第 44 卷 第 12 期　　山 东 大 学 学 报（理 学 版）　　2009 年 12 月
Vol.44　No.12　　Journal of Shandong University(Natural Science)　　Dec. 2009

文章编号:1671-9352(2009)12-0067-04

α 次积分余弦函数的扰动定理

仓定帮[1],宋晓秋[2],陈藏[1]
(1.华北科技学院, 北京 101601; 2. 中国矿业大学理学院, 江苏 徐州 221008)

摘要:研究余弦函数的加法扰动定理,在两个不同的条件下,得到了 α 次积分余弦函数的扰动定理。
关键词:α 次积分余弦函数;扰动;线性算子
中图分类号:O177.2　　**文献标志码:**A

Perturbation theorems for α-times integrated cosine functions

CANG Ding-bang[1], SONG Xiao-qiu[2], CHEN Cang[1]
(1. North China Institute of Science and Techology, Beijing 101601;
2. Collage of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, Jiangsu, China)

Abstract: The addition perturbation theorems of α-times integrated cosine functions are studied, and the perturbation theorems are obtained under two different conditions.
Key words: α- times integrated cosine functions; perturbation; linearized operater

伴随着经典算子半群理论的发展,余弦算子函数的理论也获得了极大的充实。近年来,人们在关注正则算子半群研究的同时,也密切注视着余弦算子函数理论的拓展[1-7]。算子的扰动理论是研究微分方程的一个重要的工具,文献[8]研究了积分半群的扰动,知若 A 生成 n 次积分半群,算子 $B\in B(X)$ 满足 $BR(\lambda,A)=R(\lambda,A)B$($\lambda$ 充分大),则 $A+B$ 也生成一个 n 次积分半群;余弦函数有所谓的 Phillips-Miyadera 型加法扰动定理,文献[9]还将该定理推广到了 C 余弦函数的加法扰动;文献[10]讨论了 k 正则算子族的扰动问题,对积分半群和积分余弦函数的加法扰动也略有涉及。本文主要在以下两个条件探讨 α 次积分余弦函数的加法扰动问题:

(C_1) $D(A)\subseteq D(B)$,存在 $\lambda_0>\omega$, $M<1$ 使得 $\|BR(\lambda^2,A)\|\leqslant M$ 对所有的满足 $\mathrm{Re}\lambda=\lambda_0$ 的 λ 都成立;

(C_2) B 为稠定算子,存在 $\lambda_0>\omega$, $M<1$ 使得 $\|R(\lambda^2,A)Bx\|\leqslant M\|x\|$ 对所有的满足 $\mathrm{Re}\lambda=\lambda_0$ 的 λ 都成立,其中 $x\in D(B)$。

1　定义及引理

定义 1.1　设 A 是 X 中的线性算子,$\alpha\in\mathbf{R}^+$,A 称为 α 次积分余弦函数的生成元当且仅当存在常数 M, $\omega\geqslant 0$ 和强连续算子族 $T(t):[0,\infty)\to B(X)$,满足: $\|T(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}(t\geqslant 0)$, $(\omega^2,\infty)\subset\rho(A)$ 并且:

$$R(\lambda^2,A)=\lambda^{\alpha-1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)\mathrm{d}t,\lambda>\omega。$$

此时 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 称为由 A 生成的指数有界的 α 次积分余弦函数。

收稿日期:2009-03-30
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671205)
作者简介:仓定帮(1980-),男,助教,硕士研究生,研究方向为泛函分析.Email:cdbjd@163.com

引理 1.1[6] 设 A 是 Banach 空间 X 中的线性算子和存在 $M,\omega > 0,\alpha > -2$ 使得 $(\omega^2,\infty) \subset \rho(A)$，则当 $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ 和 $\| R(\lambda^2,A) \| \leqslant M |\lambda^\alpha|$ 时，A 生成 β 次积分余弦函数，$\beta > \alpha + 2$。

