文章编号:1671-9352(2009)12-0001-05

一类带松弛控制的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程的粘性解

魏立峰,陈丽
(山东大学数学学院, 山东 济南 250100)

摘要:在最优控制问题中,动态规划原理成立的条件下,可以得到相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程。考虑在最优松弛控制问题中通过动态规划原理得出的 HJB 方程,证明最优松弛控制问题的值函数是该类带松弛控制的 HJB 方程惟一的粘性解。

关键词:松弛控制;动态规划原理;Hamilton-Jacobi-Bellman 方程;粘性解
中图分类号:O231.3　　**文献标志码:**A

Viscosity solution of the HJB equation for the stochastic relaxed control problem

WEI Li-feng, CHEN Li
(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: The Hamilton-Jacobi-Bellman equation(HJB equation for short) is obtained for the stochastic optimal control problem under the dynamic programming principle. It is proved that the optimal value function of the stochastic relaxed optimal control problem is the unique viscosity solution for the corresponding HJB equations.

Key words: relaxed control; dynamic programming principle; Hamilton-Jacobi-Bellman equation; viscosity solution

1　引言与基本假设

1.1　引言

在经典的随机最优控制问题中,控制集合 U 往往为凸集合最优控制才有可能取到,没有相应的凸性条件,最优控制在很多情况下是取不到的。为了克服这个困难,引入一类更为一般的控制过程——松弛控制,它是一类取值于 U 的随机测度过程。

为此,考虑如下的随机控制系统:

$$\begin{cases} dx_s^{t,x;q} = \int_U b(s, x_s^{t,x;q}, a) q_t(da) ds + \int_U \sigma(s, x_s^{t,x;q}, a) q_t(da) dW_s, \ s \in [t, T], \\ x_t^{t,x;q} = x, \end{cases} \tag{1}$$

$$b:[0,T] \times \mathbf{R}^d \times U \to \mathbf{R}^d, \ \sigma:[0,T] \times \mathbf{R}^d \times U \to \mathbf{R}^d \times d,$$

$(W_t)_{t\geqslant 0}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$中的一个 d 维标准布朗运动,$(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是由此布朗运动生成的自然 σ- 域流:$\mathscr{F}_t = \sigma\{W_s, s \in [0,t]\} \vee \mathscr{N}, t \in [0,T]$,其中 $\mathscr{N}$ 是由所有的 P- 零测集所组成的子集类。$(q_t)_t$ 是取值于

收稿日期:2009-05-12
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671112);山东省自然科学基金资助项目(JQ200801)
作者简介:魏立峰(1982-　),女,博士研究生,主要从事倒向随机微分方程,随机控制,金融数学的研究. Email:weilifeng82@126.com

$P(U)$的关于$\mathscr{F}_t$的循序可测过程。这种控制称为松弛控制,控制 q_t 构成的集合记为$\mathscr{R}$。Bahlali[1-2] 曾经研究过该种松弛控制问题的最大值原理,并且给出了松弛控制很好的性质。

对于上面的控制系统给出指标函数:

$$J(t,x;q) = E\Big[\int_t^T\int_U h(s,x_s^q,a)q_t(\mathrm{d}a)\mathrm{d}s + g(x_T^q)\Big], \tag{2}$$

其中 $g:\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}, h:[0,T]\times\mathbf{R}^d\times U \to \mathbf{R}$。

最优控制问题是,对于任意给定的$(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^d$,如何选择合适的 $q\in\mathscr{R}$ 使得指标函数值达到最大。

在经典控制中,Yong 和 Zhou[3] 首先给出了最优控制的动态规划原理以及对应的 HJB 方程,并且证明了 HJB 方程粘性解的存在 惟一性,1992 年 Peng[4-5] 给出了递归的动态规划原理并证明对应的 HJB 方程存在惟一的粘性解,2007 年 Wu 和 Yu[6] 给出了带单边障碍的递归的动态规划原理以及 HJB 方程存在惟一的粘性解,本文考虑在最优松弛控制问题中动态规划原理对应的 HJB 方程的粘性解问题。

1.2 记号与假设

给出如下常用的过程空间:

$H^2 = \{\{\varphi_t\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 是关于$\mathscr{F}_t$循序可测的,并且满足,$E[\int_0^T|\varphi_t|^2\mathrm{d}t]<+\infty,\}$

$S^2 = \{\{\varphi_t\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 是关于$\mathscr{F}_t$循序可测的,并且满足,$E[\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|\varphi_t|^2]<+\infty,\}$

$C([0,T]\times\mathbf{R}^d) = \{\varphi(t,x)$ 为关于 t,x 连续的连续函数$\}$。

$C^{1,2}([0,T]\times\mathbf{R}^d) = \{\varphi(t,x)$ 为关于 t 一次可微,关于 x 二次可微的连续函数$\}$。

