第44卷 第2期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2009年2月
Vol.44 No.2 Journal of Shandong University(Natural Science) Feb. 2009

文章编号:1671-9352(2009)02-0033-06

多孔介质中控制释放耦合问题的有限元方法

佐春梅,程爱杰*
(山东大学数学学院, 山东 济南 250100)

摘要:多孔介质中的控制释放-迁移含有3个物理过程:溶质透过内边界(薄膜)释放到介质中;介质中流体的流动;溶质在介质中的扩散。控制释放由边界积分-常微分方程描述,溶质迁移由带第三类边界条件的对流扩散(含机械弥散)方程描述,速度场遵循Darcy定律,构造了一非线性耦合问题的混合元-Galerkin有限元半离散格式及全离散格式,利用先验估计理论进行收敛性分析。

关键词:混合有限元;控制释放;多孔介质;误差估计
中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A

The finite element method for controlled-release and spread of solute coupling with fluid velocity in a porous medium

ZUO Chun-mei, CHENG Ai-jie*
(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: The process of controlled-release and spread of a solute in porous media contains three physical processes: the process of release of the solute into the porous media through the border of the film, the flow of fluid and the process of the spread of the solute in porous media. The process of controlled-release was governed by a boundary integral-ordinary differential equation, while the process of spread was characterized by a convection-diffusion (with mechanical dispersion) equation with a boundary condition of the third type in the unknown velocity field, which follows Darcy's law. A mixed finite element-Galerkin finite element scheme was proposed for solving the coupled nonlinear systems. Convergence was analyzed by a priori estimate method.

Key words: mixed finite element method; controlled-release; porous medium; error estimate

0 问题的陈述

设区域 Ω 由一单连通区域去除一个所包含的单连通区域 Ω_0 而成。内边界记为 Γ_0,外边界分为上下两部分,分别记为 Γ_1,Γ_2。x 为空间变量,t 为时间变量。化肥透过胶囊薄膜 Γ_0 释放到 Ω 中,遵循 Fick 定律,释放过程中胶囊内溶质余量 M_c 由式(1)边界积分-常微分方程描述:

$$-\frac{\mathrm{d}M_c(t)}{\mathrm{d}t}=\int_{\Gamma_0}\gamma(c_c(M_c(t))-c(\cdot,t))\mathrm{d}s。\tag{1}$$

其中,γ 为综合传导系数,与胶囊材料、厚度等有关,应通过实验测得;c 为溶质浓度变量,c_c 为胶囊中溶质浓度,假定在胶囊内部溶质浓度是一致的,该浓度与胶囊内药品余量 $M_c(t)$ 相关。

收稿日期:2008-06-25
作者简介:佐春梅(1984-),女,硕士,研究方向为计算数学.Email: zuochm@126.com
*通讯作者:程爱杰(1965-),男,教授,研究方向为偏微分方程数值解法,科学与工程计算,油藏数值模拟.Email:ajcheng@sdu.edu.cn

$$c_c = c_c(M_c) = \begin{cases} c_s, & M_c \geqslant Q_0, \\ M_c/V_c, & M_c \leqslant Q_0, \end{cases} \tag{2}$$

$Q_0 = V_c c_s$, V_c 表示胶囊内腔容积, c_s 为饱和浓度,由于释放过程不可逆,故 $M_c(t)$ 单调减,将 $M_c(t) \geqslant Q_0$ 阶段称为零阶释放阶段, $M_c(t) \leqslant Q_0$ 阶段称为一阶释放阶段。

土壤是典型的多孔介质,假定介质中充满溶液(单相流体),实际环境中的水流场依赖于灌溉方案,降水规律。在此本文考虑单相流体是不可压缩的,水流场由方程(3)描述:

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = 0, u = -\dfrac{k(x)}{\mu_1(x)}(\nabla p - \nabla d(x)), \\ u \cdot n|_{\Gamma_0} = 0, u \cdot n|_{\Gamma_1} = g_1(x), u \cdot n|_{\Gamma_2} = g_2(x), \end{cases} \tag{3}$$