引理 1.2 令 A,B 是 X 中的线性算子，$D(A) \subseteq D(B)$，如果 $\lambda^2 \in \rho(A)$，$\| BR(\lambda^2,A) \| \leqslant 1$，则 $\lambda^2 \in \rho(A+B)$，并且 $R(\lambda^2,A+B) = R(\lambda^2,A)[I - BR(\lambda^2,A)]^{-1} = R(\lambda^2,A)\sum\limits_{k=0}^{\infty}[BR(\lambda^2,A)]^k$。

证明 因为 $\| BR(\lambda^2,A) \| \leqslant 1$，则 $I - BR(\lambda^2,A)$ 可逆，即有 $[I - BR(\lambda^2,A)]^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}[BR(\lambda^2,A)]^k$，经简单计算知：$R(\lambda^2,A+B) = R(\lambda^2,A)[I - BR(\lambda^2,A)]^{-1}$ 成立，所以 $\lambda^2 \in \rho(A+B)$，并且

$$R(\lambda^2,A+B) = R(\lambda^2,A)[I - BR(\lambda^2,A)]^{-1} = R(\lambda^2,A)\sum_{k=0}^{\infty}[BR(\lambda^2,A)]^k。$$

引理 1.3 令 A,B 是 X 中的线性算子，$\overline{D(B)} = X$，若存在常数 $M < 1$，使得 $\| R(\lambda^2,A)Bx \| \leqslant M\| x \|$ 对所有的 $x \in D(B)$ 和 $\lambda^2 \in \rho(A)$ 成立，则有以下结论：

(1) 存在 $A+B$ 的闭延拓 C 使得 $\rho(A) \subseteq \rho(C)$ 和 $R(\lambda^2,C) = [I - BR(\lambda^2,A)]^{-1}R(\lambda^2,A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}[BR(\lambda^2,A)]^k R(\lambda^2,A)$ 对所有的 $\lambda^2 \in \rho(A)$ 都成立；

(2) 若 A,B 是稠定算子，则 $D(A^*) \subseteq D(B^*)$ 和 $\| B^* R(\lambda^2,A^*) \| \leqslant M$ 对所有的 $\lambda^2 \in \rho(A)$ 都成立；

(3) 如果进而有 $\overline{D(A^*)} = X^*$，则(1)中的算子 C 满足：$Cx = (A^* + B^*)^* x, x \in D(C)$。

证明 (1) 对于 $\lambda^2 \in \rho(A)$，由题意知 $R(\lambda^2,A)B$ 可以延拓到 X 上的一个有界线性算子，并且 $\| \cdot \| \leqslant M$，仍记这种延拓为 $R(\lambda^2,A)B$，则 $I - R(\lambda^2,A)B$ 在 $B(X)$ 中可逆，记 $R_{\lambda^2} = [I - R(\lambda^2,A)B]^{-1}R(\lambda^2,A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}[BR(\lambda^2,A)]^k R(\lambda^2,A)$，定义 $D(C) = \mathrm{Ran}(R_{\lambda^2})$，$C = \lambda^2 I - R_{\lambda^2}^{-1}$，则有 $R_{u^2} = R(u^2,C)$，$R_{u^2} - R_{\lambda^2} = (u^2 - \lambda^2)R_{u^2}R_{\lambda^2}$，由此得 C 不依赖 λ，并且 C 是 $A+B$ 的闭延拓。

(2) 因为 A,B 是稠定算子，则其共扼算子 A^*,B^* 有定义，令 $y^* \in D(A^*)$，$\lambda^2 \in \rho(A)$，则存在 $x^* \in X^*$，$y^* = R(\lambda^2,A^*)x^*$，并且对于所有的 $x \in D(B)$ 有 $\langle y^*,Bx\rangle = \langle R(\lambda^2,A^*)x^*,Bx\rangle = \langle R(\lambda^2,A)^* x^*,Bx\rangle = \langle x^*,R(\lambda^2,A)Bx\rangle$，因此 $y^* \in D(B^*)$，并且 $\| B^* y^* \| = \| B^* R(\lambda^2,A^*)x^* \| \leqslant \| B^* R(\lambda^2,A)^* \| \| x^* \| = \| R(\lambda^2,A)B \| \| x^* \| \leqslant M\| x^* \|$。

