



第6章 应力状态分析及强度理论



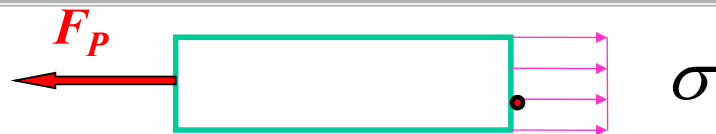
主要内容

- 应力状态概述
- 平面应力状态分析
- 三向应力状态分析
- 广义胡克定律
- 一般应力状态下的应变比能
- 工程中常用的四种强度理论

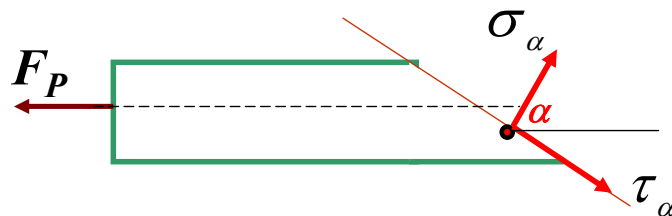
6.1 应力状态概述

- 在一般情况下杆件截面上不同点的应力是不相同的；过一点不同方位面上的应力也是不相同的。
- 当提及应力时，必须明确“哪一个面上哪一点”的应力或者“哪一点哪一个方位面上”的应力。

轴向拉压



同一横截面上各点应力相等： $\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F_P}{A}$

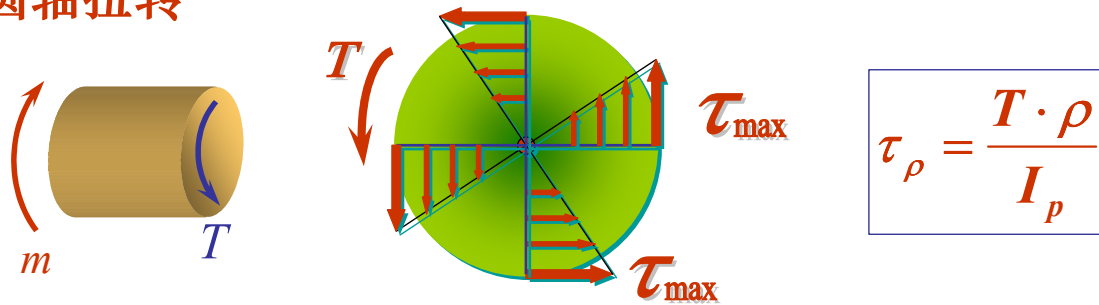


同一点在斜截面上时：

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

此例表明：同一点在不同方位截面上，它的应力是各不相同的，此即应力的面的概念。

圆轴扭转



此例表明：同一横截面上不同点的应力是各不相同的，此即应力的点的概念。

应力

指明

哪一个面上？
哪一点？

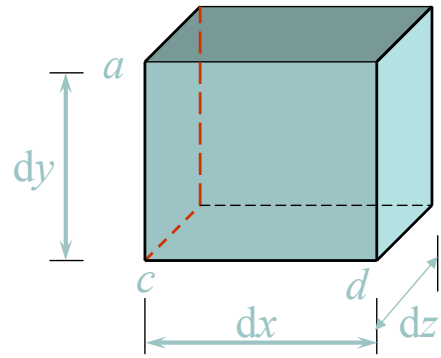
哪一点？
哪个方向面？

过受力体内一点所有方位面上应力的集合，称之为一点处的应力状态。

• 一点应力状态的描述

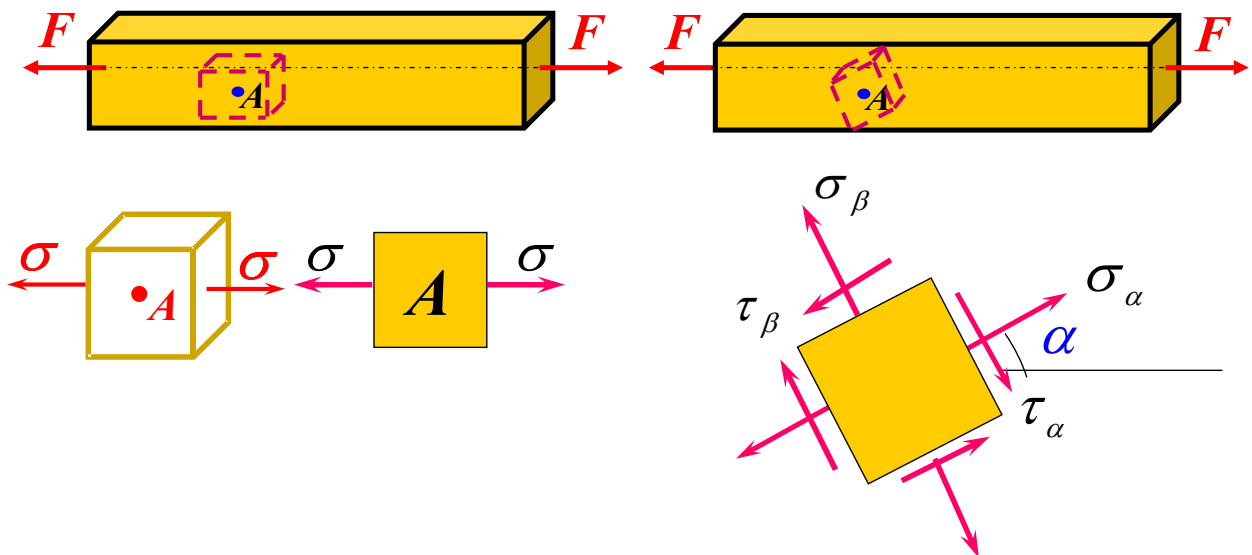
• 单元体

围绕点截取出一个微小的正六面体，当其三个方向的尺度趋于无穷小时，正六面体便趋于所考虑的点。



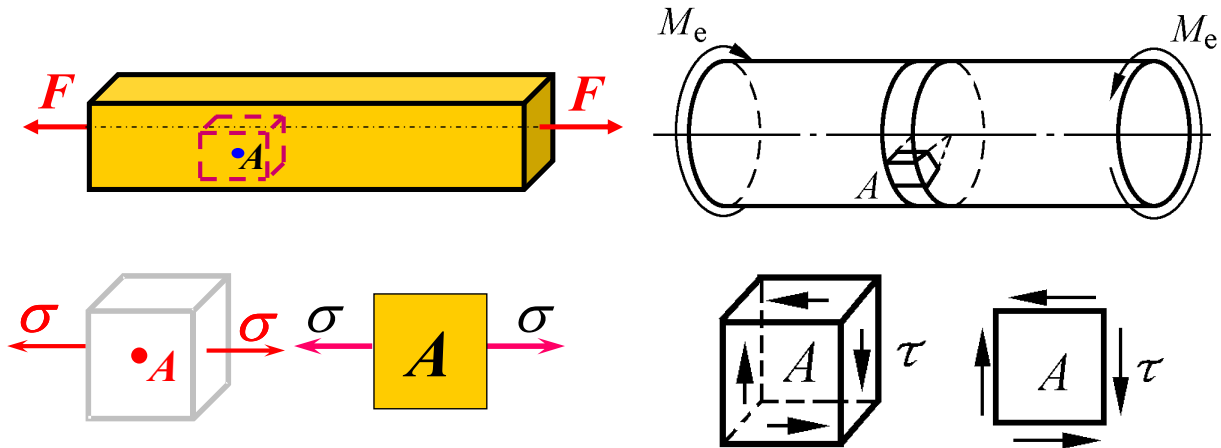
- 单元体各个表面上应力均匀分布；
- 单元体各对相互平行面上应力大小相等、方向相反。
- 单元体六个面上的应力代表这点三个互相垂直面上的应力。
- 单元体各个面上的应力已知，其内任意斜截面上的应力便可用截面法求得，该点处的应力状态可完全确定。

- 围绕同一点截取单元体的方位不同，其上的应力也不同；
- 同一点的应力状态可以有各种各样的描述方式。

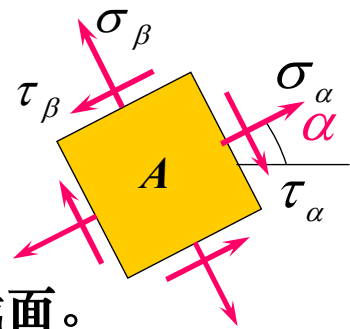


原始单元体

- 杆件纵、横截面上的应力可以通过应力计算公式求得，故通常是用纵、横六个面来截取单元体。

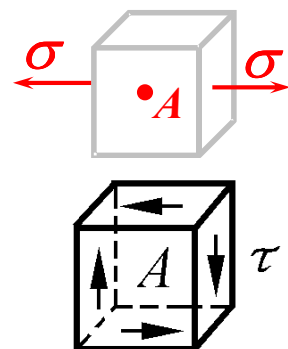


- 在一般情况下，从受力杆件内某一点处截取一任意方位的单元体时，单元体的三对相互垂直的平面上都可能同时存在正应力和切应力。



- **主平面**：单元体中切应力为零的截面。
- **主单元体**：围绕一点按三个主平面方位截取的单元体。
- **主应力**：主平面上的正应力
 - 主应力可为拉应力、压应力或零。
 - 通常按其代数值，依次表示

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

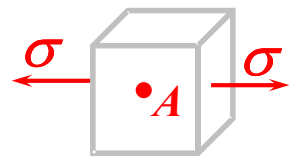


• 应力状态分类

- **单向应力状态或简单应力状态**：三个主应力中只有一个不等于零；
- **二向应力状态或平面应力状态**：三个主应力中有两个不等于零；
- **三向应力状态或空间应力状态**：三个主应力都不等于零。
- 二向应力状态和三向应力状态统称为**复杂应力状态**。

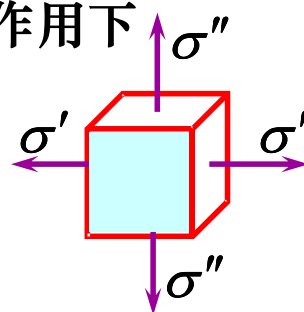
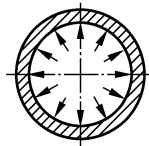
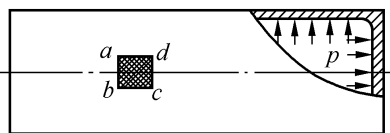
• 单向应力状态

- 例：轴向拉压杆件中各点应力状态



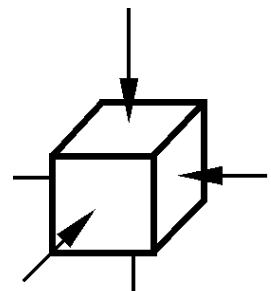
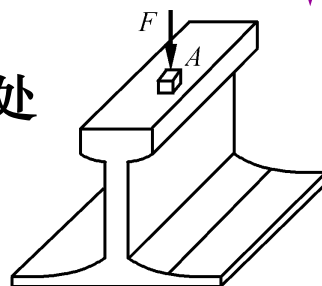
• 二向应力状态

