉应力或压应力的最大值。

$$\sigma_{t\max} = \frac{My_1}{I_z} \qquad \sigma_{c\max} = \frac{My_2}{I_z}$$

当中性轴是横截面的对称轴时： $y_1 = y_2 = y_{\max}$

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} = \frac{M}{W_z}}$$

$W_z = I_z / y_{\max}$ 弯曲截面系数

- 全梁最大正应力

$$\sigma_{t\max} = M\left(\frac{y_1}{I_z}\right)_{\max} \qquad \sigma_{c\max} = M\left(\frac{y_2}{I_z}\right)_{\max}$$

等截面

$$\sigma_{t\max} = \frac{M}{I_z}(y_1)_{\max} \qquad \sigma_{c\max} = \frac{M}{I_z}(y_2)_{\max}$$

当中性轴是横截面的对称轴时：

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{M}{(W_z)_{\min}}}$$

等截面

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}}$$

横力弯曲时梁横截面上的应力

横力弯曲时梁横截面上的正应力

- 纯弯曲梁的正应力计算公式是在平面假设和纵向材料无挤压假设下得到的。
- 对于横力弯曲，由于切应力的存在，横截面产生剪切变形，使横截面发生翘曲，不再保持为平面，也不能保证纵向材料无挤压。纯弯曲梁的正应力计算公式不适用。
- 但是弹性力学分析和试验表明，对于细长梁的横力弯曲，上述正应力公式计算结果误差不大。

- 纯弯曲梁的正应力计算公式可以推广应用于细长梁的横力弯曲。

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

$$\frac{l}{h} > 5$$

- 最大正应力：

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

- 给定截面 $\sigma_{t\max} = \frac{My_1}{I_z}, \quad \sigma_{c\max} = \frac{My_2}{I_z}$

- 全梁 $\sigma_{t\max} = \left(\frac{My_1}{I_z}\right)_{\max}, \quad \sigma_{c\max} = \left(\frac{My_2}{I_z}\right)_{\max}$

等直梁

$$\sigma_{t\max} = \frac{(My_1)_{\max}}{I_z}, \quad \sigma_{c\max} = \frac{(My_2)_{\max}}{I_z}$$

当中性轴是横截面的对称轴时：

- 给定截面

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} = \frac{M}{W_z}$$

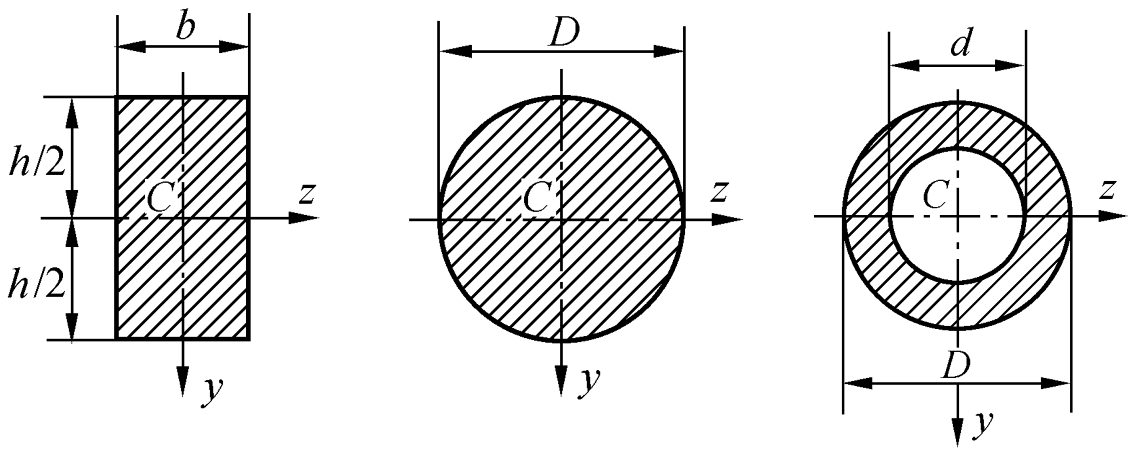
- 全梁

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{M}{W_z}\right)_{\max}$$

等直梁

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z}}$$

材料力学

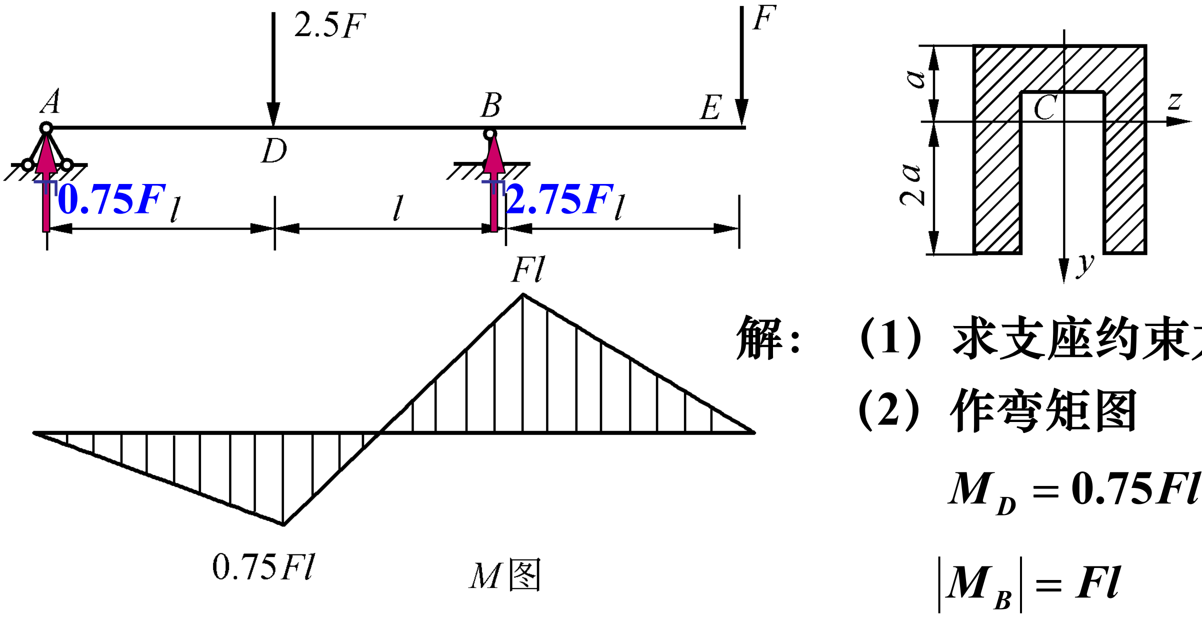


$$I_z = \frac{bh^3}{12} \qquad I_z = \frac{\pi D^4}{64} \qquad I_z = \frac{\pi D^4}{64}\left(1-\alpha^4\right)$$

$$W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \qquad W_z = \frac{I_z}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32} \qquad W_z = \frac{I_z}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32}\left(1-\alpha^4\right)$$

注意： $I_z = I_{z1} - I_{z2}$ $\quad W_z = I_z / y_{\max}$ $\quad \boxed{W_z \neq W_{z1} - W_{z2}}$

- **例8-1** 某Π形截面的外伸梁，其受力、尺寸及截面形心的位置如图，已知截面对形心轴z的惯性矩为I_z，试求梁内最大拉应力和最大压应力的大小及其位置。



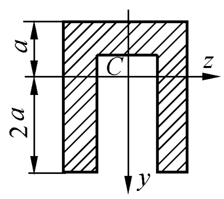
解：（1）求支座约束力

（2）作弯矩图

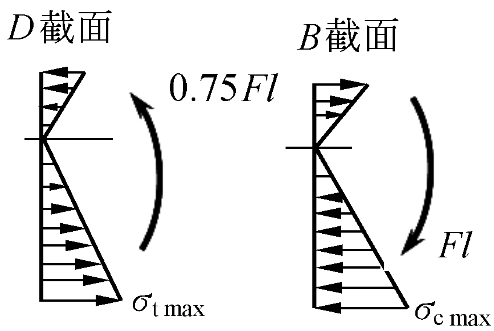
$$M_D = 0.75Fl$$

$$|M_B| = Fl$$

$$\sigma_{t\max} = \frac{(My_1)_{\max}}{I_z}, \quad \sigma_{c\max} = \frac{(My_2)_{\max}}{I_z}$$



（3）求应力



最大压应力发生在B截面的下边缘处

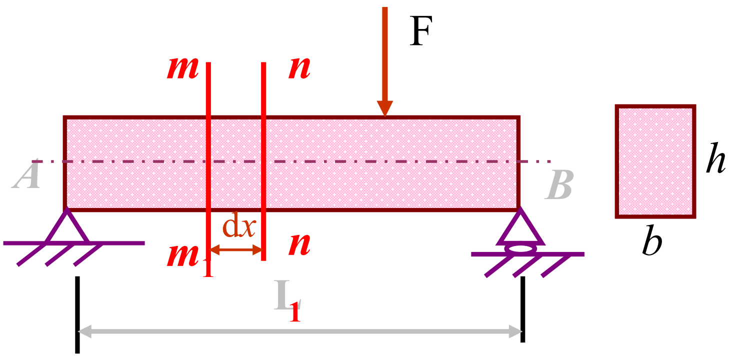
$$\sigma_{c\max} = \frac{|M|_B \cdot 2a}{I_z} = \frac{2Fla}{I_z}$$