关于 b,σ,h,g 给出如下的假设:

(A1) b,σ,h 关于t 连续,

(A2) 存在正常数 $L>0$,对于任意的 $x,x'\in\mathbf{R}^d$, a.s.

$$|b(t,x,a)-b(t,x',a)|+|\sigma(t,x,a)-\sigma(t,x',a)|+|h(t,x,a)-h(t,x',a)|+|g(x)-g(x')|\leqslant L|x-x'|。$$

在假设(A1)(A2) 下方程(1) 有惟一解,Yong 和 Zhou[3] 给出了指标函数(2) 的定义。

2 主要结果

定义指标函数值达到最大时的最优值函数为

$$\begin{cases} V(t,x) = \sup\limits_{q\in\mathscr{R}} J(t,x;q), \\ V(T,x) = g(x)。\end{cases} \tag{3}$$

类似[3] 中的证明方法,则可得到值函数对应的动态规划原理,即对于任意的$(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^d$ 有

$$V(t,x) = \sup_{q\in\mathscr{R}} E\Big\{\int_t^{t'}\int_U h(s,x(s;t,x,q);a)q_s(\mathrm{d}a)\mathrm{d}t + V(t',x(t';t,x,q))\Big\},\ \forall 0\leqslant t\leqslant t'\leqslant T。 \tag{4}$$

进一步可以得到该动态规划原理相对应的 HJB 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \sup\limits_{q\in\mathscr{R}} H(t,x,q,V_x,V_{xx}) = 0, & (t,x)\in[0,T)\times\mathbf{R}^d, \\ V|_{t=T} = g(x), & x\in\mathbf{R}^d。\end{cases} \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned} H(t,x,q,p,P) = {} & \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big[P\Big(\int_U\sigma(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a)\Big)\Big(\int_U\sigma(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a)\Big)^{\mathrm{T}}\Big] + \Big\langle p.\int_U b(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a)\Big\rangle + \\ & \int_U h(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a), \\ & \forall(t,x,q,p,P)\in[0,T]\times\mathbf{R}^d\times U\times\mathbf{R}^d\times\mathscr{S}^d。\end{aligned} \tag{6}$$

考虑这类 HJB 方程(5) 的粘性解问题。据作者所知,该类松弛控制对应的 HJB 方程弱解问题还未见他人讨论。

首先给出粘性解的定义:

定义 2.1　若函数 $u \in C([0,T]\times \mathbf{R}^d)$ 满足 $u(T,x)\leqslant g(x), \forall x\in \mathbf{R}^d$, 并且对于任意的 $\varphi \in C^{1,2}([0,T]\times \mathbf{R}^d)$, 当 $\varphi - u$ 在 $(t,x)\in[0,T)\times \mathbf{R}^d$ 达到最小值时,有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + \sup_{q\in\mathscr{R}} H(t,x,q_t,\varphi_x(t,x),\varphi_{xx}(t,x)) \geqslant 0,$$

则称 u 为一个粘性下解。反之若满足 $u(T,x)\geqslant g(x)$, 且 $\varphi - u$ 在 $(t,x)\in[0,T)\times \mathbf{R}^n$ 达到最大值时,有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + \sup_{q\in\mathscr{R}} H(t,x,q_t,\varphi_x(t,x),\varphi_{xx}(t,x)) \leqslant 0,$$

则称 $u(t,x)$ 为一个粘性上解。如果 u 既是粘性上解,又是粘性下解,则 u 是粘性解。

下面证明定义的值函数(3) 是 HJB 方程(5) 的一个粘性解,其证明方法与 Yong 和 Zhou[3] 的证明方法类似。

定理 2.1　若 b,σ,g 和 h 满足条件(A1)-(A2),则值函数 V 是 HJB 方程(5) 的一个粘性解。

证明　对于任意的一个函数 $\varphi\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbf{R}^d)$, 若 $\varphi - V$ 在 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^d$ 上达到局部最大值,对于任意的一个控制 q,对应一个控制系统(1)。当 $t'\downarrow t$ 时,则可得到

$$0 \geqslant \frac{E\{V(t,x) - \varphi(t,x) - V(t',x_{t'}^{t,x,q}) + \varphi(t',x_{t'}^{t,x,q})\}}{t'-t} \geqslant$$

$$\frac{1}{t'-t}E\{\int_t^{t'}\int_U h(r,x_r^{t,x,q},a)q_r(\mathrm{d}a)\mathrm{d}r - \varphi(t,x) + \varphi(t',x_t^{t,x,q}),$$

对 φ 应用 Itô 公式,即可得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big[\frac{\partial\varphi^2}{\partial x^2}(\int_U\sigma(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a))(\int_U\sigma(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a))^{\mathrm{T}}\Big] + \langle\frac{\partial\varphi}{\partial x},\int_U b(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a)\rangle +$$

$$\int_U h(t,x,a)q_r(\mathrm{d}a) \leqslant 0,$$

即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + \sup_{q\in\mathscr{R}} H(t,x,q_t,\varphi_x(t,x),\varphi_{xx}(t,x)) \leqslant 0, \tag{7}$$