其中 $u = u(t,x)$ 为流体速度场, p 为压力。$k(x)$ 是渗透率, $\mu_1(x)$ 为黏度, $g_1(x)$, $g_2(x)$ 为已知函数, $d(x)$ 表示垂直坐标。

化肥(溶质)在土壤中的迁移是溶质在多孔介质 溶液中的对流扩散行为,溶质的迁移由对流扩散方程(4)描述:

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (uc) - \nabla \cdot (D(x,u)\nabla c) - \mu c = 0, \ x \in \Omega, t \in (0,T], \tag{4}$$

其中 $\phi = \phi(x)$ 为多孔介质孔隙度, $c = c(t,x)$ 为溶质浓度, μ 为降解和吸收综合系数,在此设为常数。在土壤水动力学中,水动力弥散起着非常重要的作用,

$$D = D(x,u) = \phi(d_m \boldsymbol{I} + d_l |u| E + d_t |u| E^{\perp}),$$

这里 d_m 为分子扩散系数, d_l 和 d_t 分别为纵向、横向弥散系数, $E = \left(\dfrac{u_i u_j}{|u|^2}\right)_{3\times3}$, $E^{\perp} = \boldsymbol{I} - E$, $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

$$\begin{cases} (D(u)\nabla c - uc) \cdot \vec{n} = 0, & (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \\ (D(u)\nabla c - uc) \cdot \vec{n} = \gamma(c_c - c), & (\Gamma_0), \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\vec{n}$ 为边界上单位外法向。初始条件为:

$$c(0,x) = c_0(x), \ x \in \Omega,$$

$$M_c(t)|_{t=0} = M_0。$$

本文讨论了控制释放 - 迁移 - 水流作用完全耦合模型在三维空间形态下数值求解的混合元 -Garlerkin 有限元方法;构造了该耦合系统的半离散格式和全离散格式,分析了收敛性,获得了拟最佳收敛结果和零阶释放条件下的最佳收敛结果。文献[1,2]讨论了控制释放 - 迁移完全耦合模型在三维空间形态下数值求解的有限元方法,其假定流场是已知的饱和流场。本文理论分析方法参考了混溶驱动问题的传统分析方法[3-5]。

1 控制释放耦合问题的半离散格式及其误差估计

在数值求解控制释放耦合问题时,压力不依赖于溶质浓度,本文用混合元方法数值求解压力方程。

1.1 压力方程的混合元法

从问题中提取出压力方程,先对压力方程的边界条件进行齐次化,假定 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 属于 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$,这里 $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,则通过迹定理知存在 $G(x) \in H(\mathrm{div};\ \Omega)$,使得:

$$G(x) \cdot n|_{\Gamma_0} = 0, \ G(x) \cdot n|_{\Gamma_1} = g_1, \ G(x) \cdot n|_{\Gamma_2} = g_2。$$

此时令 $\bar{u} = u - G(x)$,且给出如下空间:

$$V = H(\mathrm{div};\ \Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\},$$

$$V^0 = H(\mathrm{div};\ \Omega) \cap \{v \cdot n|_{\Gamma} = 0, \ \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2\},$$

$$W = L^2/\{\varphi \equiv \text{constant on } \Omega\}。$$

对任意的 $\alpha, \beta \in V$, $\varphi \in W$ 定义两个双线性形式:

$$\text{(a) } A(\alpha,\beta) = (\frac{\mu_1}{k}\alpha, \beta),$$

$$\text{(b) } B(\alpha,\beta) = -(\nabla \cdot \alpha, \varphi)。$$

则方程(3) 转化为求解$\{\bar{u},p\}$: $J=(0,T]\to V_0\times W$,满足:

$$\begin{cases}A(\bar{u},v)+B(v,p)=(\nabla\cdot d,\ v)-A(G,v), & \forall v\in V^0,\\ B(\bar{u},\varphi)=-(\nabla\cdot G(x),\varphi), & \forall\varphi\in W。\end{cases}\tag{6}$$