(3) 由(2)知 $A^* + B^*$ 是闭算子，$\| B^* R(\lambda^2,A^*)x^* \| \leqslant M\| x^* \|$，由引理1.3知 $\lambda^2 \in \rho(A^* + B^*)$，并有 $R(\lambda^2,A^* + B^*) = R(\lambda^2,A^*)[I - B^* R(\lambda^2,A^*)]^{-1}$ 对每个 $\lambda^2 \in \rho(A)$ 都成立，显然又有 $R(\lambda^2,A^* + B^*) = R(\lambda^2,C)^*$。若 $\overline{D(A^*)} = X^*$，则 $(A^* + B^*)^*$ 存在，并有 $Cx = (A^* + B^*)^* x, x \in D(C)$。

2 扰动定理

定理 2.1 设 A 生成一个指数有界的 α 次积分余弦函数，B 是 X 中的线性算子，取 $\beta > \alpha + 2$，

(1) 若 (C_1) 成立，则 $A+B$ 生成一个 β 次积分余弦函数；

(2) 若 (C_2) 成立，则 $A+B$ 的闭延拓 C 生成一个 β 次积分余弦函数，并且当 A 和 A^* 为稠定算子时有 $Cx = (A^* + B^*)^* x, x \in D(C)$。

证明 (1) 因为 A 生成一个指数有界的 α 次积分余弦函数 $S(t)$ 有：

$$\| R(\lambda^2,A) \| \leqslant \left\| \lambda^{\alpha-1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)\mathrm{d}t \right\| \leqslant |\lambda|^{\alpha-1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\| S(t) \| \mathrm{d}t \leqslant$$
$$K|\lambda|^{\alpha-1}(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^{-1}, \mathrm{Re}\lambda \geqslant \lambda_0,$$

令 $\mathrm{Re}u > \lambda_0, \lambda = \lambda_0 + i\mathrm{Im}u$，

$$\begin{aligned} R(u^2,A) = R(\lambda^2,A)[I + (\lambda^2 - u^2)R(u^2,A)] \| BR(u^2,A) \| =& \\ \| BR(\lambda^2,A)[I + (\lambda^2 - u^2)R(u^2,A)] \| \leqslant& \\ \| BR(\lambda^2,A) \| \| [I + (\lambda^2 - u^2)R(u^2,A)] \| \leqslant& \end{aligned}$$

$$M\|[I+(\lambda^2-u^2)R(u^2,A)]\|\leqslant M[1+|\lambda^2-u^2|K|u|^{\alpha-1}(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^{-1}]=$$
$$M\left[1+\frac{|\lambda+u|}{|u|}\frac{|\lambda-u|}{\mathrm{Re}\lambda-\omega}K|u|^{\alpha}\right]\leqslant M[1+2K|u|^{\alpha}]\leqslant M[1+K'|u|^{\alpha}]。$$

由此知 $BR(\lambda^2,A)$ 满足弗拉格曼 – 林德勒夫定理,即 $\|BR(\lambda^2,A)\|\leqslant M$ 对所的 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant\lambda_0$ 都成立, $\mathrm{Re}\lambda^2\in\rho(A+B)$,此时 $R(\lambda^2,A+B)=R(\lambda^2,A)[I-BR(\lambda^2,A)]^{-1}=R(\lambda^2,A)\sum_{k=0}^{\infty}[BR(\lambda^2,A)]^k$,对所有的 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant\lambda_0$ 都成立。又由引理 1.3 有

$$\|R(\lambda^2,C)\|=\|[I-BR(\lambda^2,A)]^{-1}R(\lambda^2,A)\|\leqslant\|[I-BR(\lambda^2,A)]^{-1}\|\,\|R(\lambda^2,A)\|\leqslant$$
$$M|\lambda|^{\alpha}[I-BR(\lambda^2,A)]^{-1}]\leqslant M'|\lambda|^{\alpha}。$$