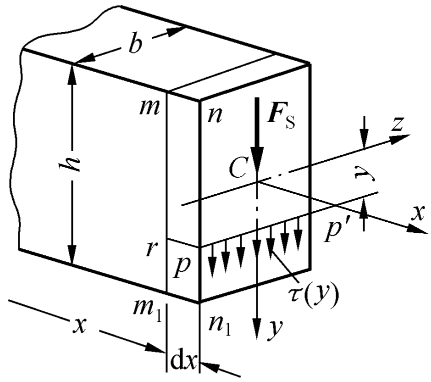
最大拉应力

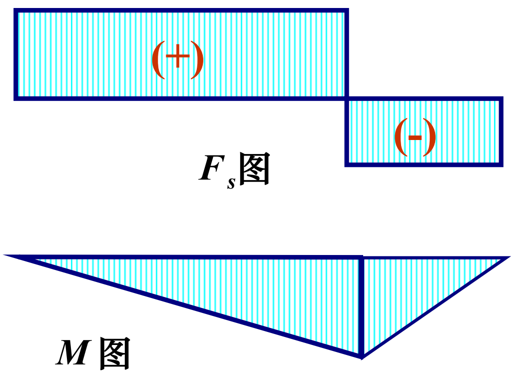
$$(\sigma_{t\max})_B = \frac{|M|_B \cdot a}{I_z} = \frac{Fla}{I_z} \qquad (\sigma_{t\max})_D = \frac{|M|_D \cdot 2a}{I_z} = \frac{1.5Fla}{I_z}$$

最大拉应力发生在D截面的下边缘处 $\sigma_{t\max} = \dfrac{1.5Fla}{I_z}$

横力弯曲时梁横截面上的切应力－矩形截面梁







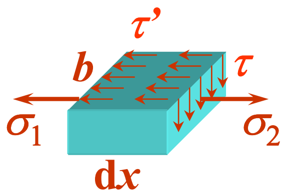
两点假设：

❶切应力平行于剪力；

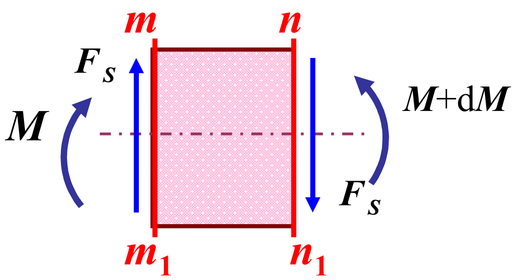
❷切应力沿横截面宽度均匀分布。

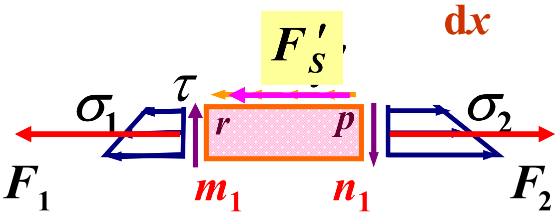
研究方法：分离体平衡

❷在微段上取一块



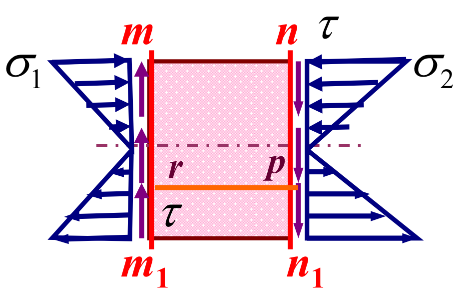
❶在梁上取微段；





根据剪应力的互等定理：$\tau(y)=\tau'$

∵ dx很小，可认为在rp面上均布。



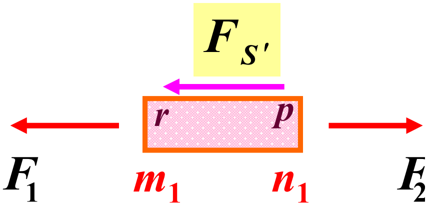
$$F'_S=\tau' b\mathrm{d}x$$

$$F_1=\int_{A_1}\sigma_1\mathrm{d}A=\int_{A_1}\frac{My_1}{I_z}\mathrm{d}A=\frac{MS_z^*(y)}{I_z}$$

$$F_2=\frac{(M+\mathrm{d}M)S_z^*(y)}{I_z}=\frac{(M+F_S\mathrm{d}x)S_z^*(y)}{I_z}$$

❸平衡方程 $\sum F_x = 0$

$$F_2 - F_1 - F_S' = 0 \qquad \tau' = \frac{F_2 - F_1}{b\mathrm{d}x}$$



$$\tau(y) = \tau' = \frac{F_S S_z^*(y)}{bI_z}$$

$\tau(y)$ — 截面上距中性轴y处的切应力

F_S — 截面上的剪力

b — y处的宽度

I_z — 整个截面对中性轴的惯性矩

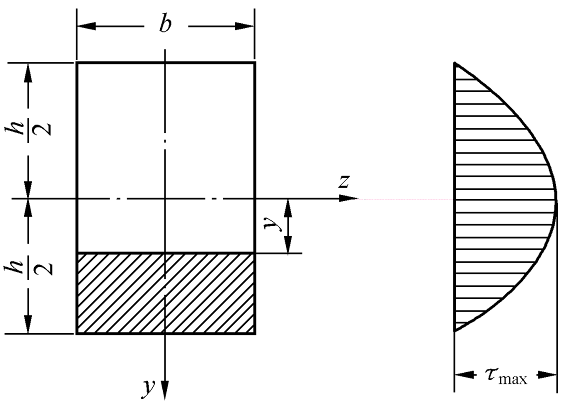
$S_z^*(y)$ — y以外截面对中性轴z的静矩

- 切应力的方向由横截面上剪力的方向确定，二者方向相同。
- 按切应力的正负号规则确定其正负。

矩形截面： $I_z = \frac{1}{12}bh^3$

$$S_z^*(y) = A_1 y_{C_1} = b(\frac{h}{2} - y)\cdot[y + \frac{h/2 - y}{2}] = \frac{b}{2}(\frac{h^2}{4} - y^2)$$

$$\tau(y) = \frac{3F_S}{2bh}(1 - \frac{4y^2}{h^2})$$



•矩形截面梁的弯曲切应力沿截面高度呈**抛物线**分布。

截面的上下边缘处 $y = \pm\frac{h}{2}, \tau = 0$；

中性轴处 $\tau = \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{F_S}{bh} = \frac{3}{2}\frac{F_S}{A}$

$S_z^*(y) = S_{z\max}^*$

y

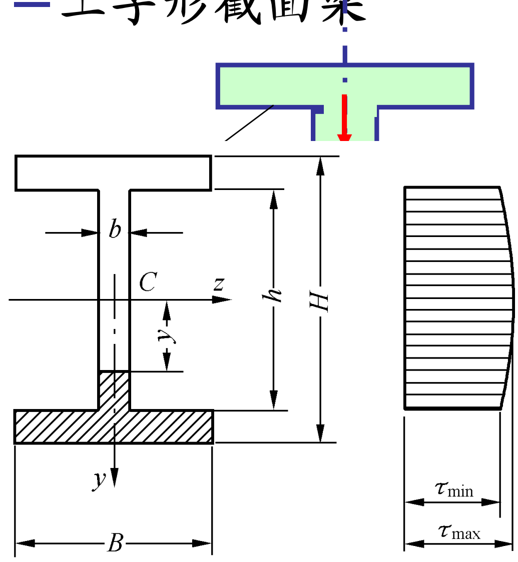
$$\tau_{\max} = \frac{F_S S_{z\max}^*}{bI_z}$$

横力弯曲时梁横截面上的切应力－工字形截面梁

腹板 $\boxed{\tau(y)=\dfrac{F_S S_z^*(y)}{bI_z}}$

$$S_z^*(y)=\frac{B}{8}\left(H^2-h^2\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