记 χ_h 是Ω 的拟一致正则剖分,最大单元直径为 h_p。取$V_h\subset V$, $W_h\subset W$是指数为 k 的 Raviart-Thomas 有限元空间(参考文献[5])。这些空间对任意的 $v\in V_h$, $w\in W_h$ 具有逼近性质及逆性质:

$$\inf_{v_h\in V_h}\|v-v_h\|\leqslant M\|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}h_p^{k+1},$$

$$\inf_{v_h\in V_h}\|v-v_h\|_V\leqslant M\{\|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}+\|\nabla\cdot v\|_{H^{k+1}(\Omega)}\}h_p^{k+1},$$

$$\inf_{w_h\in W_h}\|w-w_h\|_W\leqslant M\|w\|_{H^{k+1}(\Omega)}h_p^{k+1},\ \|v\|_{L^\infty}\leqslant Mh_p^{-1}\|v\|,$$

$$\|v\|_{W^1_\infty(\kappa)}\leqslant Ch_p^{-1}\|v\|_{L^\infty(\kappa)}。(\kappa\ 为任意一个网格单元)$$

从而方程(6) 的半离散形式如下:求解$\{\bar{u}_h,p_h\}$: $J=(0,T]\to V_h^0\times W_h$,满足

$$\begin{cases}A(\bar{u}_h,v_h)+B(v_h,p_h)=(\nabla\cdot d,v_h)-A(G(x),v_h), & \forall v_h\in V_h^0,\\ B(\bar{u}_h,w_h)=-(\nabla\cdot G(x),w_h), & \forall w_h\in W_h。\end{cases}\tag{7}$$

关于问题(6) 解的存在惟一性参看文献[6];关于问题(7) 解的存在惟一性可以参看文献[7] 且有如下误差估计:设$\{\bar{u},p\}$,$\{\bar{u}_h,p_h\}$ 分别为问题(6),(7) 的解,则

$$\|\bar{u}-\bar{u}_h\|_{L^\infty(J;V)}+\|p-p_h\|_{L^\infty(J;W)}\leqslant M\{\inf_{v_h\in V_h}\|\bar{u}-v_h\|_V+\inf_{w_h\in W_h}\|p-w_h\|_W\}\leqslant Mh_p^{k+1}。$$

再令 $u_h=\bar{u}_h+\tilde{G}(x)$,其中 $\tilde{G}(x)$ 满足方程:

$$\begin{cases}A(G(x)-\tilde{G}(x),v)+B(v,p-p_h)=0, & \forall v\in V_h^0,\\ B(G(x)-\tilde{G}(x),\varphi)=0, & \forall\varphi\in W_h,\end{cases}$$

且有 $\|G(x)-\tilde{G}(x)\|_{L^\infty(J;V)}\leqslant Mh_p^{k+1}$。从而

$$\|u-u_h\|_{L^\infty(J;V)}=\|(\bar{u}+G(x))-(u_h+\tilde{G}(x))\|\leqslant\|\bar{u}-\bar{u}_h\|_{L^\infty(J;V)}+\|G(x)-\tilde{G}(x)\|_{L^\infty(J;V)}\leqslant Mh_p^{k+1}。$$

1.2　半离散格式及其误差估计

本文先给出耦合问题的弱形式:设 V,V^0,W 为 1.1 节中所定义的,则压力方程等价于求解$\{u,p\}$: $J=(0,T]\to V\times W$,满足:

$$\begin{cases}A(u,v)+B(v,p)=(\nabla\cdot d,v), & \forall v\in V_0,\\ B(u,\varphi)=0, & \forall\varphi\in W。\end{cases}$$

溶质迁移方程的弱形式即求 c: $J\to H^1(\Omega)$ 满足:

$$\left(\phi\frac{\partial c}{\partial t},v\right)-(uc,\nabla v)+(D(u)\nabla c,\nabla v)-\mu(c,v)+\int_{\Gamma_0}\gamma(c_c(M_c)-c)v\,\mathrm{d}s=0,\ v\in H^1(\Omega)。\tag{8}$$

控制释放过程中溶质剩余量由积分获得:

$$M_c(t)=M_0-\int_0^t\int_{\Gamma_0}(\gamma(c_c(M_c(\tau))-c(\tau,x))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau。$$