- 例：薄壁长圆筒在均匀内压作用下



• 三向应力状态

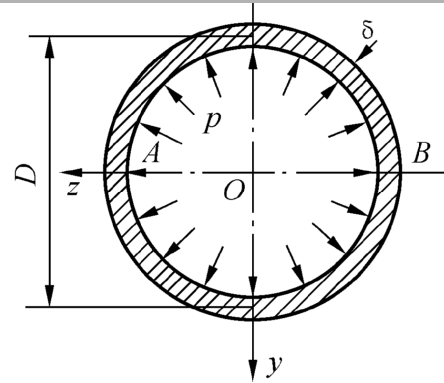
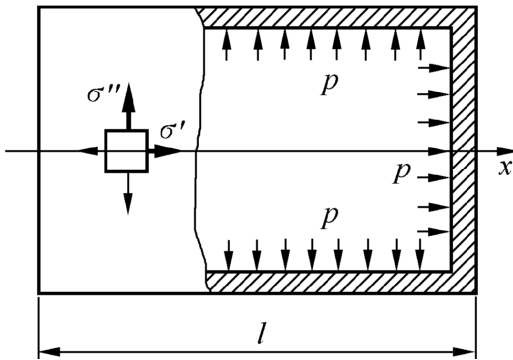
- 例：导轨与滚轮接触处



材料力学



• 例



分析:

- 筒体只产生轴向伸长和周向膨胀的变形，在筒壁的纵、横截面上只有正应力而无切应力。
- 轴向应力：作用在横截面上的正应力（沿容器轴线方向）
- 环向应力：作用在纵截面上的正应力（沿圆周的切线方向）
- 容器壁较薄，不考虑端部效应，上述两种应力均沿容器壁厚均匀分布。

材料力学



解:

分别用横截面和纵截面将容器截开，分析受力

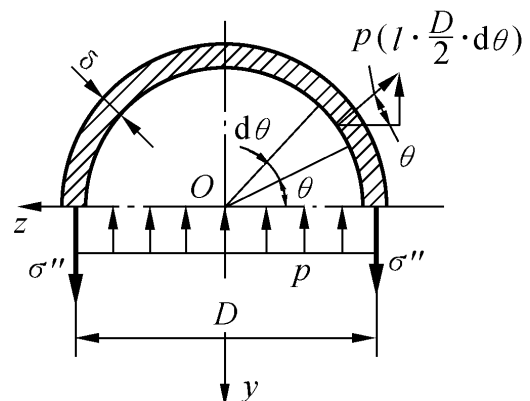
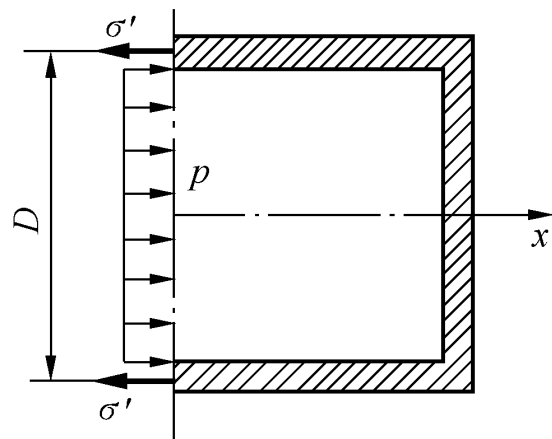
$$\sum F_x = 0$$

$$\sigma'(\pi D \delta) - p \frac{\pi D^2}{4} = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sigma''(l \cdot 2\delta) - p D l = 0$$

➔ $\sigma' = \frac{pD}{4\delta} \quad \sigma'' = \frac{pD}{2\delta}$



应力状态分析

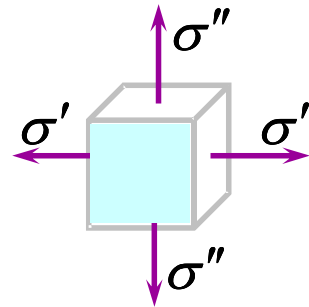
以纵、横两组平面截取单元体，该单元体受到两个方向的拉伸应力， σ' 与 σ'' 皆为主应力。

作用于内壁上的内压力 p 及外壁上的大气压力都远小于 σ' 和 σ'' ，在单元体的第三个方向（径向）上，径向应力忽略不计。

- 单元体可近似看作平面应力状态。

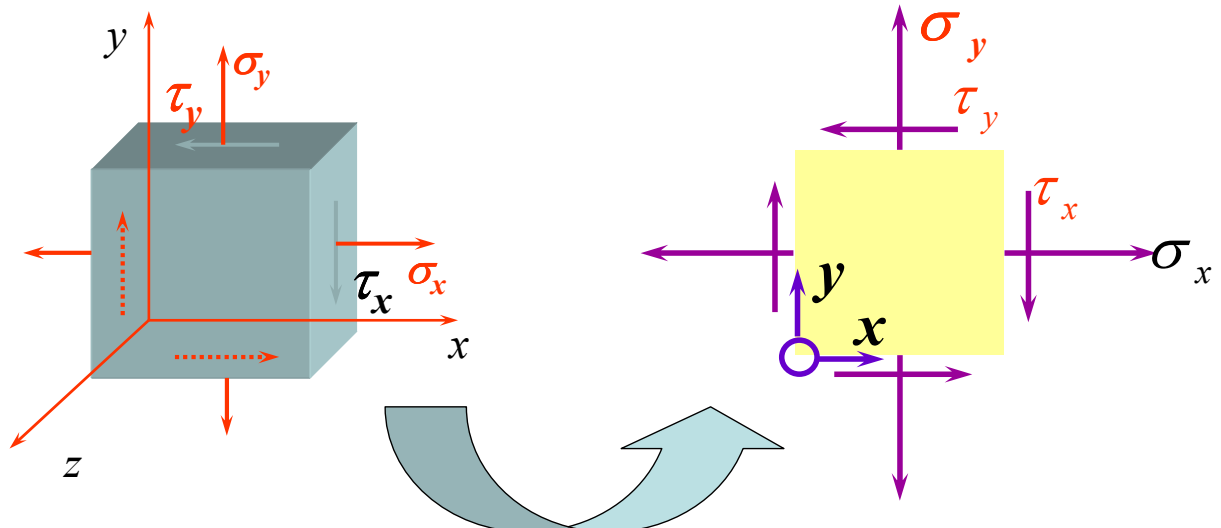
主应力 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\sigma_1 = \sigma'' = \frac{pD}{2\delta} \quad \sigma_2 = \sigma' = \frac{pD}{4\delta} \quad \sigma_3 = 0$$

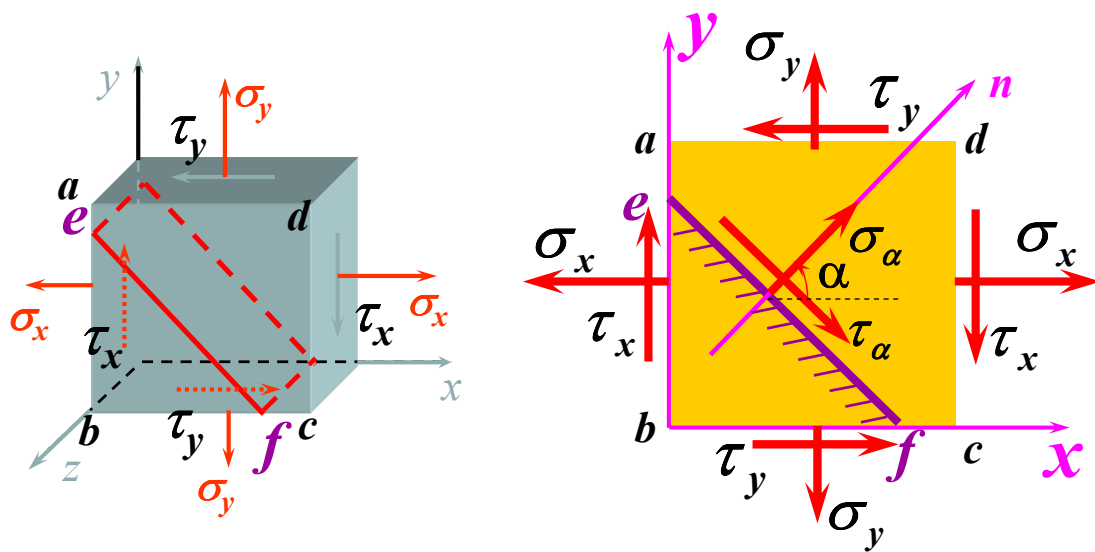


6.2 平面应力状态分析

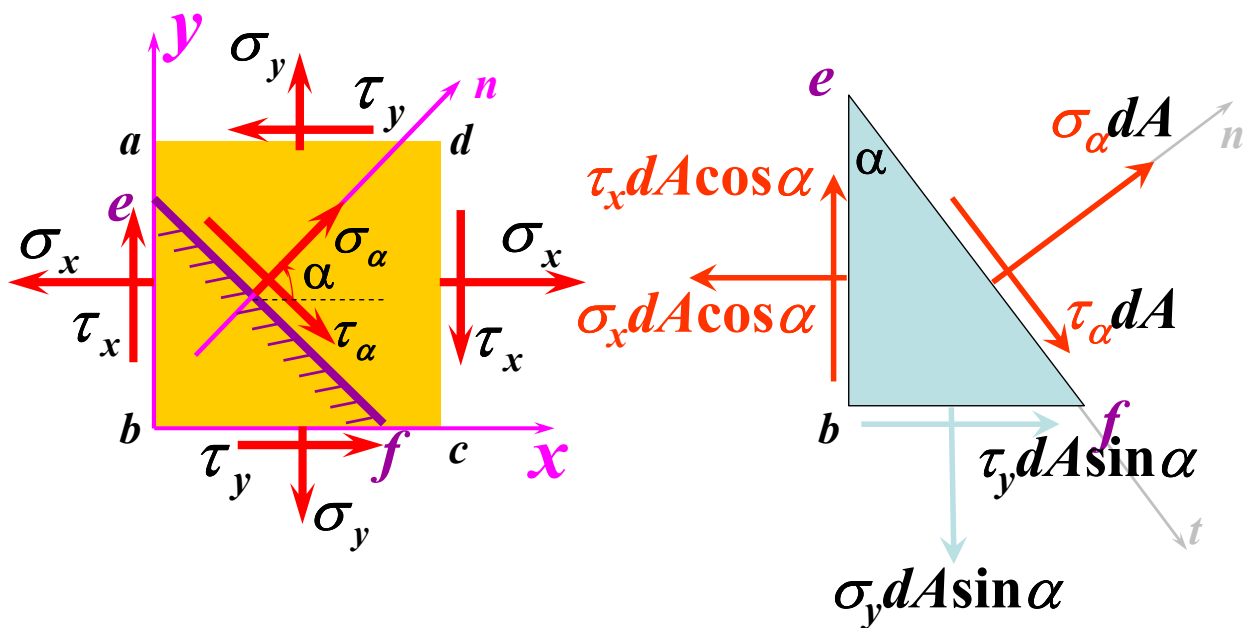
- 在平面应力状态下，已知通过某点的两对互相垂直截面上的应力后，如何求出通过该点的其他截面上的应力，并确定主平面的方位和主应力。



• 6.2.1 斜截面上的应力



• 解析法



平衡方程—— $\sum F_n = 0$ 及 $\sum F_t = 0$

$$\sum F_n = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\sigma_\alpha dA + (\tau_x dA \cos \alpha) \sin \alpha - (\sigma_x dA \cos \alpha) \cos \alpha + (\tau_y dA \sin \alpha) \cos \alpha - (\sigma_y dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_t = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\tau_\alpha dA - (\tau_x dA \cos \alpha) \cos \alpha - (\sigma_x dA \cos \alpha) \sin \alpha + (\tau_y dA \sin \alpha) \sin \alpha + (\sigma_y dA \sin \alpha) \cos \alpha = 0$$