腹板上的切应力呈抛物线变化



$$y=0 \qquad \tau_{\max}=\frac{F_S S_{z\max}^*}{bI_z}=\frac{F_S}{8bI_z}\left[BH^2-(B-b)h^2\right]$$

$$y=\pm\frac{h}{2} \qquad \tau_{\min}=\frac{F_S}{8bI_z}\left(BH^2-Bh^2\right)$$

当腹板宽度 b 远小于翼缘宽度 B 时，最大与最小切应力的差值甚小，腹板上的切应力可近似看成是均匀分布的；

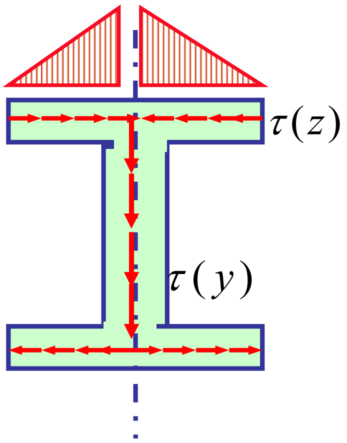
工字形截面腹板上的弯曲切应力近似公式

$$\tau=\frac{F_S}{bh}$$

$$\tau_{\max}=\frac{F_S}{b\left(I_z/S_{z\max}^*\right)}$$

腹板所承担的剪力等于整个截面剪力的95~97% 。

翼缘



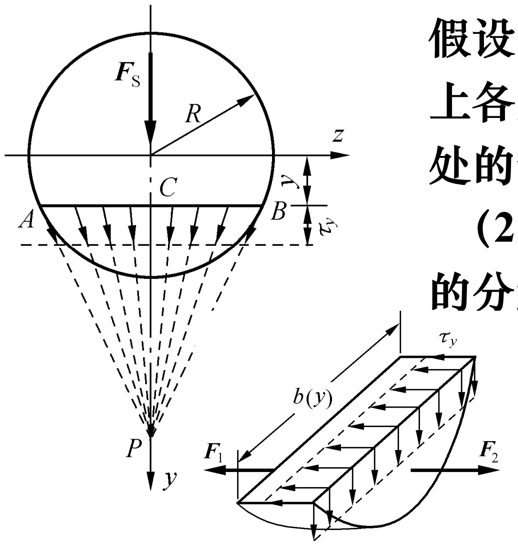
♉翼缘部分有竖向切应力和水平切应力，竖向切应力一般不予考虑。

♉翼缘部分的水平剪应力沿翼缘宽度按直线规律变化，并与腹板部分的竖向剪力形成“剪应力流”。

♉翼缘部分的剪应力强度计算时一般不予考虑。

♉腹板与翼缘交界处的应力较复杂，在连接处的转角上发生应力集中，为了避免这一点，以圆弧连接，使这里的剪应力实际值接近以腹板剪应力公式所得到的结果。

横力弯曲时梁横截面上的切应力－圆形截面梁



假设：（1）距离中性轴为y的AB弦上各点的切应力方向必汇交于A、B处的切线PA、PB 的交点P上。

（2） AB 弦上各点切应力沿y方向的分量相等。

$$\tau_y = \frac{F_S S_z^*(y)}{b(y) I_z}$$

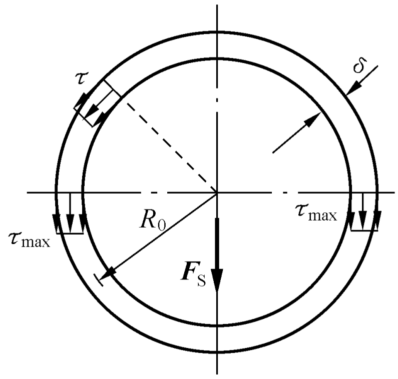
最大弯曲切应力发生在中性轴上

$$S_{z\max}^* = \left(\frac{1}{2}\frac{\pi D^2}{4}\right)\left(\frac{2D}{3\pi}\right)$$

$$I_z = \pi D^4/64$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{F_S S_{z\max}^*}{b(0) I_z} = \frac{4}{3}\frac{F_S}{\left(\pi D^2/4\right)} = \frac{4F_S}{3A}}$$

横力弯曲时梁横截面上的切应力－圆环形薄壁截面梁



最大弯曲切应力发生在中性轴上

$$\tau_{max}=\frac{F_S S^*_{z\,max}}{(2\delta)I_z}\approx\frac{F_S\left(2R_0^2\delta\right)}{(2\delta)\left(\pi R_0^3\delta\right)}=2\frac{F_S}{2\pi R_0\delta}=2\frac{F_S}{A}$$

横力弯曲时梁横截面上的切应力－小结

$$\boxed{\tau(y)=\frac{F_S S_z^*(y)}{bI_z}}$$

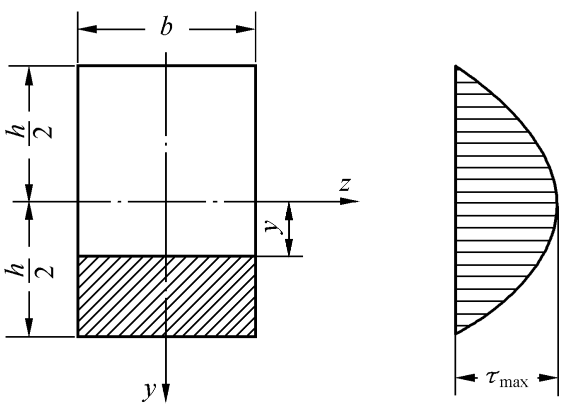
$\tau(y)$ － 截面上距中性轴y处的切应力

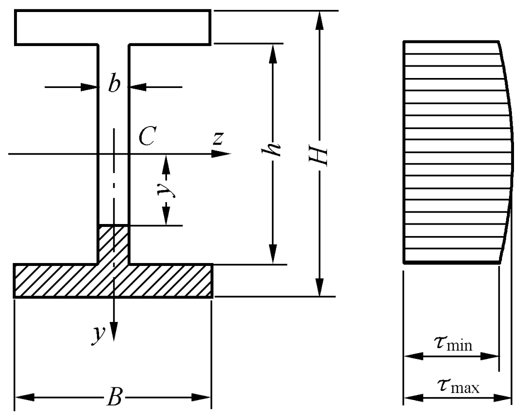
F_S － 截面上的剪力

b － y处的宽度

I_z － 整个截面对中性轴的惯性矩

$S_z^*(y)$ － y以外截面对中性轴z的静矩





横力弯曲时梁横截面上的最大弯曲切应力

$$\tau_{\max} = \frac{F_S S^*_{z\max}}{bI_z} = K\frac{F_S}{A}$$

F_S — 截面上的剪力

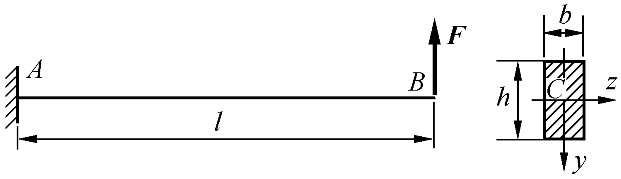
$S^*_{z\max}$ — 中性轴一侧截面对中性轴z的静矩

b — 横截面在中性轴处的宽度

K —截面系数

矩形截面：K=3/2；
圆形截面：K=4/3；
工字形截面：K=1；
圆环形薄壁截面：K=2

- **例8-2** 承受集中荷载的矩形截面细长悬臂梁。求梁的最大弯曲正应力和最大弯曲切应力及二者的比值。



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3|F_S|_{\max}}{2A}$$

- 解：梁的最大弯曲正应力和最大弯曲切应力分别发生在最大弯矩和最大剪力的截面上。

$$M_{\max} = M_A = Fl \qquad |F_S|_{\max} = F$$

最大正应力发生在A截面的上、下边缘处

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{6Fl}{bh^2}$$

最大弯曲切应力发生在各截面中性轴处

$$\tau_{\max} = \frac{3\left|F_S\right|_{\max}}{2A} = \frac{3F}{2bh}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 4\left(\frac{l}{h}\right)}$$

梁的跨度远大于截面高度时，梁的最大弯曲正应力远大于最大弯曲切应力。

对于细长梁，$l/h>5$，弯曲正应力是主要的。

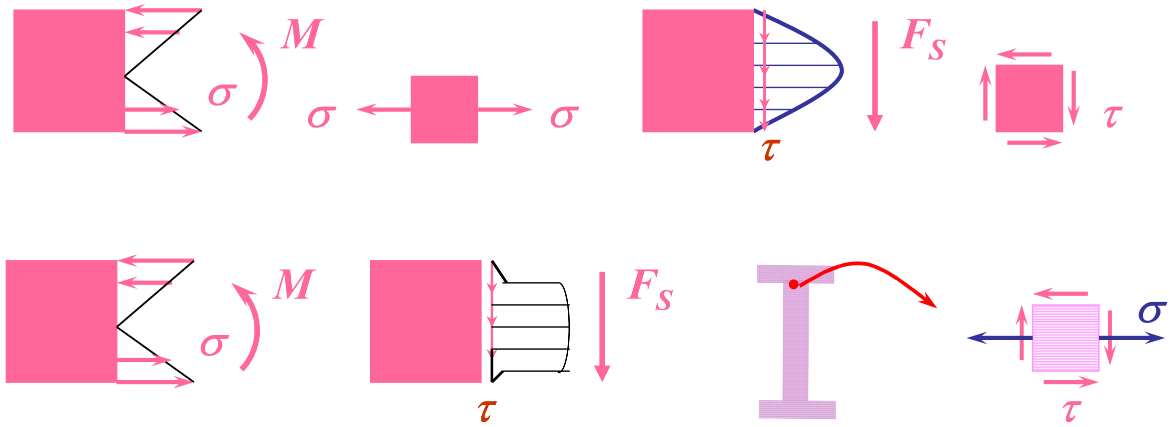
材料力学

梁的强度计算

可能的危险截面

- 出现弯矩最大值或剪力最大值的横截面；
- 剪力和弯矩虽然都不是最大值，但数值都比较大的横截面。
- 根据截面的形状和尺寸以及材料的力学性能等方面综合考虑。

- 三类危险点
  - 正应力最大的点，点位于危险截面的上、下边缘；
  - 切应力最大的点，位于危险截面的中性轴；
  - 正应力和切应力均较大的点，位于截面上、下边缘与中性轴之间某个位置上。