再由引理 1.1 知 $A+B$ 也生成一个 β 次积分余弦函数,其中 $\beta>\alpha+2$。

注　若由 A 生成的 α 次积分余弦函数 $S(t)$ 是指数无界的,但是有 $\left\|\int_0^t S(s)\mathrm{d}s\right\|\leqslant K\mathrm{e}^{\omega t}$,此时 $A+B$ 也生成一个 β 次积分余弦函数,其中 $\beta>\alpha+3$。事实上, $R(\lambda^2,A)=\lambda^{\alpha-1}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)\mathrm{d}t=\lambda^{\alpha}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t S(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$,

$$\|R(\lambda^2,A)\|=\left\|\lambda^{\alpha}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t S(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right\|\leqslant K|\lambda|^{\alpha}\left\|\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\omega t}\mathrm{d}t\right\|\leqslant K|\lambda|^{\alpha+1}(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^{-1},$$

再采用类似指数有界的证明方法即可。

(2) 因为 $D(B)$ 在 X 中稠密, $R(\lambda^2,A)B$ 可以延拓到 X 上的一个有界线性算子,并且 $\|\cdot\|\leqslant M$,仍然记这种延拓为 $R(\lambda^2,A)B$,用引理 1.3 代替引理 1.2,证明方法与(1)类似。

3　对 β 界的改进

定义 3.1　设 X 是 Banach 空间,若傅里叶变换可以延拓成从 $L^p(\mathbf{R},X)$ 到 $L^q(\mathbf{R},X)$ 上的有界线性算子,则称 X 具有傅里叶数 p,其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,p\in[1,2]$。

定理 3.1　设 X 是具有傅立叶级数 p 的 Banach 空间,令 A 是指数有界的 α 次积分余弦函数的生成元, B 是 X 中的线性算子,取 $\beta>\alpha+1+\frac{1}{p}$,则

(1) 若 A 稠定, (C_1) 成立,则 $A+B$ 生成一个 β 次积分余弦函数;

(2) 若 (C_2) 成立,则存在 $A+B$ 的闭延拓 C 生成一个 β 次积分余弦函数,并且当 A 和 A^* 为稠定算子时,有 $Cx=(A^*+B^*)^*x,x\in D(C)$。

证明　令 $p\in[1,2],\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,对 $x\in X,r\geqslant\lambda_0,s\in\mathbf{R}$ 有不等式:

$$\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{-rt}\|S(t)x\|)^p\mathrm{d}t\leqslant c_1\|x\|^p,\tag{1}$$

$$(r-is)^{1-\alpha}R((r-is)^2,A)x=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{ist}(\mathrm{e}^{-rt}S(t)x)\mathrm{d}t。\tag{2}$$

先证明(1)。因为 X 具有傅里叶数 p,则有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\|(r+is)^{1-\alpha}R((r+is)^2,A)x\|^q\mathrm{d}s\leqslant c_2\|x\|^q$,类似定理 2.1 的证明过程,用弗拉格曼 – 林德勒夫定理和引理 1.3 得存在 $A+B$ 的闭延拓 C 对于所有的 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant\lambda_0$, $R(\lambda^2,C)=[I-BR(\lambda^2,A)]^{-1}R(\lambda^2,A)$,即有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\|(r+is)^{1-\alpha}R((r+is)^2,C)x\|^q\mathrm{d}s\leqslant c_3\|x\|^q$,并且该不等式对所有的 $\lambda^{1-\alpha}R(\lambda^2,C)$ 都成立。令 $\gamma>\frac{1}{p}$,对 $t\geqslant0,x\in X$ 定义 $U(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\lambda=\lambda_0}\mathrm{e}^{\lambda t}\lambda^{-\gamma-1}[\lambda^{1-\alpha}R(\lambda^2,C)]\mathrm{d}\lambda$,则由 Holder's 不等式, $U(t)\in B(X)$。再根据 Riemann-Lebesgue-Lemma, $\{U(t)\}_{t\geqslant0}$ 是强连续的,并且 $\lambda^{1-\alpha}R(\lambda^2,C)=\lambda^{1+\gamma}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}U(t)\mathrm{d}t,\mathrm{Re}\lambda>\lambda_0$,证毕。