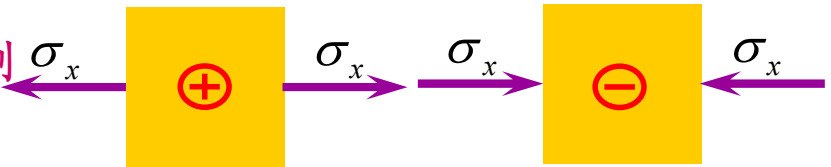
平面应力状态下斜截面上应力的一般公式

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \end{cases}$$

材料力学



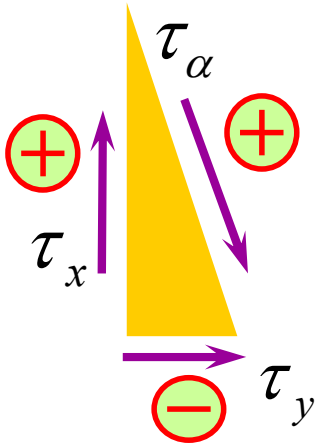
1、正应力正负号规则



拉为正

压为负

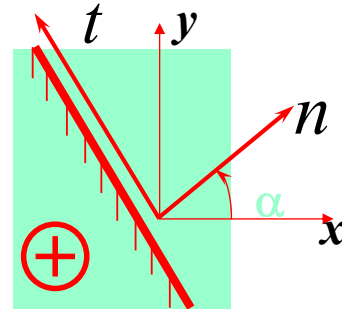
2、剪应力正负号规则



使微元或其局部顺时针方向转动为正；反之为负。

3、 α 角正负号规则

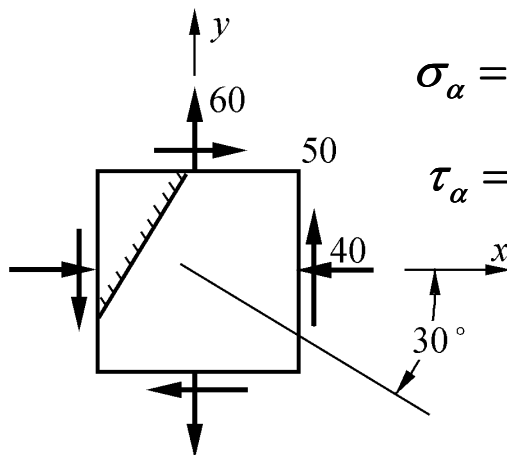
由 x 正向逆时针转到 n 正向者为正；反之为负。



材料力学



- 例6-2 已知某点的应力状态，(应力的单位为MPa)，试计算图示斜截面上的应力。



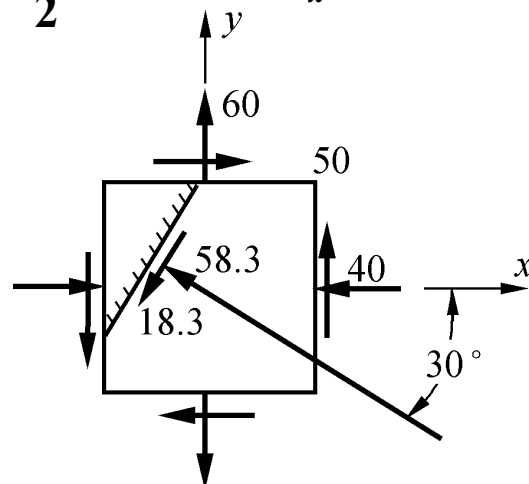
(单位: MPa)

$$\sigma_{-30^\circ} = -58.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{-30^\circ} = 18.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$



(单位: MPa)

用 $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ 斜截面截取，此截面上的应力为

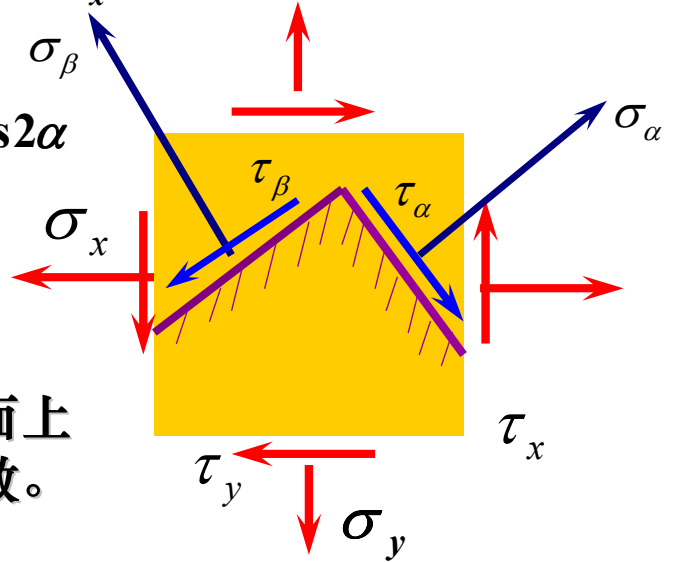
$$\begin{cases} \sigma_\beta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha \\ \tau_\beta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_x \cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x + \sigma_y$$

即单元体两个相互垂直面上的正应力之和是一个常数。

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta$$

即又一次证明了剪应力的互等定理。



平面应力状态的主应力、主平面与极值

$$\left. \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha_0 - 2\tau_x \cos 2\alpha_0 = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \text{两个驻点: } \alpha_0, \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$$

两个极值点

$$\begin{cases} \sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \\ \sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \end{cases}$$

$$\tau_{\alpha_0} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_x \cos 2\alpha_0 = 0$$

极值正应力就是主应力

两个主应力与两个主平面的对应关系

$$\begin{cases} \sigma' \\ \sigma'' \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{两个主应力}$$

$$\text{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \Rightarrow \quad \text{角度: } \alpha_{01}, \alpha_{02} \quad \Rightarrow \quad \text{两个主应力}$$

若 $\sigma_x \neq \sigma_y$, σ' (即 σ_{\max}) 偏近 σ_x 和 σ_y 中代数值较大者。

σ' (即 σ_{\max}) 与 σ_x 和 σ_y 中代数值较大者夹角取 $|\alpha_0| < 45^\circ$ 。

若 $\sigma_x = \sigma_y$, 对 $\tau_x > 0$, σ' (即 σ_{\max}) 与 x 轴夹角 $\alpha_0 = -45^\circ$;
对 $\tau_x < 0$, σ' (即 σ_{\max}) 与 x 轴夹角 $\alpha_0 = 45^\circ$ 。

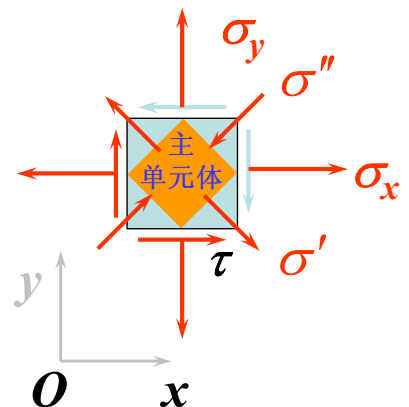
最大切应力

$$\left. \frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{tg}2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_x}$$

$$\begin{cases} \tau' \\ \tau'' \end{cases} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

$$\text{tg}2\alpha_0 = -\frac{1}{\text{tg}2\alpha_1} \quad \Rightarrow$$

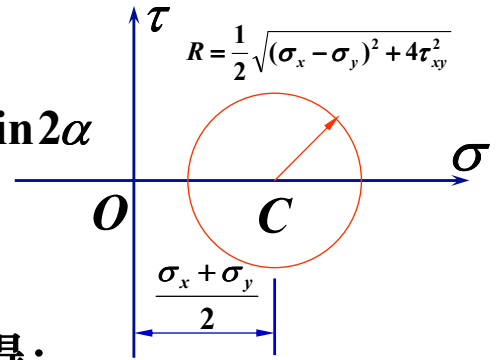
$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\pi}{4}, \text{ 即极值剪应力面与主平面成 } 45^\circ$$



• 应力圆法

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$



对上述方程消去参数 (2α) ，得：

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2 \quad \text{应力圆方程}$$

此方程曲线为**应力圆**（或莫尔圆）。

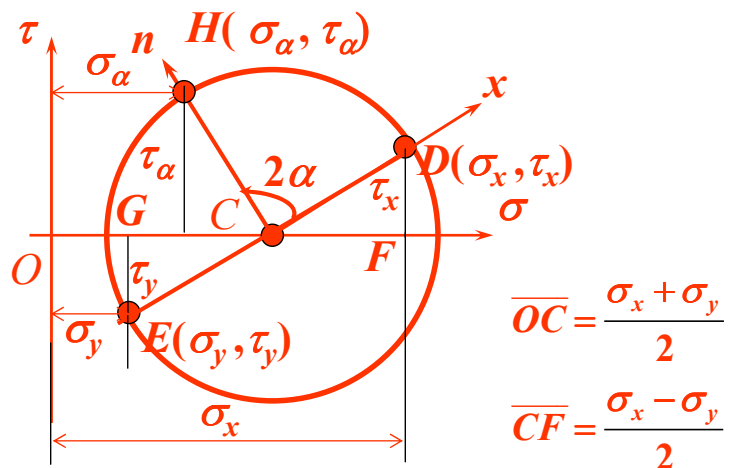
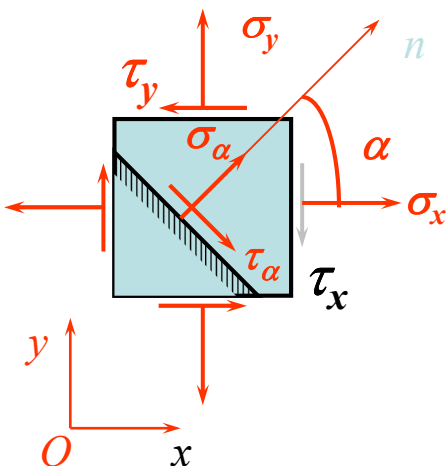
圆心： $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$ 半径： $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2}$

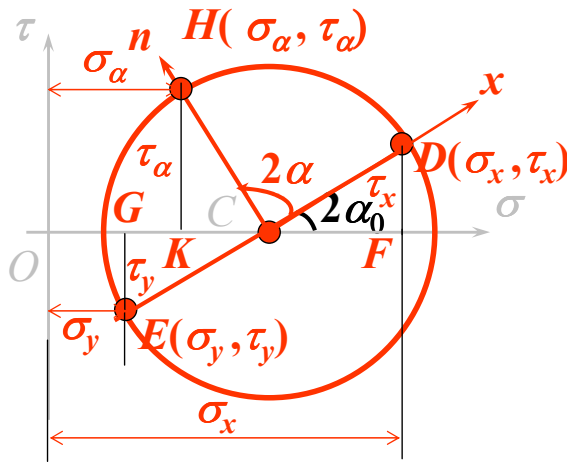
应力圆的画法

圆心： $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$

半径： $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2}$

- ① 建立应力坐标系 $\sigma - \tau$
- ② 画出点 $D(\sigma_x, \tau_x)$ 和 $E(\sigma_y, \tau_y)$;
- ③ 圆心： DE 与 σ 轴的交点 C ;
- ④ 半径： $CD = CE$;
- ⑤ 以 C 为圆心，以 CD 为半径画圆。