耦合问题的半离散格式: Ω_h 为Ω 的拟一致正则剖分,最大单元直径记为 h_c, $m_h\in W^1_\infty$ 为 l 次分片多项式空间,具有如下逼近性质及逆性质:对 $z\in W_q^{l+1}(\Omega)$, $\chi\in m_h$,

$$\inf_{z_h\in m_h}\{\|z-z_h\|_{0,q}+h\|z-z_h\|_{1,q}\}\leqslant M\|z\|_{l+1,q}h_c^{l+1},$$

$$\|\chi\|_{W^1_\infty}\leqslant k_0h_c^{-1}\|\chi\|_1,\ \|\chi\|_{L^\infty}\leqslant k_1h_c^{-1}\|\chi\|。$$

溶质迁移方程的有限元半离散格式为:

$$\left(\phi\frac{\partial c_h}{\partial t},v_h\right)-(u_hc_h,\nabla v_h)+(D(u_h)\nabla c_h,\nabla v_h)-\mu(c_h,v_h)+\int_{\Gamma_0}\gamma(c_c(M_{c_h})-c_h)v_h\mathrm{d}s=0,\ v_h\in m_h,$$

其中 u_h 由上一节混合元方法获得,为速度精确解 u 的数值逼近。与半离散格式相对应,控制释放过程中溶质剩余量 $M_{c_h}(t)$ 亦由积分获得。

$$M_{c_h}(t) = M_0 - \int_0^t \int_{\Gamma_0} (\gamma(c_c(M_{ch}(\tau)) - c_h(\tau, x)) \mathrm{d}s \mathrm{d}\tau。$$

初始逼近采用定义的椭圆投影：$c_h(0) = \tilde{c}_0, M_{c_h}(0) = M_0$。$\tilde{c}_0$ 为初始浓度 $c_0(x)$ 在有限元空间 m_h 上的椭圆投影，不失一般性，假定 $c_0(x) = 0$。

假定 $0 < \phi_* \leqslant \phi(x) < 1$，并且矩阵 $D(u)$ 是正定的，即存在常数 D_* 使得

$$\zeta^T D(u) \zeta \geqslant D_* |\zeta|^2。$$

在此假定下，不难验证半离散格式问题解的存在惟一性，证明方法可参看文献[6]。为了收敛性分析的需要，定义如下椭圆投影：$\tilde{c}: t \in [0, T] \to m_h$，使

$$((D(u) \nabla (c - \tilde{c}), \nabla v_h) - (u(c - \tilde{c}), \nabla v_h) - \int_{\Gamma_0} \gamma (c - \tilde{c}) v_h \mathrm{d}s + ((\lambda - \mu)(c - \tilde{c}), v_h) = 0, \quad (9)$$

其中 λ 为足够大的正数以保证双线性形式的椭圆性，证明参看文献[1]。

为了后面收敛性分析，对控制释放耦合问题的精确解 $\{u, p, c\}$ 作一定的正则性假设：

$$p \in L^\infty(H^{k+1}),$$
$$u \in L^\infty(H^{k+1}(\mathrm{div})) \cap L^\infty(W^1_\infty) \cap W^1_\infty(L^\infty) \cap H^2(L^2),$$
$$c \in L^\infty(H^{l+1}) \cap H^1(H^{l+1}) \cap L^\infty(W^1_\infty) \cap H^2(L^2)。$$

引理 1　记 $\zeta = c - \tilde{c}$，对椭圆投影有如下误差估计：

$$\| \zeta \| + h \| \zeta \|_1 \leqslant M \| c \|_{l+1} h_c^{l+1},$$
$$\left\| \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right\| + h \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right\|_1 \leqslant M\left(\| c \|_{l+1} + \left\| \frac{\partial c}{\partial t} \right\|_{l+1} \right) h_c^{l+1}。$$

文中，M 为任意常数，不同处可取不同值；ε 为任意小的整数。

引理 2　设 $\tilde{c}$ 是上面定义的椭圆投影，则有：

$$\| \tilde{c} \|_{L^\infty} \leqslant M_1, \| \nabla \tilde{c} \|_{L^\infty} \leqslant M_2。$$