- 弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{t\max} \le [\sigma_t] \qquad \sigma_{c\max} \le [\sigma_c]$$

$[\sigma_t]=[\sigma_c]=[\sigma]$

$$\boxed{\sigma_{\max} = \left(\frac{|M|}{W_z}\right)_{\max} \le [\sigma]}$$

等直梁

截面对称于中性轴

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} \le [\sigma]}$$

对塑性材料，弯曲许用正应力一般取为拉伸许用应力的1.2倍。

- **弯曲切应力强度条件**

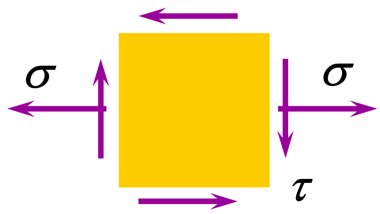
$$\tau_{\max} \le [\tau]$$

$$\tau_{\max} = \left(\frac{|F_S| S^*_{z\max}}{bI_z}\right)_{\max} \le [\tau]$$

等直梁

$$\tau_{\max} = \frac{|F_S|_{\max} S^*_{z\max}}{bI_z} \le [\tau]$$

- **第三类危险点的强度计算**



$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \qquad \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]$$

• 梁的弯曲强度计算

对于实心截面细长梁，通常只需要按弯曲正应力强度条件。

校核强度：$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$；$\tau_{\max} \leq [\tau]$

设计截面尺寸：$W_z \geq \dfrac{M_{\max}}{[\sigma]}$

设计载荷：$M_{\max} \leq W_z[\sigma]$；$[F_P] = f(M_{\max})$

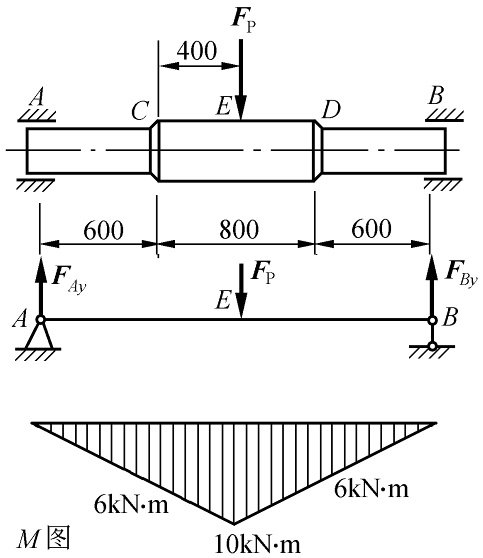
需要校核剪应力的几种特殊情况：

❶弯矩较小而剪力较大的梁（如短而粗的梁、集中荷载作用在支座附近的梁等），要校核剪应力。

❷薄壁截面梁，铆接或焊接的组合截面，其腹板的厚度与高度比小于型钢的相应比值时，要校核剪应力。

❸各向异性材料（如木材）的抗剪能力较差，顺纹受剪的木梁要校核剪应力。

• **例8-3** 钢制阶梯圆轴，AC及DB段的直径为100mm，CD段的直径为120mm。集中荷载F_P＝20kN，轴材料的许用应力[σ]=65MPa，试校核该轴的强度。



解：（1）分析危险截面

求得其支座约束力

作出弯矩图

危险截面

$$M_E = M_{\max} = 10\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_C = M_D = 6\text{kN}\cdot\text{m}$$

（2）强度校核

$$(W_z)_E = \frac{\pi D_E^3}{32} = 1.696\times10^{-4}m^3$$

$$(\sigma_{\max})_E = \frac{M_E}{(W_z)_E} = 59\times10^6 N/m^2 = 59MPa$$

$$(W_z)_C = (W_z)_D = \frac{\pi D_C^3}{32} = 9.817\times10^{-5}m^3$$

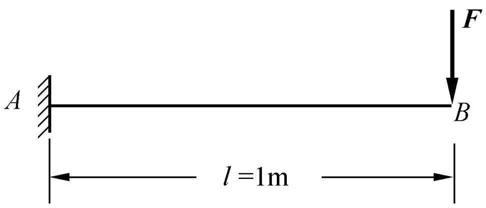
$$(\sigma_{\max})_C = (\sigma_{\max})_D = \frac{M_C}{(W_z)_C} = 61.1\times10^6 N/m^2 = 61.1MPa$$

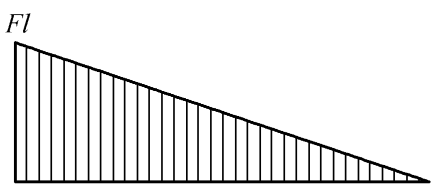
截面C和D的上、下边缘点为危险点

$$\sigma_{\max} = (\sigma_{\max})_C = (\sigma_{\max})_D = 61.1MPa \quad \sigma_{\max} < [\sigma] = 65MPa$$

⇨ 该轴满足强度条件

- **例8-4**悬臂梁，自由端受集中力F=20kN作用，材料的许用应力为[σ]=140MPa 。若分别采用下列三种截面形状：（1）工字钢；（2）高宽比h/b=2的矩形；（3）圆形。试比较三者所耗的材料用量。





解：作出弯矩图

$$|M|_{\max} = Fl = 20\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$W_z \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} = 143\times10^{-6}m^3$$

（1）工字钢梁

查型钢规格表，取No.16 工字钢

$$W_z = 141\times10^3 mm^3 \qquad A_1 = 2610 mm^2$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} = 141.8MPa > [\sigma] = 140MPa$$

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]}\times100\% = 1.28\% < 5\%$$

（2）矩形截面梁

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = 143\times10^3 mm^3$$

$$\Rightarrow \quad b = 60mm, h = 120mm, A_2 = 7200mm^2$$

（3）圆形截面梁

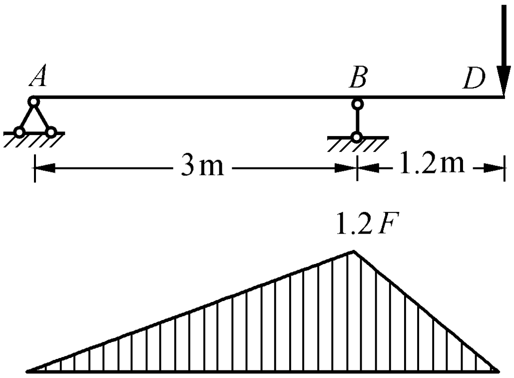
$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{b(2b)^2}{6} = 143\times10^3 mm^3$$

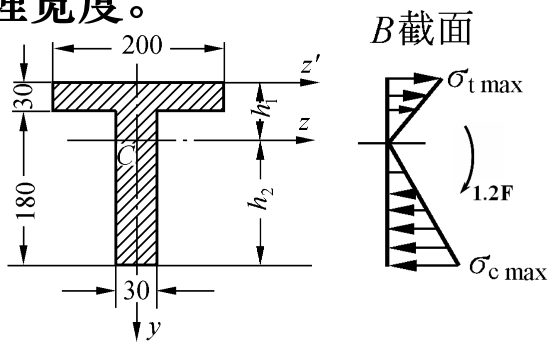
$$\Rightarrow \quad D = 113mm, A_3 = 10024mm^2$$

$$A_1 : A_2 : A_3 = 26.1 : 72 : 100.24 = 1 : 2.76 : 3.84$$

$\Rightarrow$ 圆形截面最费料，工字形截面最省料。

- **例 8-5** 铸铁制成的T形截面外伸梁。已知 $I_z=4636.4\times10^4 mm^4, h_1=64.7mm, h_2=145.3mm$，材料的许用拉应力和许用压应力分别为$[\sigma_t]=40$MPa和$[\sigma_c]=120$ MPa 。(1)试求该梁的许可荷载[F]；(2)若允许改动截面翼缘板宽b，求其最合理宽度。





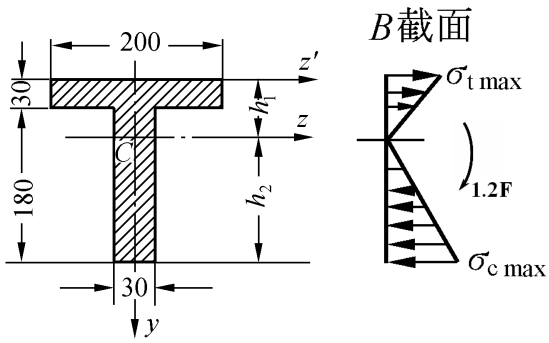
解: (1)求许可荷载

作出弯矩图 $$|M|_{max}=|M_B|=1.2F(\mathrm{N\cdot m})$$

最大正应力

$$\sigma_{t\max}=\frac{|M|_{\max}h_1}{I_z}=\frac{1.2Fh_1}{I_z}$$

$$\sigma_{c\max}=\frac{|M|_{\max}h_2}{I_z}=\frac{1.2Fh_2}{I_z}$$



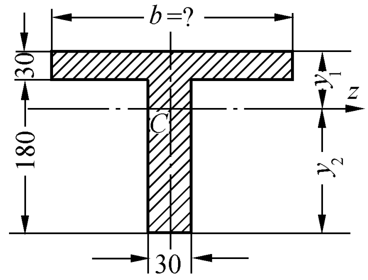
强度条件

$$\sigma_{t\max}\le[\sigma_t] \Longrightarrow F\le\frac{[\sigma_t]I_z}{1.2h_1}=23.89kN$$

$$\sigma_{c\max}\le[\sigma_c] \Longrightarrow F\le\frac{[\sigma_t]I_z}{1.2h_2}=31.91kN$$

$$\Rightarrow [F]=23.89kN$$

(2)求最合理翼缘板宽度



最合理截面，应使危险截面上的最大拉应力和最大压应力分别达到各自的许用应力。

$$\sigma_{t\max} = \frac{|M|_{\max} y_1}{I_z} = [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c\max} = \frac{|M|_{\max} y_2}{I_z} = [\sigma_c]$$