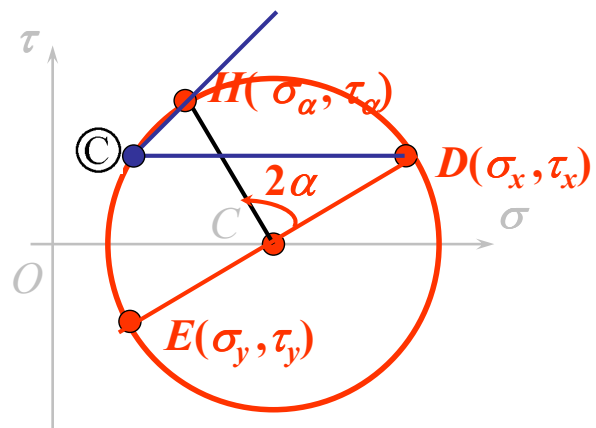
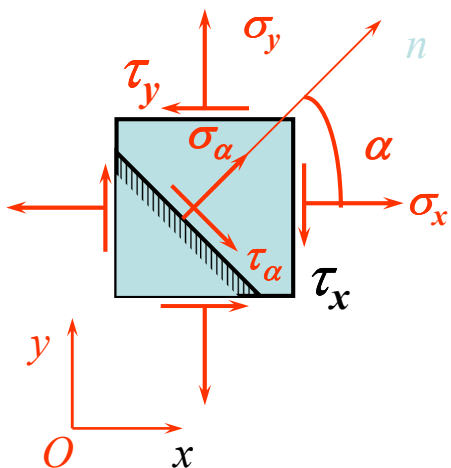
证明

$$\angle DCF = 2\alpha_0$$

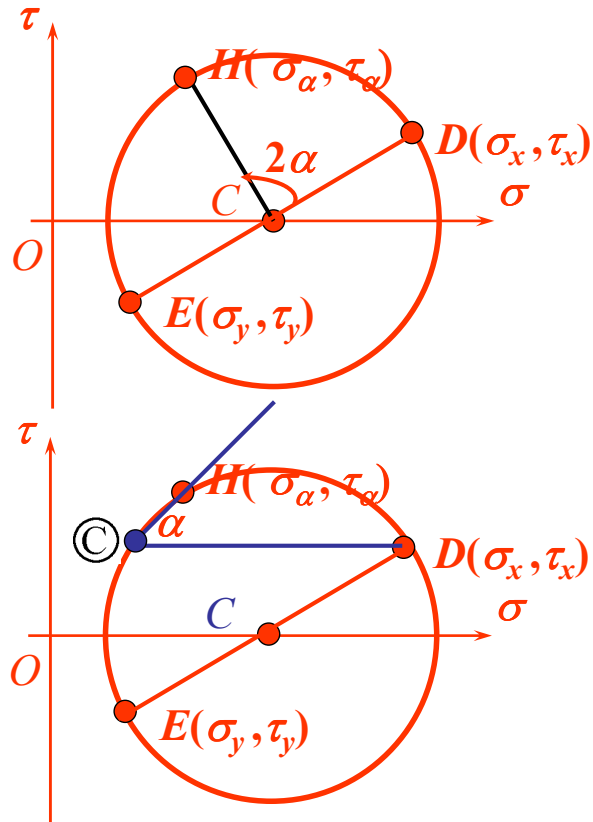
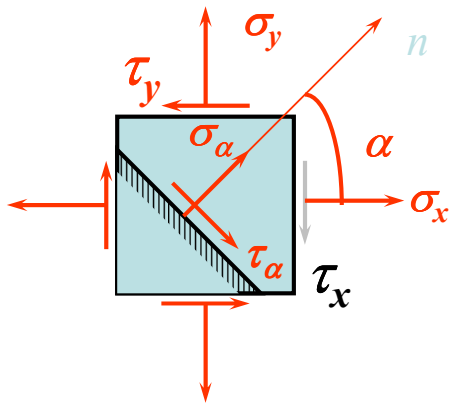
$$\begin{aligned} \sigma_H &= \overline{OK} = \overline{OC} + \overline{CH} \cos(2\alpha_0 + 2\alpha) \\ &= \overline{OC} + \overline{CD}(\cos 2\alpha_0 \cos 2\alpha - \sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha) \\ &= \overline{OC} + \overline{CF} \cos 2\alpha - \overline{DF} \sin 2\alpha \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \\ &= \sigma_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_H &= \overline{CH} \sin(2\alpha_0 + 2\alpha) = \overline{CD}(\sin 2\alpha_0 \cos 2\alpha + \cos 2\alpha_0 \sin 2\alpha) \\ &= \overline{DF} \cos 2\alpha + \overline{CF} \sin 2\alpha = \tau_x \cos 2\alpha + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha = \tau_\alpha \end{aligned}$$

从应力圆中的点 $D(\sigma_x, \tau_x)$ 作一水平线与应力圆交于圆上另一点，该点的坐标为 $D(\sigma_y, \tau_x)$ ，称为应力圆的主点。



应力圆法求单元体中任一截面的应力 (两种作法)



材料力学

单元体与应力圆的对应关系

(1) 点与面对应关系

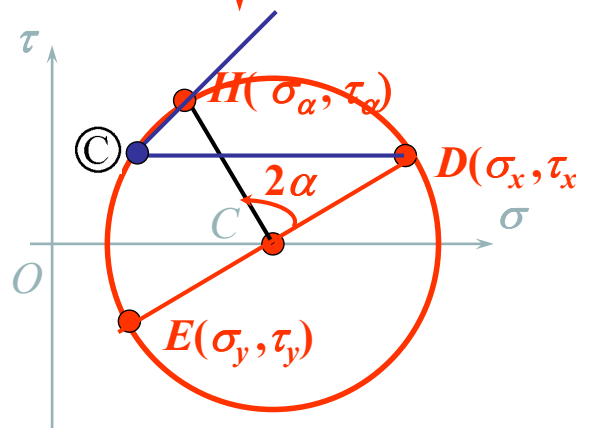
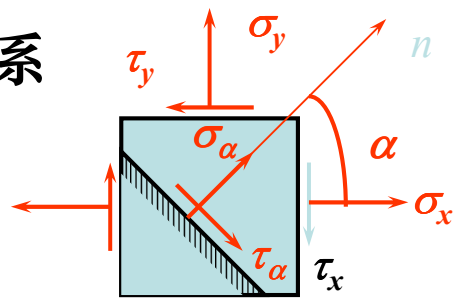
- 应力圆上的点的坐标值
- 单元体内相应截面的应力值

(2) 二倍角与转向对应关系

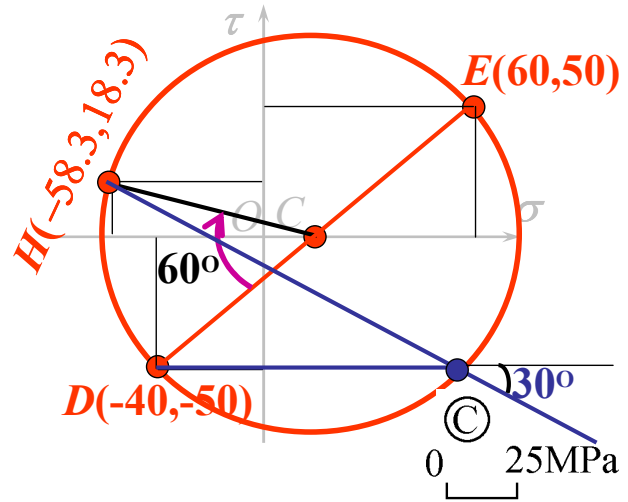
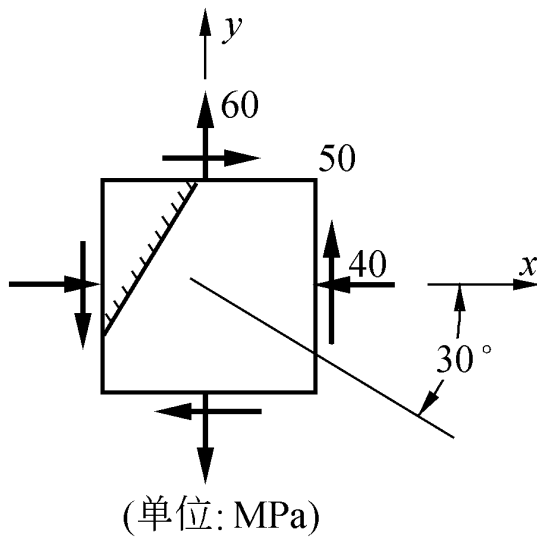
- 单元体上两截面夹角 α
- 应力圆相应点所对应的圆心角 2α
- 法线 \leftrightarrow 半径 转向相同

(3) 应力圆上主点

- 与圆周上任一点联线的方位
- 单元体内与该点应力值相应作用面的法线方位

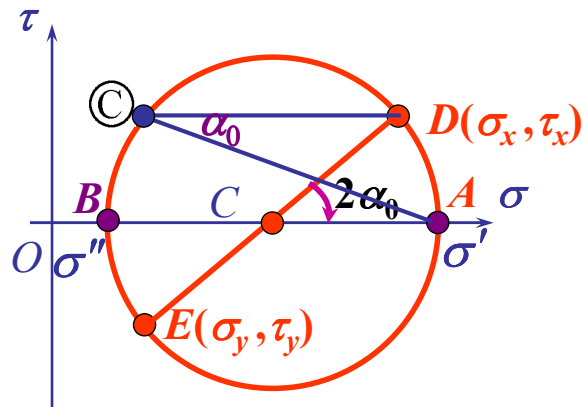
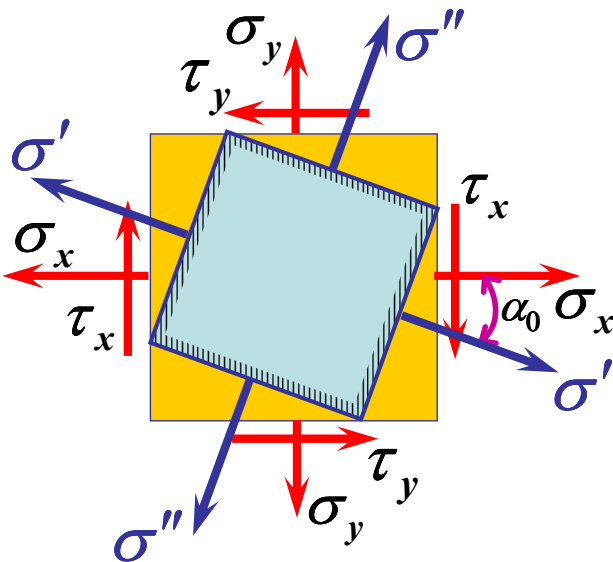