引理 3　设 $D = D(u) = \phi(d_m I + d_l |u| E + d_t |u| E^\perp)$ 为水动力弥散系数，则[3]

$$|((D(u) - D(u_h)) \nabla \tilde{c}, \nabla \xi)| \leqslant \| \nabla \tilde{c} \|_{L^\infty} \| u - u_h \| \| \nabla \xi \|。$$

定理 1　假定 $\phi(x)$ 有正的下界，矩阵 $D(u)$ 正定，$c(t)$ 和 $c_h(t)$ 分别为真解和有限元半离散格式解，则有误差估计：

$$\| c(t) - c_h(t) \|^2 + h \int_0^t \| \nabla (c(t) - c_h(t)) \|^2 \leqslant M(h_c^{2l+1} + h_p^{2k+2})。t \leqslant T, \quad (10)$$

该估计比最佳阶逼近低了半阶。特别地，在零阶释放阶段，有最优估计：

$$\| c(t) - c_h(t) \|^2 + h \int_0^t \| \nabla (c(t) - c_h(t)) \|^2 \leqslant M(h_c^{2l+2} + h_p^{2k+2}), \ t \leqslant t_0, \quad (11)$$

其中 M 不依赖 h，但依赖 c 及其导数以及时间范围 T。

证明　记 $c - c_h = (c - \tilde{c}) + (\tilde{c} - c_h) \equiv \zeta + \xi$，令弱形式与半离散方程相减，利用投影定义，并取 $v = v_h = \xi$，得误差方程：

$$(\phi \frac{\partial \xi}{\partial t}, \xi) + (D(u_h) \nabla \xi, \nabla \xi) = -(\phi \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \xi) + ((u - u_h)\tilde{c}, \nabla \xi) + (u_h \xi, \nabla \xi) + \mu(\xi, \xi) -$$
$$((D(u) - D(u_h)) \nabla \tilde{c}, \nabla \xi) + \lambda(\zeta, \xi) + \int_{\Gamma_0} \gamma \xi^2 \mathrm{d}s - \int_{\Gamma_0} \gamma (c_c(M_c) - c_c(M_{c_h})) \xi \mathrm{d}s。 \quad (12)$$

由矩阵 D 的正定性，Schwarz 不等式，迹不等式，三角不等式，及引理 1，引理 2 与引理 3 得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi \xi, \xi) + \frac{D^*}{2} \| \nabla \xi \|^2 \leqslant M \left\{ h_c^{2l+2} + h_p^{2k+2} + \left| \int_{\Gamma_0} \gamma (c_c(M_c) - c_c(M_{c_h})) \xi \mathrm{d}s \right| \right\}。$$

上述不等式两端同时关于时间从 0 到 t 积分，并利用 $\xi(0) = 0$ 得：

$$\| \xi(t) \|^2 + \int_0^t \| \nabla \xi \|^2 \mathrm{d}s \leqslant M(h_c^{2l+2} + h_p^{2k+2}) + M \int_0^t \| \xi(\tau) \|^2 \mathrm{d}\tau +$$

$$\int_0^t \left| \int_{\Gamma_0} \gamma(c_c(M_c) - c_c(M_{c_h}))\xi \mathrm{d}s \right| \mathrm{d}\tau。\tag{13}$$

由于释放是一个单向不可逆过程,故 $M_c(t)$ 和 $M_{c_h}(t)$ 对时间变量是单调递减的。因此存在 t_0, t_1,成为分别对应原问题和半离散问题的零阶释放与一阶释放阶段的临界点。

$$M_c(t_0) = M_0 - \int_0^t \int_{\Gamma_0} \gamma(c_c(M_c(\tau)) - c)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau,\tag{14}$$

$$M_{c_h}(t_1) = M_0 - \int_0^{t_1} \int_{\Gamma_0} \gamma(c_c(M_{c_h}(\tau)) - c_h)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau。\tag{15}$$

不失一般性,假定 $t_0 \leqslant t_1$,即在 $t \leqslant t_0$ 时,原问题和半离散问题均处于零阶释放阶段,此时

$$c_c(M_c(t)) - c_c(M_{c_h}(t)) = c_s - c_s = 0, t \leqslant t_0。\tag{16}$$

在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 时间段,原问题处于一阶释放阶段,半离散问题仍处于零阶释放阶段,则有:

$$c_c(M_c(t)) - c_c(M_{c_h}(t)) = \frac{M_c(t)}{V_c} - c_s,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