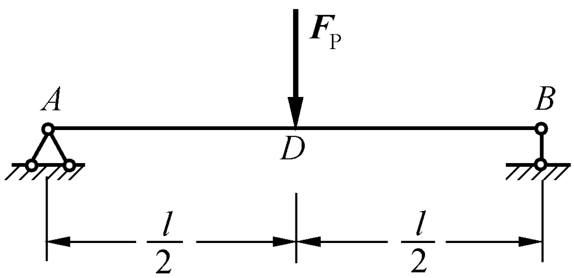
$$\Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} = \frac{1}{3}$$

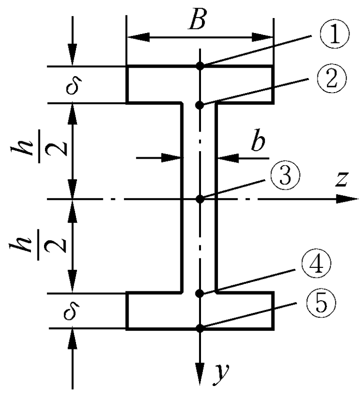
$$\left.\begin{aligned} y_2 &= 3y_1 \\ y_1 + y_2 &= 210mm \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1 = 52.5mm, y_2 = 157.5mm$$

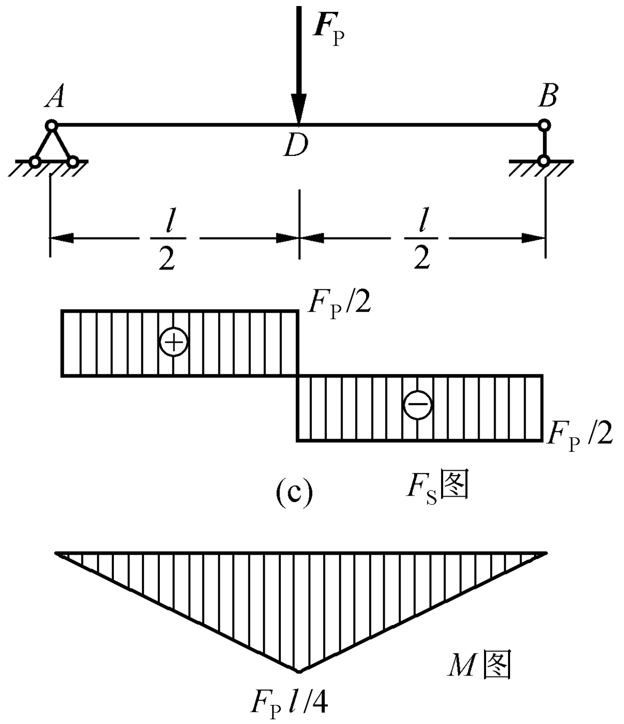
$$S_z = 0 \Rightarrow 30\times b\times\left(y_1 - \frac{30}{2}\right) - 30\times 180\times\left(y_2 - \frac{180}{2}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ 最合理翼缘板宽度 $b = 324mm$

- **例8-6** 工字形截面钢梁，已知横截面尺寸B=220mm，h=800mm，δ=22mm，b=10mm，梁横截面中性轴一侧截面对中性轴的静矩为$S_{z\max}=2790\times10^{-6}m^3$，翼缘面积对中性轴的静矩为$S_z=1990\times10^{-6}m^3$，横截面对中性轴的惯性矩$I_z=2062\times10^{-6}m^4$。已知梁的跨度$l$=4.2$m$，荷载$F_P$=750kN，材料的许用应力[σ]=170MPa 。试根据最大切应力理论对梁的强度作全面校核。







解：（1）分析危险截面

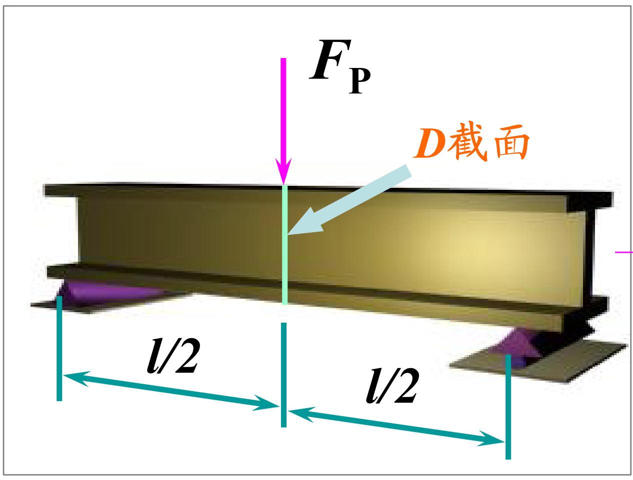
作出剪力图和弯矩图

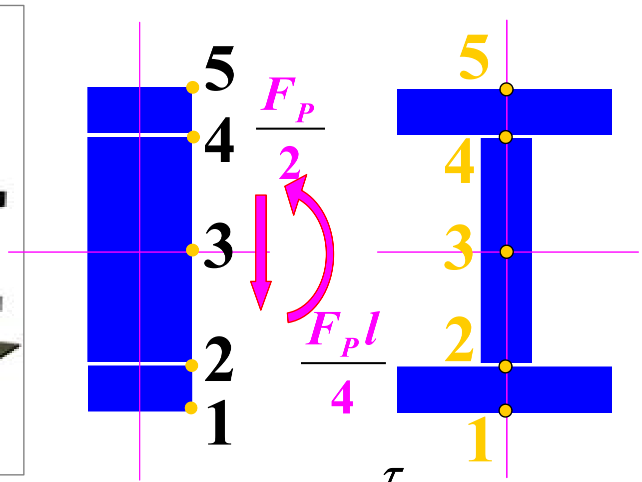
危险截面：D的左右截面

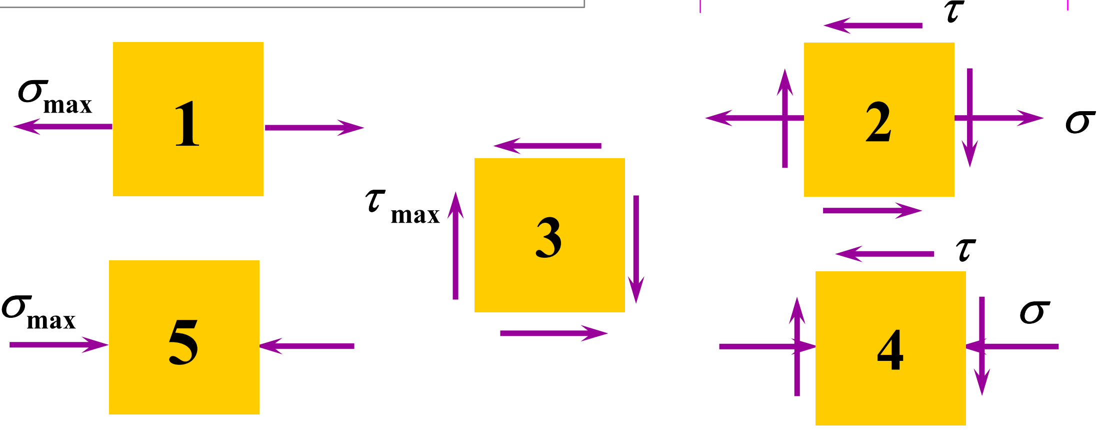
D⁻截面：

$$F_S = \frac{F_p}{2} = 375kN$$

$$M = \frac{F_P l}{4} = 787.5kN \cdot m$$







（2）校核危险点

点1,5 $\sigma_{\max}=\dfrac{My_{\max}}{I_z}=\dfrac{M}{W_z}=161.3MPa<[\sigma]=170MPa$

点3 $\tau_{\max}=\dfrac{F_S S^*_{z\max}}{bI_z}=50.74MPa$

$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=2\tau_{\max}=101.48MPa<[\sigma]=170MPa$

点2,4 $\sigma=\dfrac{My}{I_z}=152.8MPa \quad \tau=\dfrac{F_S S^*_z}{bI_z}=36.2MPa$