• 例6-3 用应力圆法求解例6-2。

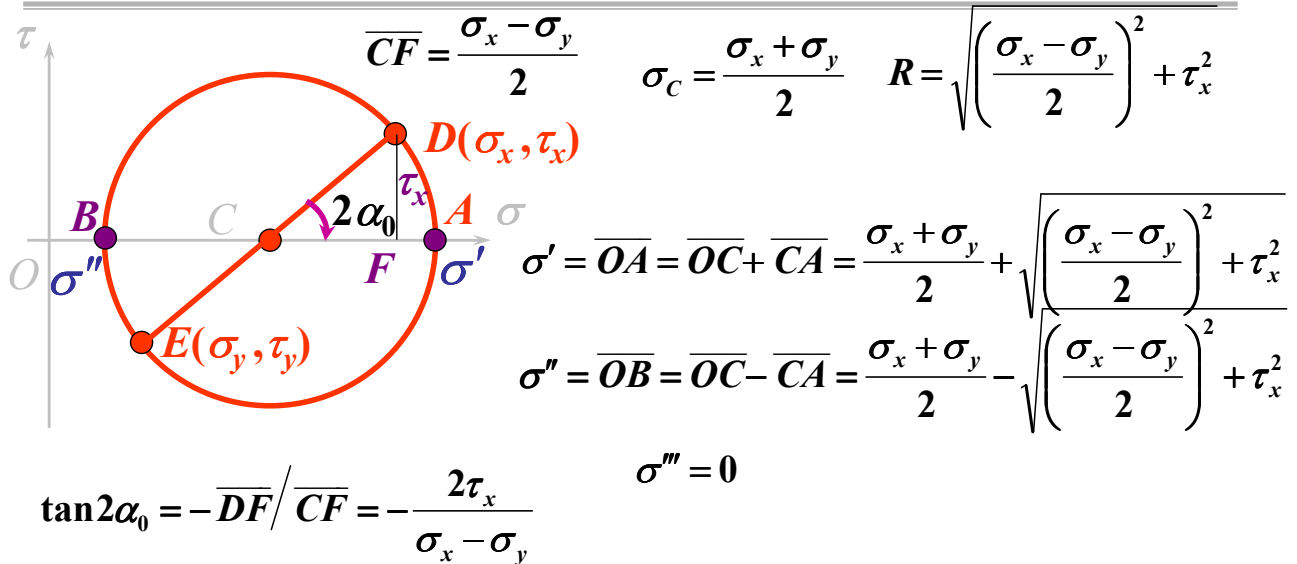


• 6.2.2 主平面与主应力

- 主平面：单元体中切应力为零的截面。
- 主应力：主平面上的正应力



材料力学



•主应力大小：按其代数值依次表示 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$\sigma_1 = \max(\sigma', \sigma'', \sigma''')$ $\sigma_3 = \min(\sigma', \sigma'', \sigma''')$

•主平面方位：

由x截面顺时针转 α_0 至主平面

$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$

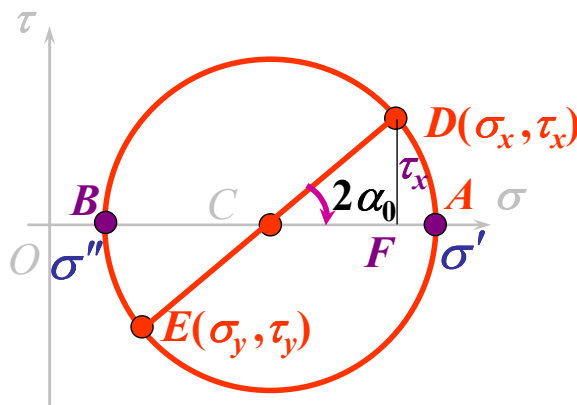
材料力学



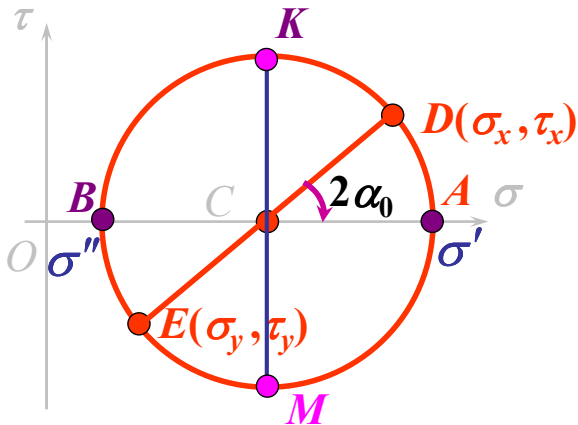
回顾：两个主应力与两个主平面的对应关系

若 $\sigma_x \neq \sigma_y$ ， σ' （即 σ_{\max} ）偏近 σ_x 和 σ_y 中代数值较大者。

若 $\sigma_x = \sigma_y$ ，对 $\tau_x > 0$ ， σ' （即 σ_{\max} ）与x轴夹角 $\alpha_0 = -45^\circ$ ；
对 $\tau_x < 0$ ， σ' （即 σ_{\max} ）与x轴夹角 $\alpha_0 = 45^\circ$ 。



• 6.2.3 面内最大切应力

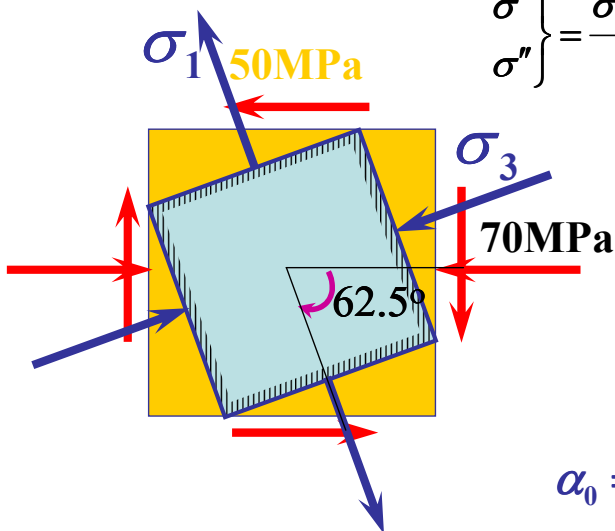


$$\tau' = \pm \frac{\sigma' - \sigma''}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

- 最大切应力方位：
与主应力所在截面成45°角

- 例6-4 构件中的某一点的应力状态如图。试确定主应力的_{大小及方位。}

解： $\sigma_x = -70MPa$ $\sigma_y = 0$ $\tau_x = 50MPa$



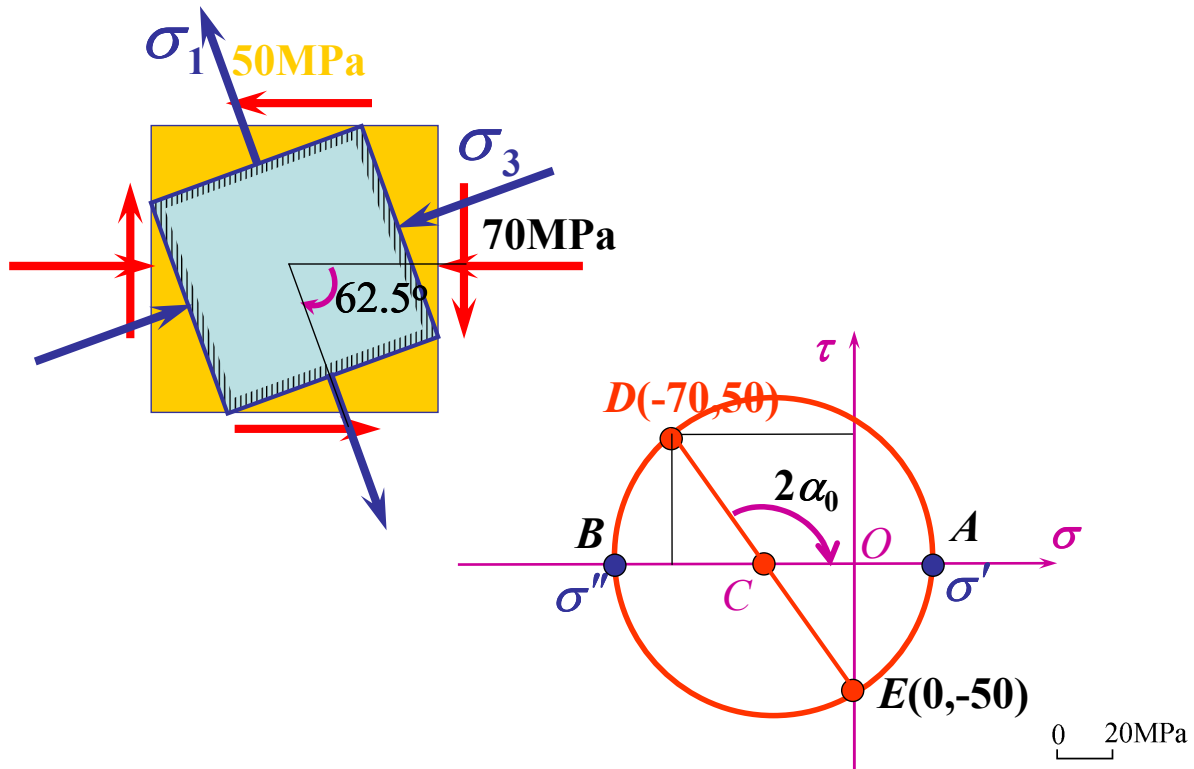
$$\left. \begin{matrix} \sigma' \\ \sigma'' \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \begin{cases} 26MPa \\ -96MPa \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 26MPa$$

$$\sigma_2 = 0$$

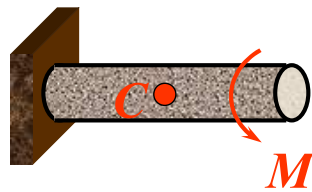
$$\sigma_3 = -96MPa$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = -62.5^\circ$$



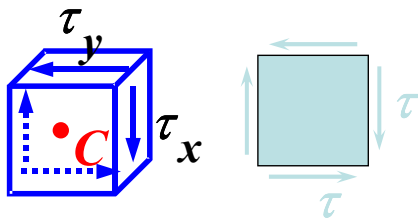
例 分析受扭构件的破坏规律。

解：① 确定危险点并画其单元体



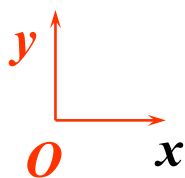
$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

$$\tau_x = \tau_y = \tau = \frac{T}{W_P}$$



② 求极值应力

$$\begin{cases} \sigma' \\ \sigma'' \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \pm \tau$$



确定主应力

$$\sigma_1 = \tau \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -\tau$$

确定主平面

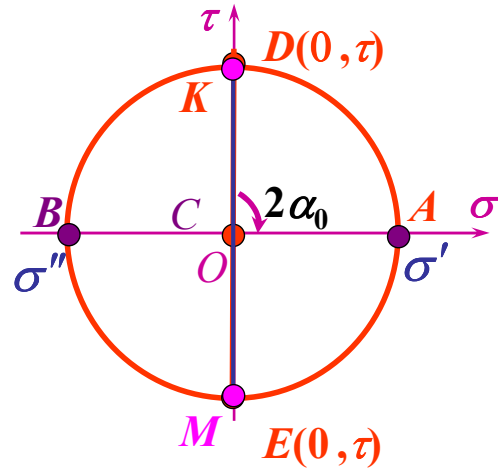
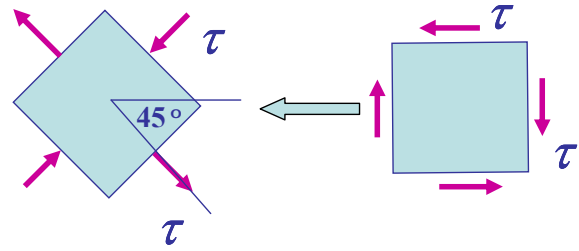
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = -\infty$$

$$\therefore \alpha_0 = -45^\circ$$

极值剪应力

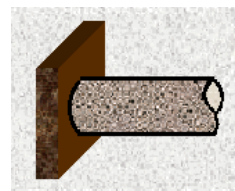
$$\begin{cases} \tau' \\ \tau'' \end{cases} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \pm \tau$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = 0 \therefore \alpha_1 = 0$$