由于此时 $M_{c_h}(t) \geqslant Q_0 \equiv V_c c_s \geqslant M_c(t)$,故有

$$|c_c(M_c(t)) - c_c(M_{c_h}(t))| \leqslant \frac{1}{V_c}|M_c(t) - M_{c_h}(t)|,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1。$$

在 $t \geqslant t_1$ 时,原问题和半离散问题均处于一阶释放阶段,此时显然有

$$|c_c(M_c(t)) - c_c(M_{c_h}(t))| = \frac{1}{V_c}|M_c(t) - M_{c_h}(t)|,\ t \geqslant t_1。$$

令原控制释放方程与半离散问题的控制释放方程相减,得:

$$M_c(t) - M_{c_h}(t) = -\int_0^t \int_{\Gamma_0} \gamma(c_c(M_c) - c_c(M_{c_h}))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_0} \gamma(c - c_h)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau。\tag{17}$$

由此等式,利用前述不等式并注意到 Γ_0 测度有界,有

$$M_c(t) - M_{c_h}(t) \leqslant M\int_0^t |M_c(\tau) - M_{c_h}(\tau)| \mathrm{d}\tau + \int_0^t \left| \int_{\Gamma_0} \gamma(c - c_h)\mathrm{d}s \right| \mathrm{d}\tau。\tag{18}$$

由 Bellmann 不等式得

$$|M_c(t) - M_{c_h}(t)| \leqslant e^{MT}\int_0^t \left| \int_{\Gamma_0} \gamma(c - c_h)\mathrm{d}s \right| \mathrm{d}\tau。\tag{19}$$

考虑到释放迁移过程是在有限的时间$[0, T]$内,e^{MT} 仍视为有界常数。利用投影估计和迹不等式,有

$$|M_c(t) - M_{c_h}(t)| \leqslant M\int_0^t [(\|\zeta\| \|\zeta\|_1)^{\frac{1}{2}} + (\|\zeta\| \|\zeta\|_1)^{\frac{1}{2}}]\mathrm{d}\tau \leqslant$$
$$Mh^{l+\frac{1}{2}} + M\int_0^t \|\xi\| \mathrm{d}\tau + \varepsilon\int_0^t \|\xi\|_1 \mathrm{d}\tau。\tag{20}$$

由式(13),再注意到式(18),(19),(20)以及 $\tau \leqslant t$,得:

$$\|\xi(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla\xi\|^2 \mathrm{d}s \leqslant M(h_c^{2l+1} + h_p^{2k+2} + \int_0^t \|\xi\|^2 \mathrm{d}s) + M\int_0^t\int_0^\tau \|\xi(\nu)\|^2 \mathrm{d}\nu\mathrm{d}\tau +$$
$$\varepsilon\int_0^t\int_0^\tau \|\xi(\nu)\|_1^2 \mathrm{d}\nu\mathrm{d}\tau。$$

ε 取足够小,注意到常数 M 可以依赖时间最大值 T,故

$$\|\xi(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla\xi\|^2 \mathrm{d}s \leqslant M(h_c^{2l+1} + h_p^{2k+2} + \int_0^t \|\xi\|^2 \mathrm{d}s)。\tag{21}$$

利用 Bellmann 不等式得:

$$\|\xi(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla\xi\|^2 \mathrm{d}s \leqslant M(h_c^{2l+1} + h_p^{2k+2}),\ t \leqslant T。\tag{22}$$

若只考虑零阶释放,即 $t \leqslant t_0$,则由式(16)知式(12)中最后一项为零。此时易知:

$$\|\xi(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla\xi\|^2 \mathrm{d}s \leqslant M(h_c^{2l+2} + h_p^{2k+2}),\ t \leqslant t_0。\tag{23}$$