$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=169.3MPa<[\sigma]=170MPa$

⇨ 该梁满足强度要求

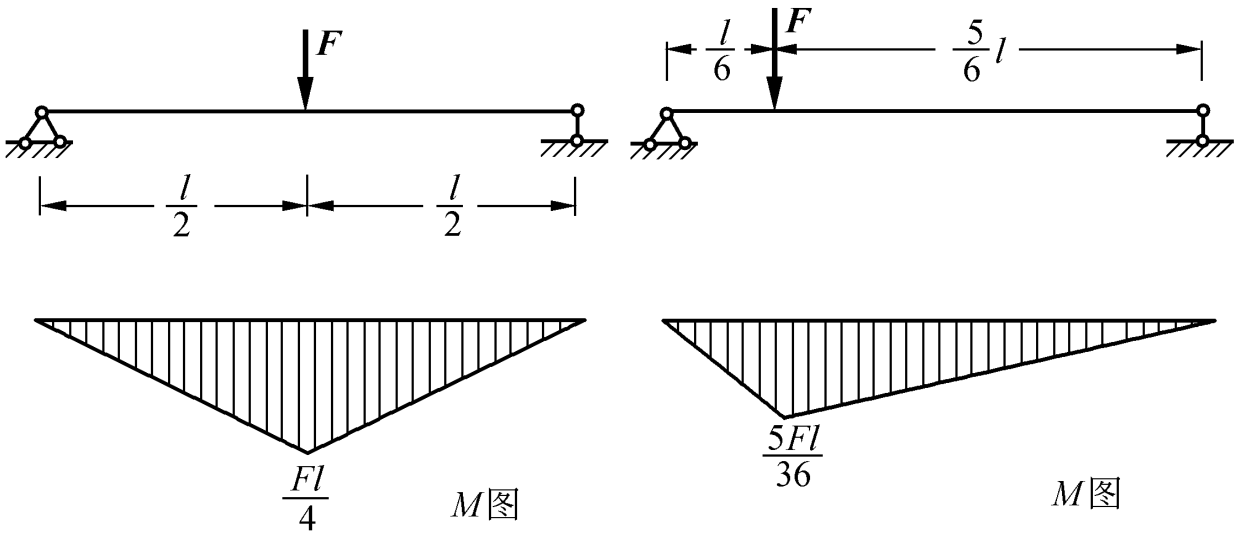
- 梁的合理强度设计

设计梁的主要依据是弯曲正应力强度条件。

$$\boxed{\sigma_{\max}=\left(\frac{|M|}{W_z}\right)_{\max}\le[\sigma]}$$

- 梁的合理受力
  - 合理安排梁的加载方式
  - 合理安排梁的约束
- 梁的合理截面形状
  - 用较小的面积获得较大弯曲截面系数
  - 当截面面积一定时，将较多材料放置在远离中性轴的部位