③ 破坏分析

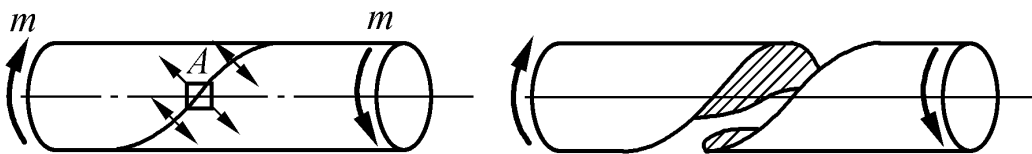
铸铁: 45°螺旋曲面破坏, 拉断



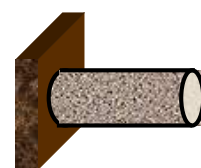
铸铁

$$\sigma_{lb} = 98 \sim 280 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yb} = 640 \sim 960 \text{ MPa}; \tau_b = 198 \sim 300 \text{ MPa}$$



低碳钢: 横截面破坏, 剪坏



低碳钢

$$\sigma_s = 240 \text{ MPa}; \tau_s = 200 \text{ MPa}$$

平面应力状态分析 (小结)

• 解析法

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

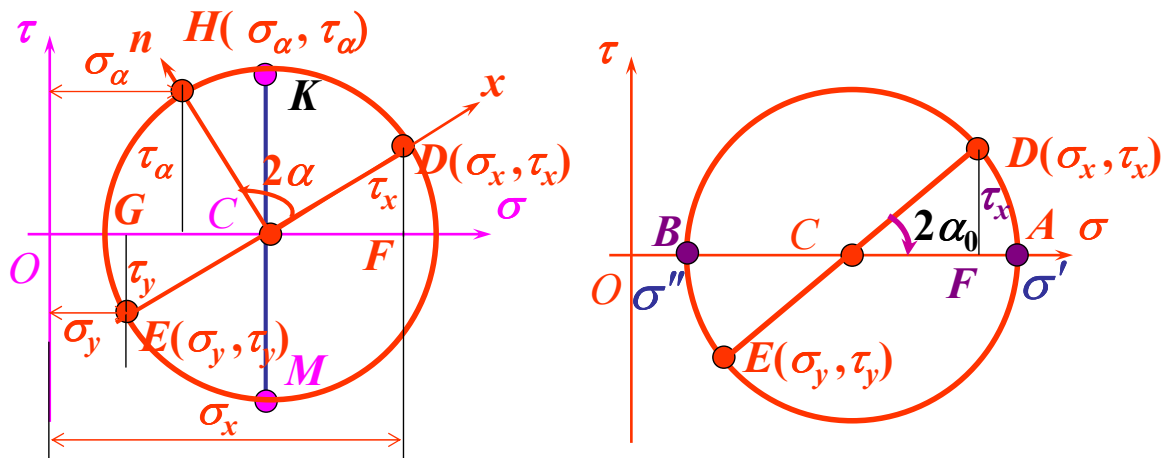
$$\begin{cases} \sigma' \\ \sigma'' \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(-\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

$$\begin{cases} \tau' \\ \tau'' \end{cases} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_x} \right)$$

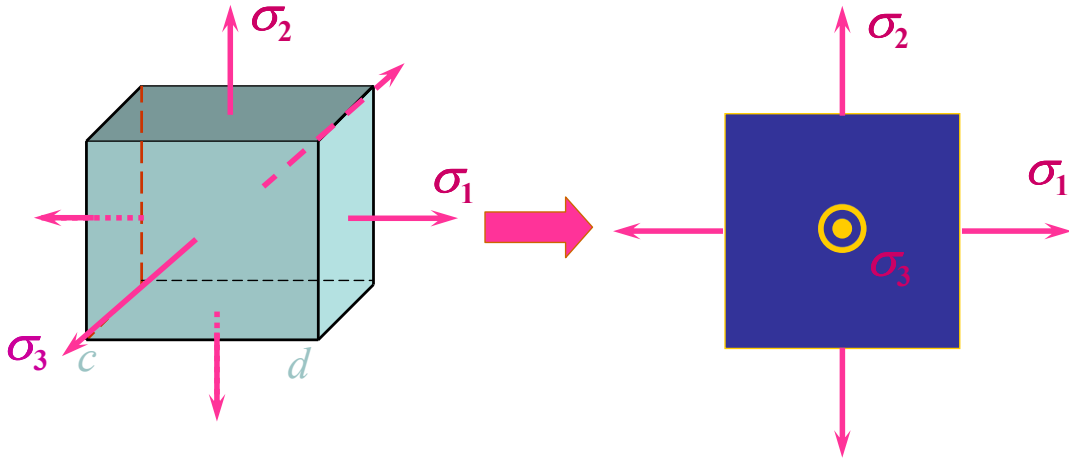
• 应力圆法



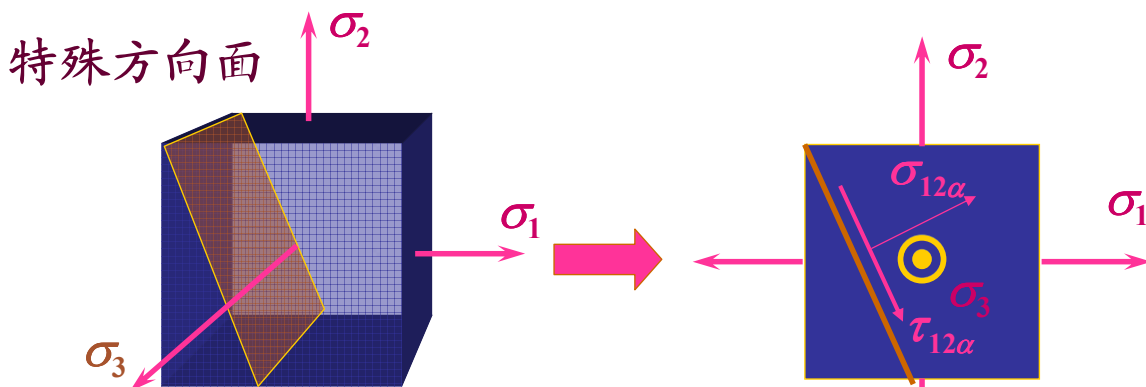
例题：已知某一点的应力状态，确定主应力大小及方位。

6.3 三向应力状态分析

- 三向应力状态



三向应力状态下任意斜截面上的应力-解析法



平面应力状态

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

在三组特殊方向面中

$$\sigma_{12\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_{12\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{23\alpha} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha \quad \tau_{23\alpha} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{13\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha \quad \tau_{13\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha$$

在三组特殊方向面中都有各自的面内最大应力,即:

$$\sigma_{12 \max} = \sigma_1, \sigma_{12 \min} = \sigma_2, \tau_{12 \max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\sigma_{23 \max} = \sigma_2, \sigma_{23 \min} = \sigma_3, \tau_{23 \max} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$\sigma_{13 \max} = \sigma_1, \sigma_{13 \min} = \sigma_3, \tau_{13 \max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

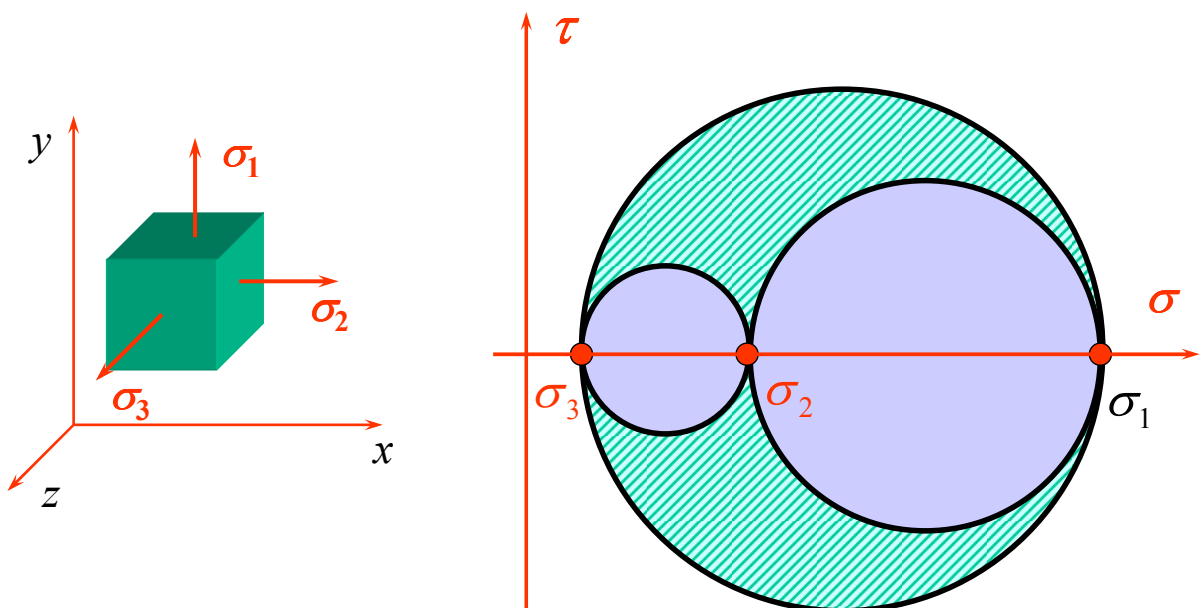
三向应力状态中最大应力

$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_3$$

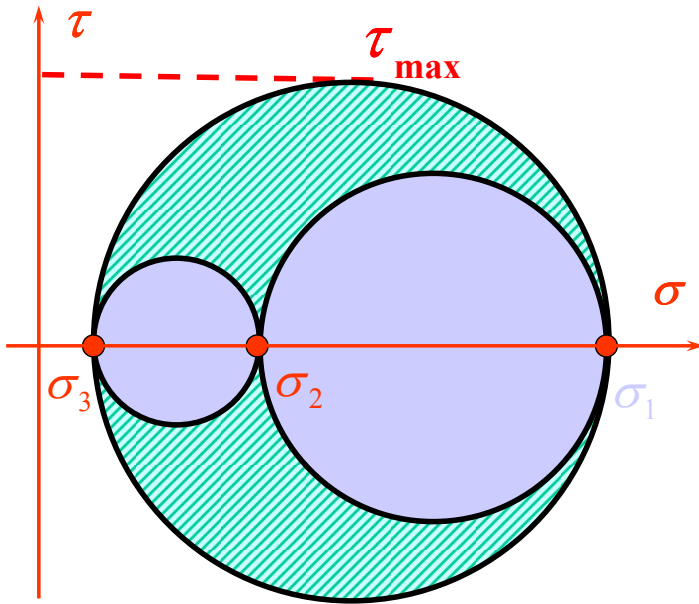
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