再证明(2)。在(1),(2)中用 $S(t)^*$ 和 x^* 分别代替 $S(t)$ 和 x,等式仍然成立。因为 X 具有傅里叶数 p, X^*

也具有傅立叶数 p,同样有$\int_{-\infty}^{+\infty}\|(r+is)^{1-\alpha}R((r+is)^2,A+B)x^*\|^q\mathrm{d}s\leqslant c\|x^*\|^q,r\geqslant\lambda_0,x^*\in X^*$。

令$\gamma>\frac{1}{p}$,对 $t\geqslant 0,x^*\in X^*$ 定义 $U^*(t)x^*=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\lambda=\lambda_0}\mathrm{e}^{\lambda t}\lambda^{-\gamma-1}[\lambda^{1-\alpha}R(\lambda^2,A+B)x^*]\mathrm{d}\lambda$,则$\{U^*(t)\}_{t\geqslant 0}\in B(X^*)$强连续,并且 $\lambda^{1-\alpha}R(\lambda^2,A+B)^*=\lambda^{\gamma+1}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}U^*(t)\mathrm{d}t,\mathrm{Re}\lambda>\lambda_0$。对 $x\in D(A)$,$t\in[0,\infty),U(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\lambda=\lambda_0}\mathrm{e}^{\lambda t}\lambda^{-\gamma-1}[\lambda^{1-\alpha}R(\lambda^2,C)]\mathrm{d}\lambda$。其中的积分是一致收敛的,因此 $t\to U(t)$ 是连续的,并且 $R(\lambda^2,A+B)x=\lambda^{\alpha+1+\gamma}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}U(t)x\mathrm{d}t$。

参考文献:

[1] WANG Shengwang. Mild integrated C-existence families [J]. Studios Math, 1995, 112(3):251-226.

[2] HIEBER M, HOLDERRIETH A, NEUBRANDER F. Regularized semigroups and systems of linear partial differential equation[J]. Ann Scuola Norm di Pisa, 1992, 19:363-379.

[3] DELAUBENFEL S R. Existence and uniqueness families for the abstract cauchy problem[J]. J London Math Soc, 1991, 44:310-338.

[4] 孙国正. α 次积分 C 半群与抽象 Cauchy 问题[J]. 数学学报 1999,4(42):757-762.

[5] 张寄洲. α 次积分余弦函数[J]. 数学物理学报,1997,17:33-38.

[6] CHUNG C K, SHAW S Y. C-cosine function and abstract Cauchy problem I [J]. Journal of Mathematica Analysis and Applications, 1997, 210:632-646.

[7] CHUNG C K, SHAW S Y. C-cosine function and abstract Cauchy problem II [J]. Journal of Mathematica Analysis and Applications, 1997, 210:647-659.

[8] ZHENG Quan. Perturbations and approximations of integrated semigroups[J]. Acta Mathematica Sinica, 1993, 9(3):252-260.

[9] 郑权,雷岩松. 指数有界的 C 余弦函数[J]. 系统科学与数学,1996,16(3):242-252.

[10] CARLOS Lizama, JUSTINO Sanchez. On perturbation of k-regularized resolving families[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2003, 7(2):217-227.

(编辑:陈丽萍)