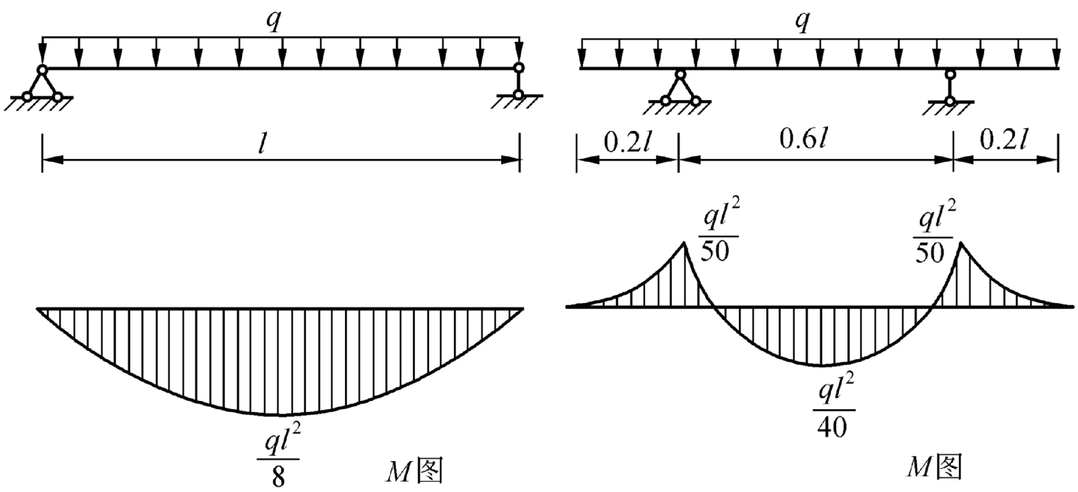
梁的合理受力



集中载荷尽量靠近支座，可以显著降低梁内的最大弯矩。

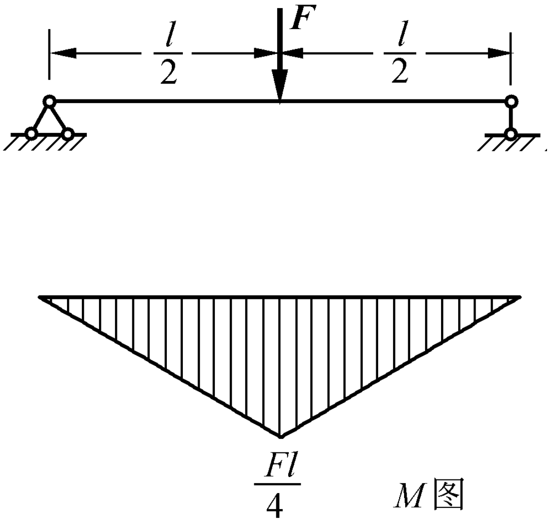
但是荷载距支座太近时，支座附近的剪力将显著增大。

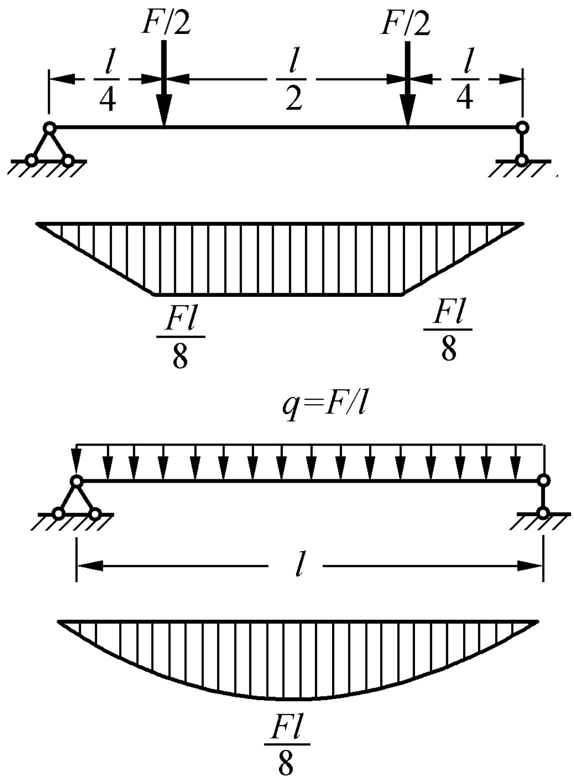
梁的合理受力



简支梁两端支座内移，可以显著降低梁内的最大弯矩。

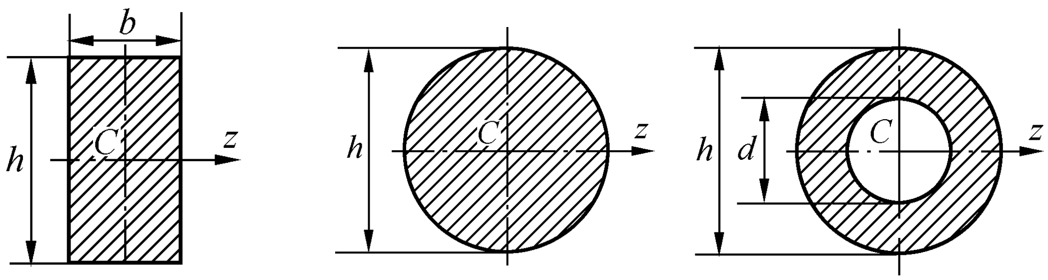
梁的合理受力





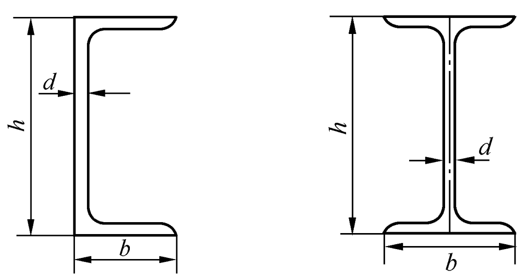
将集中荷载分散，可以显著降低梁内的最大弯矩。

梁的合理截面形状



$\dfrac{W_z}{A}$ 值

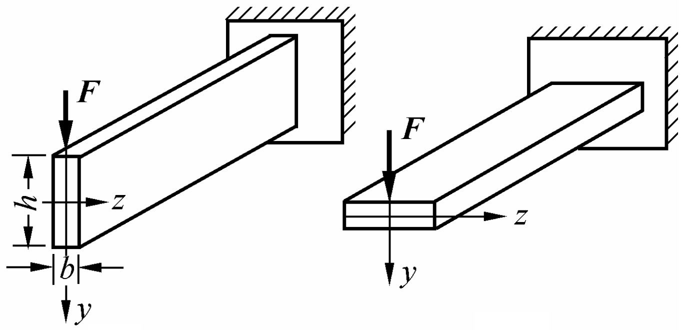
0.167h　　0.125h　　0.205h



0.27 ~ 0.31h　　0.27 ~ 0.31h

实心圆形截面最差，
竖放矩形截面次之，
空心圆形截面较好，
槽钢、工字钢最佳。

梁的合理截面形状

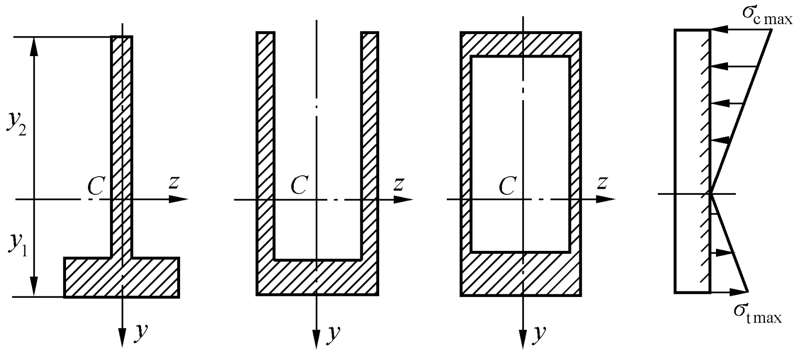


$$\frac{bh^2/6}{hb^2/6}=\frac{h}{b}>1$$

矩形截面梁，“竖放”比“平放”要合理。

- 选择梁截面形状还应考虑材料特性，使截面上下边缘处的最大正应力分别与材料的许用应力值接近。
  - 对于抗拉与抗压强度相同的材料梁（如低碳钢梁），宜采用对称于中性轴的截面，例如工字形、矩形等截面；
  - 对于抗拉强度低于抗压强度的材料梁（如铸铁梁），则宜选择中性轴偏于受拉一侧的截面形状，例如T字形、槽形等截面，且尽可能使

$$\frac{\sigma_{t\max}}{\sigma_{c\max}}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}$$



• 变截面梁和等强度梁

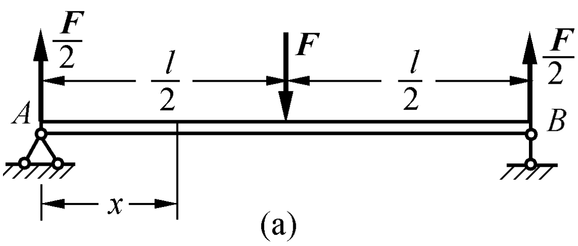
– 在工程实际中，为了节约材料，减轻自重，常根据弯矩沿梁轴的变化情况，将梁也相应设计为变截面梁。

– 如果变截面梁上所有横截面上的最大弯曲正应力均相同，并等于许用应力[σ]，即各横截面具有相同强度，这就是等强度梁。

等强度梁: $$\sigma_{\max}=\frac{M(x)}{W_z(x)}=[\sigma]$$

$$\Rightarrow W_z(x)=\frac{M(x)}{[\sigma]}$$

• **例8-7** 矩形变截面简支梁，承受集中荷载F。已知材料的许用应力[σ]和[τ]，设截面宽度b不变，高度沿梁轴变化。试按等强度要求，确定截面高度沿梁轴的变化规律。



(a)

解：截面x的弯矩和剪力

$$M(x)=\frac{Fx}{2}$$

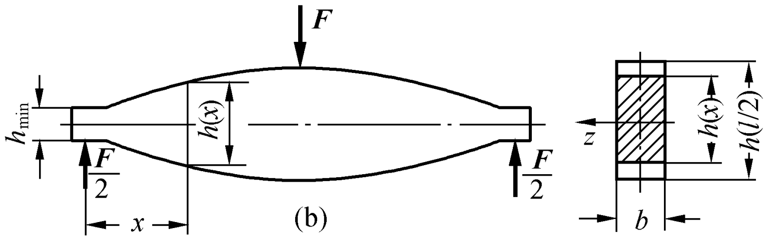
$$F_S(x)=\frac{F}{2}$$

$$W_z(x)=\frac{M(x)}{[\sigma]}=\frac{Fx}{2[\sigma]}=\frac{bh^2(x)}{6}$$

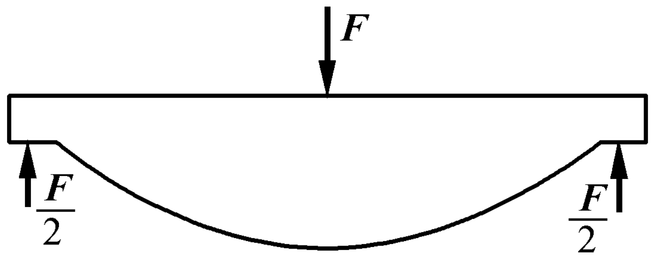
$$\Rightarrow h(x)=\sqrt{\frac{3Fx}{b[\sigma]}}$$

$$h_{\max}=h\left(\frac{l}{2}\right)=\sqrt{\frac{3Fl}{2b[\sigma]}}$$

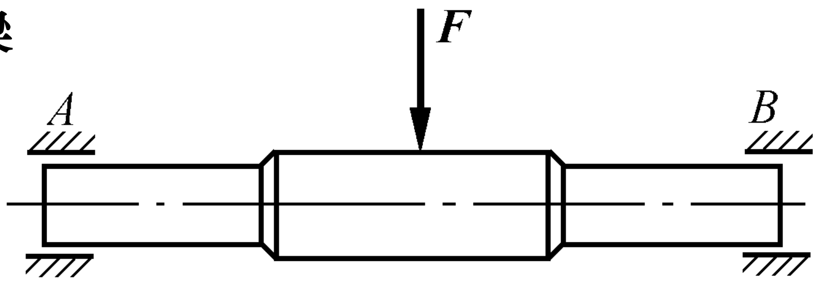
$$\tau_{\max}=\frac{3F_s}{2bh_{\min}}=[\tau] \quad \Rightarrow \quad h_{\min}=\frac{3F}{4b[\tau]}$$



鱼腹形变截面梁

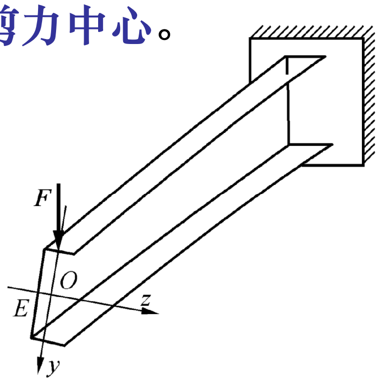


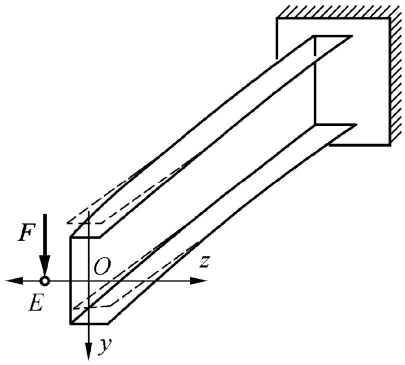
阶梯形变截面梁



• 弯曲中心的概念

- 对于没有纵向对称面的梁的纯弯曲情况，只要弯曲外力偶的作用面与截面形心主惯性平面重合或平行，梁仍将产生平面弯曲。
- 对于没有纵向对称面的梁的横力弯曲情况，即使横向力作用于形心主惯性平面内，梁除发生弯曲变形外，还可能发生扭转变形。只有当横向力作用线通过某一特定点E时，梁才只产生弯曲而无扭转。特定点E称为横截面的弯曲中心，又称剪力中心。