• 三向应力状态的应力圆



弹性理论证明, 单元体内任意一点任意截面上的应力都对应着应力圆上或阴影区内的一点。

• 最大应力

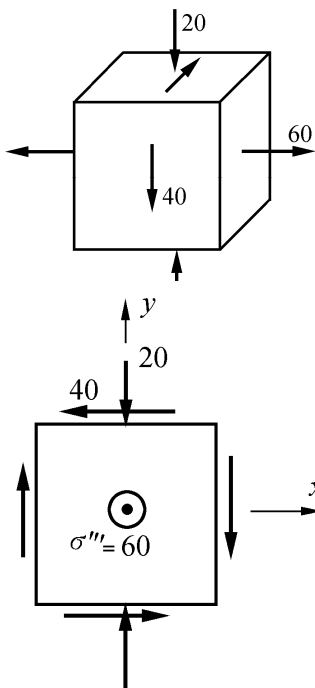


$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_3$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

• 例6-6 某点的应力状态如图。试求该点的主应力及最大切应力。



解: $\sigma''' = 60MPa$

在平面应力状态确定 σ' 和 σ''

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = -20MPa \quad \tau_x = 40MPa$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma' \\ \sigma'' \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \begin{cases} 31.23MPa \\ -51.23MPa \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 60MPa \quad \sigma_2 = 31.23MPa \quad \sigma_3 = -51.23MPa$$

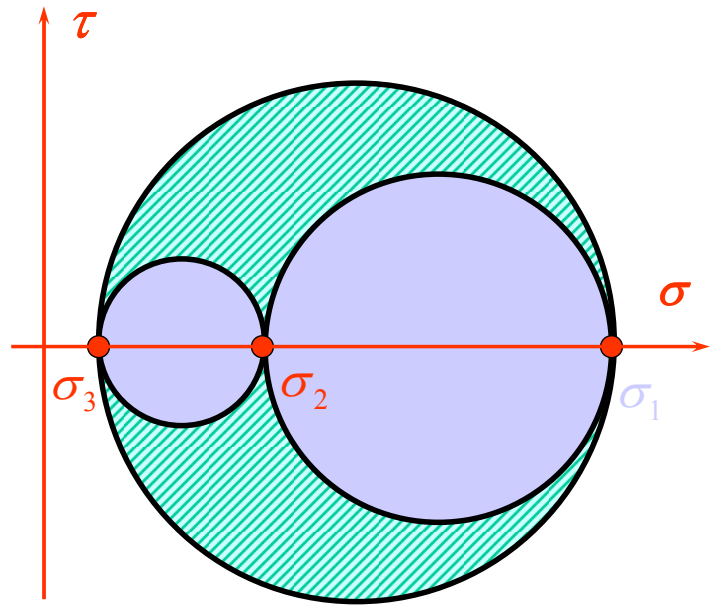
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 55.6MPa$$

三向应力状态分析 (小结)

$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_3$$

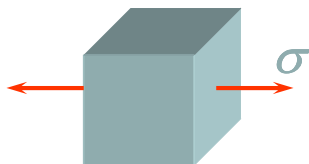
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



例题： 已知某一点的应力状态，确定主应力及最大切应力。
(注意：转化为平面应力状态问题分析)

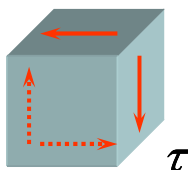
6.4 广义胡克定律

单向应力状态的应力--应变关系



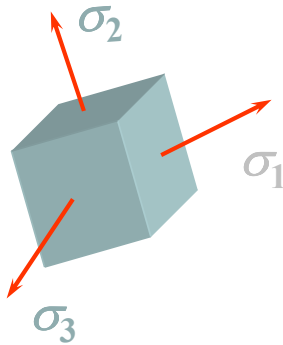
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \varepsilon' = -\frac{\mu}{E} \sigma$$

纯剪应力状态的应力--应变关系



$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

主应力 --- 主应变关系



$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 在 1, 2, 3 方向引起的线应变:

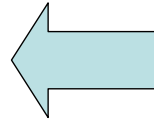
$$\frac{\sigma_1}{E}, -\nu \frac{\sigma_1}{E}, -\nu \frac{\sigma_1}{E}$$

$$-\nu \frac{\sigma_2}{E}, \frac{\sigma_2}{E}, -\nu \frac{\sigma_2}{E}$$

$$-\nu \frac{\sigma_3}{E}, -\nu \frac{\sigma_3}{E}, \frac{\sigma_3}{E}$$

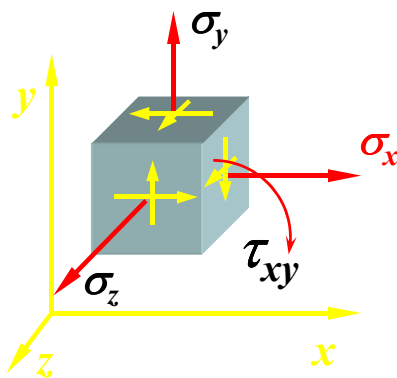
广义胡克定律

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right.$$



叠加, 得 1, 2, 3 方向的线应变

一般应力状态下的应力 --- 应变关系



依叠加原理, 得:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right.$$

广义胡克定律

- **例6-7** 承受内压 p 的圆筒形薄壁容器的平均直径为 $D=500\text{mm}$ ，壁厚为 $\delta=10\text{mm}$ 。容器材料的 $E=200\text{GPa}$ ， $\nu=0.25$ 。现容器表面用电阻应变片测得环向应变 $\varepsilon''=350 \times 10^{-6}$ ，试求其所受的内压力 p 。

解： $\sigma_1 = \sigma'' = \frac{pD}{2\delta}$ $\sigma_2 = \sigma' = \frac{pD}{4\delta}$ $\sigma_3 = 0$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'' = 350 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{E} \left(\frac{pD}{2\delta} - \nu \frac{pD}{4\delta} \right)$$

$p = \frac{4\delta E \varepsilon_1}{D(2 - \nu)} = 3.2 \text{MPa}$

广义胡克定律（小结）

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{array} \right.$$

例题： 某应变值可测，各应力值表达式可得（常包含未知量），通过广义胡克定律列方程，求未知量。

6.5* 一般应力状态下的应变比能

- **弹性变形能或弹性应变能**：由于弹性变形而积蓄在弹性体内的应变能。
- 不考虑能量损耗，积蓄在弹性体内的应变能在数值上应等于荷载在弹性体变形过程中所做的功。

$$V_{\varepsilon} = W$$

• 线弹性体的应变能

以静载方式给某一弹性体施加荷载从零逐渐到 F_P

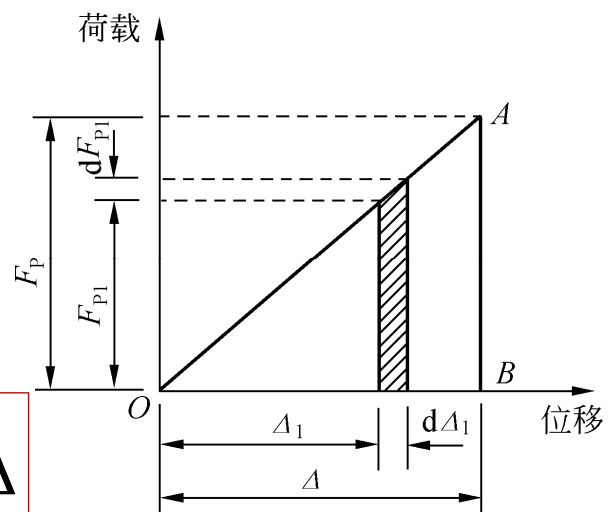
某时刻，作用在弹性体上的荷载 F_{P1} 因位移 $d\Delta_1$ 而做功

$$dW = F_{P1} \cdot d\Delta_1$$

整个过程中外力所做的功

$$\begin{aligned} W &= \int dW = \int_0^{\Delta} F_{P1} \cdot d\Delta_1 \\ &= \int_0^{\Delta} \frac{F_P}{\Delta} \Delta_1 \cdot d\Delta_1 = \frac{1}{2} F_P \Delta \end{aligned}$$

弹性应变能 $V_{\varepsilon} = W = \frac{1}{2} F_P \Delta$



材料力学

• 复杂应力状态下的应变能密度

力 $\sigma_1 dydz, \sigma_2 dx dz, \sigma_3 dx dy$

位移 $\varepsilon_1 dx, \varepsilon_2 dy, \varepsilon_3 dz$

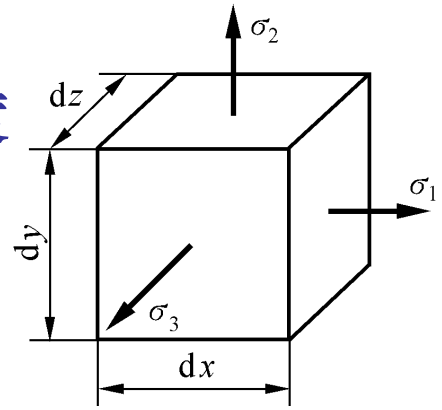
单元体的应变能

$$\begin{aligned} dV_\varepsilon = dW &= \frac{1}{2} \sigma_1 dydz \cdot \varepsilon_1 dx + \frac{1}{2} \sigma_2 dx dz \cdot \varepsilon_2 dy + \frac{1}{2} \sigma_3 dx dy \cdot \varepsilon_3 dz \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) dx dy dz = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) dV \end{aligned}$$

应变能密度 (单位体积内的应变能)

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]$$



材料力学

• 体应变

原体积 $dV = dx dy dz$

变形后体积

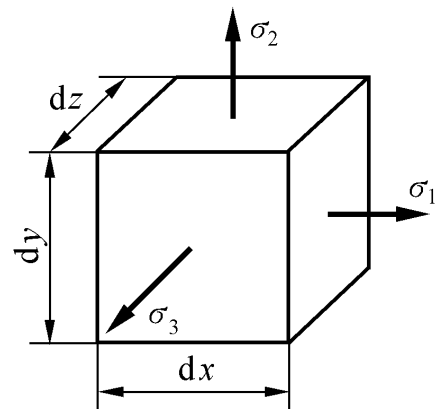
$$\begin{aligned} dV' &= (1 + \varepsilon_1) dx \cdot (1 + \varepsilon_2) dy \cdot (1 + \varepsilon_3) dz \\ &= (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) dV \\ &\cong (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) dV \end{aligned}$$

体应变 (单位体积的体积改变)