最后利用三角不等式，可得定理结论。

2 控制释放耦合问题的全离散格式及其误差估计

设 Δt 为时间网格剖分步长，$t^n = n\Delta t$。本文讨论的压力方程关于时间的剖分和浓度方程关于时间的剖分是一致的。溶质迁移方程的有限元全离散格式为：

$$(\phi \frac{C_h^n - C_h^{n-1}}{\Delta t}, v_h) - (u_h^n C_h^{n-1}, \nabla v_h) + (D(u_h^n)\nabla C_h^n, \nabla v_h) - \mu(C_h^{n-1}, v_h) + \int_{\Gamma_0} \gamma(c_c(\bar{M}_{c_h}^{n-1}) - C_h^{n-1}) v_h \mathrm{d}s = 0, (v_h \in m_h) \tag{24}$$

其中 u_h^n 为精确解 u 在 t^n 时刻的近似值，仍由1.1节混合元方法获得，只是取时间 $t = t^n$ 而已。与全离散格式相对应，控制释放过程中溶质剩余量 $\bar{M}_{c_h}^n$ 亦由积分获得：

$$\bar{M}_{c_h}^n = \bar{M}_{c_h}^{n-1} - \Delta t \int_{\Gamma_0} \gamma(c_0(\bar{M}_{c_h}^{n-1}) - C_h^{n-1}) \mathrm{d}s。 \tag{25}$$

初始逼近采用定义的椭圆投影：$C_h^0 = \tilde{c}_0, \bar{M}_{c_h}^0 = M_0$。

全离散问题的计算步骤是：$C_h^0 = \tilde{c}_0, \bar{M}_{c_h}^0 = Q_0; C_h^1, \bar{M}_{c_h}^1; C_h^2, \bar{M}_{c_h}^2; \cdots$，其中 Q_0 为初始时刻胶囊内化肥总量，$\tilde{c}_0$ 为初始浓度 $c_0(x)$ 在有限元空间 m_h 上的椭圆投影。全离散格式收敛性如定理2，证明略。

定理 2 在定理1的条件下，设 $c^m = c(t^m)$ 是式(8)在 $t = t^m$ 时刻的解，C_h^m 是问题(24)的解，则有：

$$\| c(t^m) - C_h^m \|^2 + h\Delta t \sum_{n=0}^{m} \| \nabla(c(t^n) - C_h^n) \|^2 \leqslant M(\Delta t^2 + h_c^{2l+1} + h_p^{2k+2})。 \tag{26}$$

特别地，对零阶释放问题，有最优估计：

$$\| c(t^m) - C_h^m \|^2 + h\Delta t \sum_{n=0}^{m} \| \nabla(c(t^n) - C_h^n) \|^2 \leqslant M(\Delta t^2 + h_c^{2l+2} + h_p^{2k+2})。 \tag{27}$$

3 本论文工作的总结和展望

本文假定了饱和水流条件流场是未知的，给出了控制释放耦合问题的半离散及全离散逼近结果；具体算例将另行给出，还将继续研究在非饱和水流条件下控制释放耦合问题的有限元方法。

参考文献：

[1] 程爱杰，杜宁．多孔介质中控制释放问题的 Galerkin 方法[J]．山东大学学报：理学版，2006，41(1)：16-20．

[2] CHENG Aijie, KRASNOV Y, FRIEDMAN S P. A single source-cyclindrical soil domain model for studying simultaneous controlled-release and mixing process[J]. Vadose Zone Journal, 2003, 2: 739-750.

[3] EWING R E, WHEELER M F. Galerkin method for miscible displacement problem in porous media[J]. SIAM Jnumer Anal, 1980, 17(3):351-365.

[4] EWING R E, WHEELER M F. The approximation of the pressure by a mixed method in the simulation of miscible displacement[J]. RAIRO Analysis numerique, 1983, 17:17-33.

[5] 袁益让．三维油水驱动半定问题的特征有限元方法和分析[J]．科学通报，1996，41(22)：2027-2032．

[6] RAVIART P A, THOMAS J M. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problem[C]// Mathematical Aspects of the Finite Elment method, Lecture Notes in Mathematics 606. New York: Springer-Verlag, 1977:298-304.

[7] 罗振东．混合有限元法基础及其应用[M]．北京：科学出版社，2006．

（编辑：孙培芹）