•弯曲中心是横截面上与切应力相对应的分布内力系合力的作用点，即横截面上与切应力相对应的分布内力系向弯曲中心简化时，所得的主矩为零而主矢不为零。

•弯曲中心的位置仅取决于横截面的形状和尺寸，而与荷载和材料的性质无关。

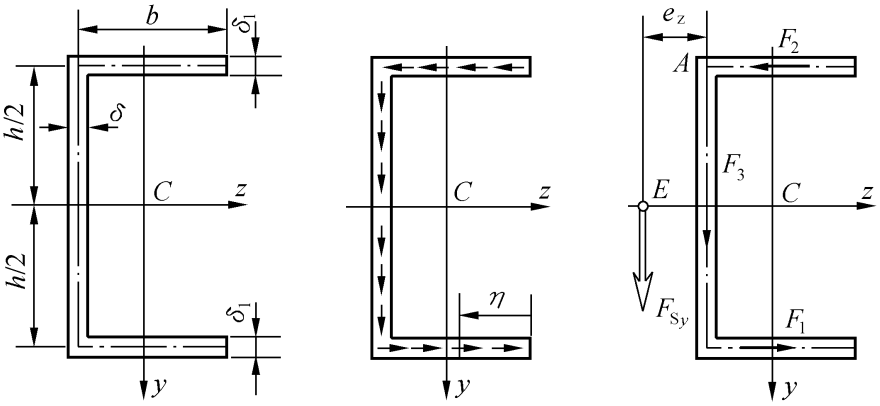
–当界面具有对称轴时，弯曲中心必位于对称轴上；

–对于双对称截面，弯曲中心与形心重合。

•开口薄壁截面杆的抗扭刚度较小，若横向力不通过弯曲中心，将引起严重的扭转变形；

•实心杆件或闭口薄壁杆件的抗扭刚度较大，且弯曲中心靠近截面形心，当横向力不通过弯曲中心时，引起的扭转变形一般可以不予考虑 。

- 例8-8 确定槽形薄壁梁横截面弯曲中心的位置。

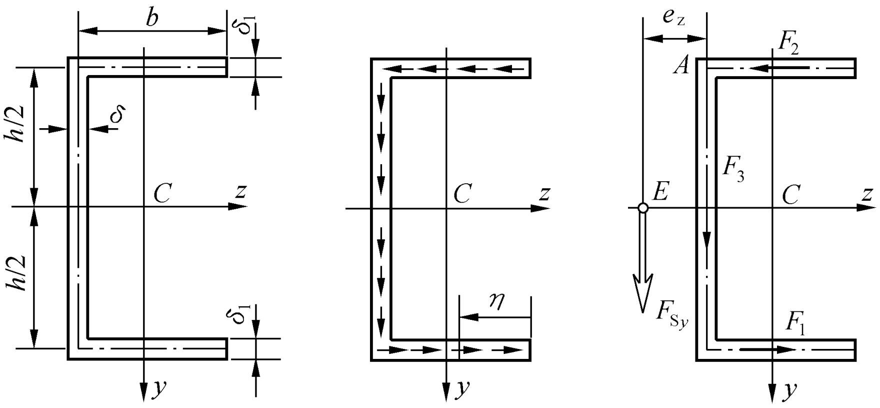


解：弯曲中心E必位于截面的对称轴z上

设横向力铅垂向下，且使梁只发生弯曲而不扭转，则横截面上的弯曲切应力流如图。

下翼缘

$$\tau(\eta)=\frac{F_{Sy}S_z'(\eta)}{\delta_1 I_z}=\frac{F_{Sy}h\eta}{2I_z}$$



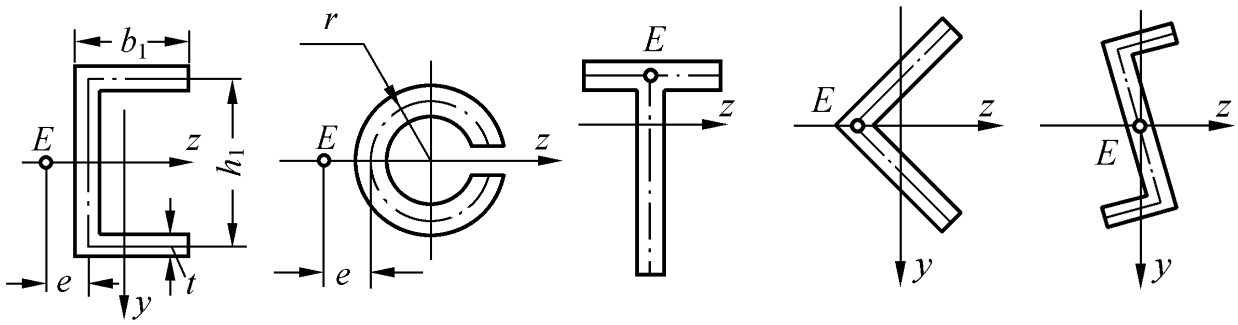
下翼缘 $$F_1=\int_0^b \delta_1\tau(\eta)\mathrm{d}\eta=\frac{F_{Sy}h\delta_1 b^2}{4I_z}$$

同理可得上翼缘内力F_2和腹板上内力F_3

内力系向弯曲中心简化时，所得的主矩为零，可判断弯曲中心E位于腹板左侧。

$$F_{Sy}e_z=F_1 h \quad\Rightarrow\quad e_z=\frac{F_1 h}{F_{Sy}}=\frac{h^2\delta_1 b^2}{4I_z}$$

•工程中常用的开口薄壁截面杆的弯曲中心位置（表8-1）

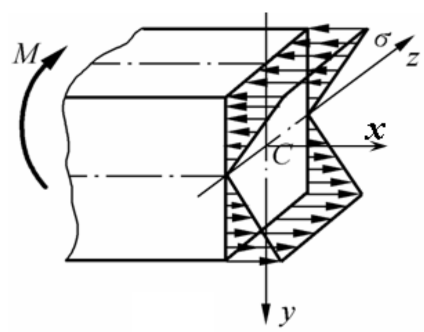


$e = \dfrac{b_1^2 h_1^2 t}{4I_z}$　　$e = r_0$　　两狭长矩形长边中线交点　　与形心重合

横力弯曲时梁横截面上的正应力－小结

纯弯曲梁的正应力计算公式

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \quad \cdots\cdots(4)$$



- 取M、y绝对值代入，由弯曲变形来判定拉压应力：以中性轴为界，梁凸出的一侧受拉，凹入的一侧受压。

• 最大正应力：

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

• 给定截面

$$\sigma_{t\max} = \frac{My_1}{I_z}, \quad \sigma_{c\max} = \frac{My_2}{I_z}$$

• 全梁

$$\sigma_{t\max} = \left(\frac{My_1}{I_z}\right)_{\max}, \quad \sigma_{c\max} = \left(\frac{My_2}{I_z}\right)_{\max}$$

等直梁

$$\sigma_{t\max} = \frac{(My_1)_{\max}}{I_z}, \quad \sigma_{c\max} = \frac{(My_2)_{\max}}{I_z}$$

当中性轴是横截面的对称轴时：

• 给定截面

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} = \frac{M}{W_z}$$

• 全梁

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{M}{W_z}\right)_{\max}$$

等直梁

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z}$$

横力弯曲时梁横截面上的切应力－小结

$$\tau(y)=\frac{F_S S_z^*(y)}{bI_z}$$

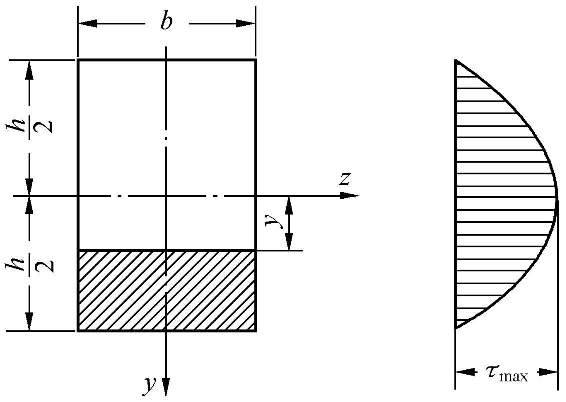
$\tau(y)$ － 截面上距中性轴y处的切应力

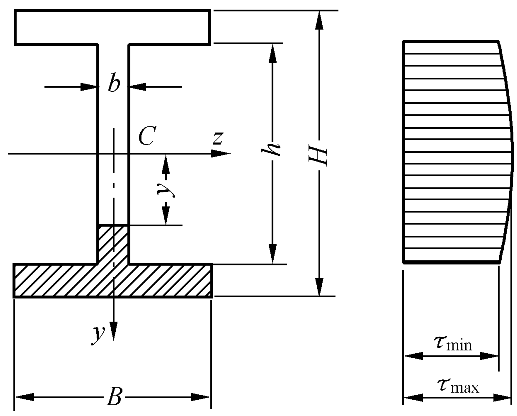
F_S － 截面上的剪力

b － y处的宽度

I_z － 整个截面对中性轴的惯性矩

$S_z^*(y)$ － y以外截面对中性轴z的静矩





横力弯曲时梁横截面上的最大弯曲切应力

$$\tau_{\max}=\frac{F_S S^*_{z\max}}{bI_z}=K\frac{F_S}{A}$$

F_S － 截面上的剪力

$S^*_{z\max}$ － 中性轴一侧截面对中性轴z的静矩

b － 横截面在中性轴处的宽度

K －截面系数

矩形截面：K=3/2；
圆形截面：K=4/3；
工字形截面： K=1 ；
圆环形薄壁截面： K=2

$$\sigma_{t\max} \le [\sigma_t] \quad \sigma_{c\max} \le [\sigma_c]$$

•梁的强度计算

- 弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} \le [\sigma]$$

对于实心截面细长梁，通常只需要按弯曲正应力强度条件。

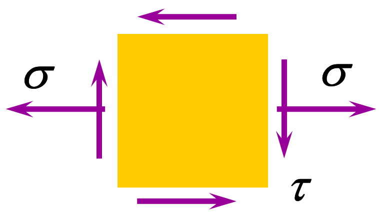
- 弯曲切应力强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{|F_S|_{\max} S_{z\max}^*}{bI_z} \le [\tau]$$

- 第三类危险点的强度计算

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]$$



- ## 梁的合理强度设计

设计梁的主要依据是弯曲正应力强度条件。

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{|M|}{W_z}\right)_{\max} \le [\sigma]$$

- 梁的合理受力
  - 合理安排梁的加载方式
  - 合理安排梁的约束
- 梁的合理截面形状
  - 用较小的面积获得较大弯曲截面系数
  - 当截面面积一定时，将较多材料放置在远离中性轴的部位