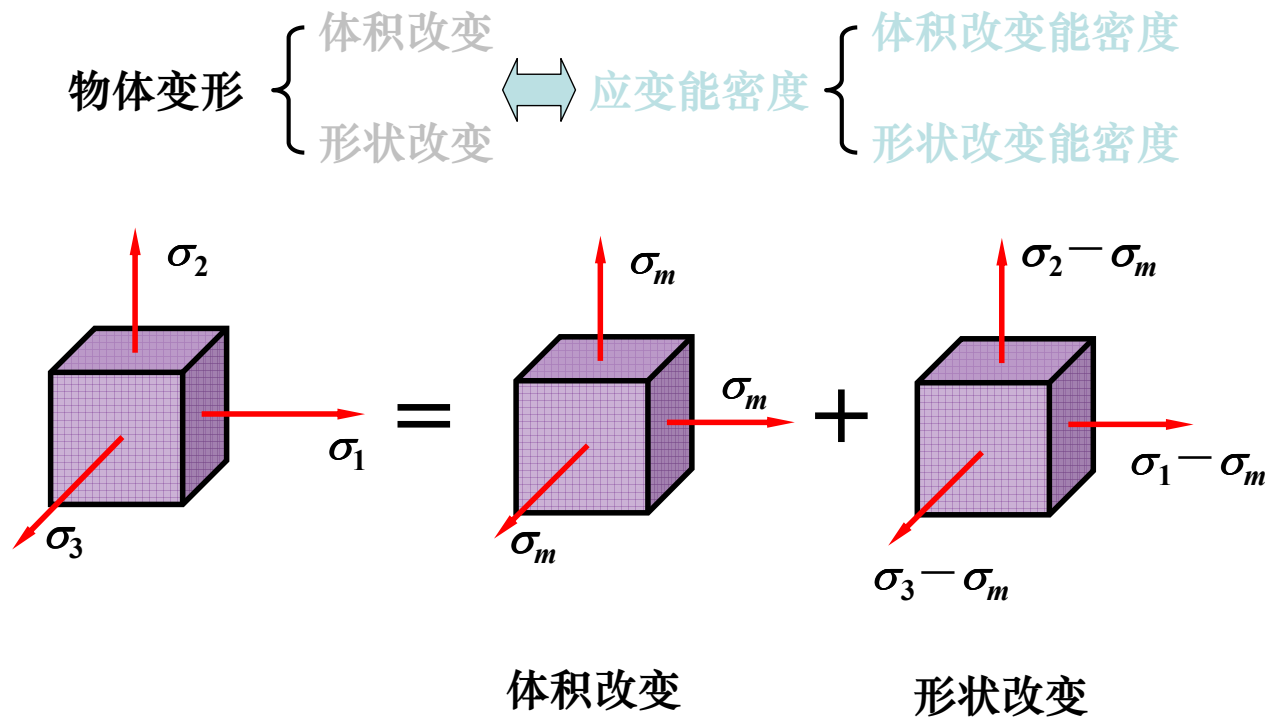
$$\theta = \frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\theta = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \sigma_m = \frac{\sigma_m}{K}$$

平均应力 $\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ 体积弹性模量 $K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$



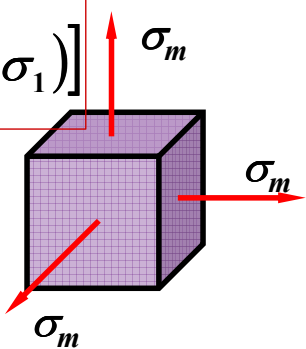
• 体积改变能密度与形状改变能密度



$$U_\varepsilon = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

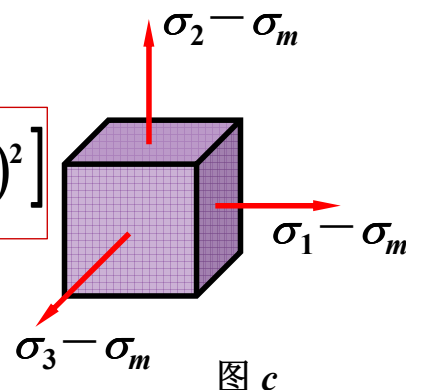
体积改变能密度

$$U_V = \frac{1}{2E} (3 - 6\nu)\sigma_m^2 = \frac{(1 - 2\nu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$



形状改变能密度 $\theta = \frac{\sigma'_m}{K}$

$$U_d = \frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$



$\Rightarrow U_\varepsilon = U_V + U_d$

6.6 工程中常用的四种强度理论

- 强度理论的概念
- 常用的四种强度理论
- 强度理论的应用

- 强度理论的概念

简单应力状态的强度条件容易建立

- 基本变形下的强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{|F_N|_{\max}}{A} \leq [\sigma] \quad (\text{拉压})$$

$$\tau_{\max} = \frac{|T|_{\max}}{W_p} \leq [\tau] \quad (\text{扭转})$$

- 许用应力通过试验测定

复杂应力状态下强度条件如何建立?

∞ 应力状态的多样性

∞ 试验的复杂性

方法：找出在各种应力状态下材料进入危险状态的共同标志，从简单应力状态的实验结果建立复杂应力状态的强度条件。

强度理论：提出了一些假说，推测材料在复杂应力状态下失效或破坏的主要原因。

按照这些强度理论，可以利用简单应力状态的实验结果，建立复杂应力状态下的**强度条件**。

材料的破坏形式：

(1)**脆性断裂**：在没有明显的塑性变形情况下发生突然断裂；

(2)**塑性屈服**：材料产生显著的塑性变形而使构件丧失正常的工作能力。

关于**断裂**的强度理论

关于**屈服**的强度理论



最大拉应力理论

最大拉应变理论

最大切应力理论

形状改变能密度理论

• 最大拉应力理论（第一强度理论）

引起材料断裂的主要因素是最大拉应力，不论材料处于何种应力状态，只要最大拉应力达到材料单向拉伸断裂时的最大拉应力即强度极限，材料就发生断裂破坏。

1、断裂条件： $\sigma_1 = \sigma_b ; (\sigma_1 > 0)$

2、强度条件： $\sigma_1 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b} ; (\sigma_1 > 0)$

3、适用范围：适用于破坏形式为脆断的构件。

- 较好解释铸铁、石料、混凝土等脆性材料在单向拉伸、扭转或双向受拉时的破坏。
- 对无拉应力的应力状态不适用；未考虑其他两个主应力影响。

• 最大拉应变理论（第二强度理论）

引起材料断裂的主要因素是最大拉应变，不论材料处于何种应力状态，只要最大拉应变达到材料单向拉伸断裂时的最大拉应变值，材料就发生断裂破坏。

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_b}{E}$$

1、断裂条件： $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1u} ; (\varepsilon_1 > 0) \implies \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b$

2、强度条件： $\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$

3、适用范围：适用于破坏形式为脆断的构件。

- 解释石料、混凝土材料受轴向压缩时纵向开裂的破坏现象。
- 只与少数材料的试验结果相吻合，在工程实践中应用较少。

• 最大切应力理论（第三强度理论）

引起材料屈服的主要因素是最大切应力，不论材料处于何种应力状态，只要最大切应力达到材料单向拉伸屈服时的最大切应力值，材料就发生屈服破坏。

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_s}{2} = \tau_s$$

1、屈服条件： $\tau_{\max} = \tau_s \longrightarrow \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$

2、强度条件： $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$

3、适用范围：适用于破坏形式为屈服的构件。

- 对于许多工程塑性材料与试验结果很接近，在工程中广泛应用。
- 未考虑第二主应力的影响。

• 形状改变能密度理论（第四强度理论）

引起材料屈服的主要因素是形状改变能密度，不论材料处于何种应力状态，只要形状改变能密度达到材料单向拉伸屈服时的形状改变能密度，材料就发生屈服破坏。

$$v_d = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_s^2 = v_{ds}$$

1、屈服条件： $v_d = v_{ds} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_s$

2、强度条件： $\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$

3、适用范围：适用于破坏形式为屈服的构件。

- 较全面地反映了各个主应力的影响。
- 对于多数塑性材料，比最大切应力理论更符合试验结果。
- 最大切应力理论表达式简单，这两个理论都得到了广泛应用。

- 强度条件的统一形式 $\sigma_{ri} \leq [\sigma] \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

$$[\sigma] = \left\{ \frac{\sigma_b}{n_b}, \frac{\sigma_s}{n_s} \right\} \quad \sigma_{ri} (i = 1, 2, 3, 4) \text{ — 相当应力,}$$

- 四个强度理论的相当应力

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{r1} = \sigma_1 \\ \sigma_{r2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 \\ \sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \end{array} \right.$$

强度理论的应用

- 强度计算的步骤

- 1、外力分析：确定所需的外力值。
- 2、内力分析：画内力图，确定可能的危险面。
- 3、应力分析：画危险面应力分布图，确定危险点并画出单元体，求主应力。
- 4、强度分析：选择适当的强度理论，计算相当应力，然后进行强度计算。

• 强度理论的选用

原则：由破坏形式确定

断裂

第一、二强度理论

屈服

第三、四强度理论

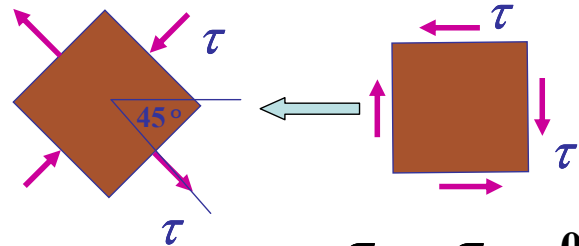
- 1、脆性材料：一般使用第一、二强度理论；当最大主应力小于等于零（三向压缩）时，使用第三、四强度理论。
- 2、塑性材料：一般使用第三、四强度理论；当最小主应力大于等于零（三向拉伸）时，使用第一、二强度理论；
- 3、简单变形时：一律用与其对应的强度准则。
拉压： $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ 扭转： $\tau_{\max} \leq [\tau]$
- 4、破坏形式还与温度、变形速度等有关！

- 保证所用的强度理论与危险点所处的复杂应力状态下发生的破坏形式相对应；
- 使用相应于该破坏形式的极限应力去确定许用应力。
- 强度理论的选用不单纯是个力学问题，而且与有关工程技术部门长期积累的经验，以及根据这些经验制定的一整套计算方法和规定的许用应力数值有关。

- 在纯剪切应力状态下的许用切应力与许用正应力的关系

主应力

$$\sigma_1 = \tau \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -\tau$$



$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

$$\tau_x = \tau_y = \tau$$

- 塑性材料 相当应力

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \tau - (-\tau) = 2\tau \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{3}\tau \leq [\sigma]$$

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad \tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

强度条件 $\tau_{\max} \leq [\tau]$

$$[\tau] \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad [\tau] \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

- 塑性材料

$$[\tau] \leq (0.5 \sim 0.6)[\sigma]$$

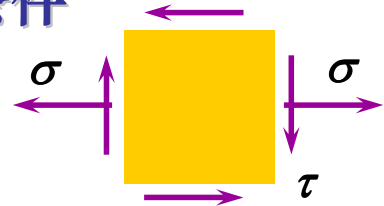
- 脆性材料

应用第一、二强度理论

$$[\tau] \leq (0.8 \sim 1.0)[\sigma]$$

• 一种常见的应力状态的强度条件

$$\sigma_x = \sigma, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_x = \tau$$



主应力

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

最大切应力理论

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

形状改变比能理论

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

强度理论 (小结)

- 强度条件 $\sigma_{ri} \leq [\sigma] \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

$$[\sigma] = \left\{ \frac{\sigma_b}{n_b}, \frac{\sigma_s}{n_s} \right\} \quad \sigma_{ri} (i = 1, 2, 3, 4) \text{ — 相当应力,}$$

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

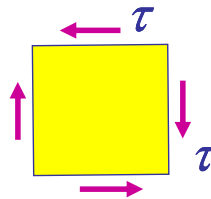
$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

纯剪切应力状态

$$\sigma_{r3} = 2\tau \leq [\sigma]$$

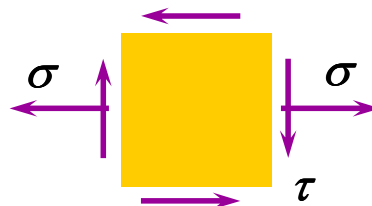
$$\sigma_{r4} = \sqrt{3}\tau \leq [\sigma]$$



一种常见的应力状态

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$



• 强度理论选用

由破坏形式确定

断裂

第一、二强度理论

屈服

第三、四强度理论

简单变形

拉压: $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ 扭转: $\tau_{\max} \leq [\tau]$