所以说 V 是 HJB 方程(5) 的一个粘性上解。

另一方面,若 $\varphi - V$ 在 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^d$ 上达到局部最小值,则对于任意的一个 ε 存在一个 q',使得当 $t'\downarrow t$ 时,有

$$0 \leqslant \frac{E\{V(t,x) - \varphi(t,x) - V(t',x_{t'}^{t,x,q'}) + \varphi(t',x_{t'}^{t,x,q'})\}}{t'-t} \leqslant$$

$$-\varepsilon + \frac{1}{t'-t}E\{\int_t^{t'}\int_U h(r,x_r^{t,x,q'},a)q'_r(\mathrm{d}a)\mathrm{d}r - \varphi(t,x) + \varphi(t',x_t^{t,x,q'})\},$$

对 φ 应用 Itô 公式,即可得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big[\frac{\partial\varphi^2}{\partial x^2}(\int_U\sigma(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a))(\int_U\sigma(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a))^{\mathrm{T}}\Big] + \langle\frac{\partial\varphi}{\partial x},\int_U b(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a)\rangle +$$

$$\int_U h(t,x,a)q_r(\mathrm{d}a) \geqslant \varepsilon,$$

即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + \sup_{q\in\mathscr{R}} H(t,x,q_t,\varphi_x(t,x),\varphi_{xx}(t,x)) \geqslant 0, \tag{8}$$

所以说 V 也是 HJB 方程(5) 的一个粘性下解。综合(7),(8) 可得,V 是 HJB 方程的一个粘性解。

下面考虑 HJB 方程(5) 的粘性解的惟一性,采用的证明技术主要来自文献[6]。

令 $u_1(t,x)\in C([0,T]\times\mathbf{R}^d)$ 是 HJB 方程(5) 的一个粘性下解, $u_2(t,x)\in C([0,T]\times\mathbf{R}^d)$ 是方程(5) 的一个粘性上解。则函数 $\omega := u_1 - u_2$ 是方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\omega}{\partial t} + \sup\limits_{q\in\mathscr{R}}\mathscr{L}(t,x,q)\omega(t,x) = 0, & (t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^d,\\ \omega(t,x)\mid_{t=T} = 0, & x\in\mathbf{R}^d。\end{cases} \tag{9}$$

的一个粘性下解,其中

$$\mathscr{L}(t,x,q)\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[D^2\varphi(\int_U \sigma(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a))(\int_U \sigma(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a))^{\mathrm{T}}] + \langle D\varphi, \int_U b(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a)\rangle。$$

下面构造一个方程(7)的光滑的上解。

引理 2.1 对于任意的一个 $A>0$,存在一个 $C_1>0$ 使函数

$$\mathscr{X}(t,x) = \exp\{(C_1(T-t)+A)\psi(x)\}$$

在区间 $[t_1,T]\times\mathbf{R}^d$ 中满足

$$\frac{\partial\mathscr{X}}{\partial t} + \sup_{q\in R}\mathscr{L}(t,x,q)\mathscr{X}(t,x) < 0, \tag{12}$$

其中 $\psi(x) = [\log((|x|^2+1)^{\frac{1}{2}})+1]^2$, $t_1 = T-(\frac{A}{C_1})$。

证明 显然,函数 $\mathscr{X}$ 对于任意的 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^d$ 满足 $\mathscr{X}(t,x)>0$, 且有

$$|D\psi(x)| \leqslant \frac{2[\psi(x)]^{\frac{1}{2}}}{(|x|^2+1)^{\frac{1}{2}}} \text{ 和 } |D^2\psi(x)| \leqslant \frac{C(1+[\psi(x)]^{\frac{1}{2}})}{|x|^2+1}。$$

上面的两个估计表明,当 $t\in[t_1,T]$ 时,

$$|D\mathscr{X}(t,x)| \leqslant C\mathscr{X}(t,x)\frac{[\psi(x)]^{\frac{1}{2}}}{(|x|^2+1)^{\frac{1}{2}}} \text{ 和 } |D^2\mathscr{X}(t,x)| \leqslant C\mathscr{X}(t,x)\frac{\psi(x)}{|x|^2+1},$$

其中 C 是依赖于 A 的常数。于是可得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathscr{X}}{\partial t} + \sup_{q\in\mathscr{R}}\mathscr{L}(t,x,q)\mathscr{X}(t,x) = \\
&\quad \frac{\partial\mathscr{X}}{\partial t} + \sup_{q\in\mathscr{R}}\Big\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}[D^2\mathscr{X}(\int_U\sigma(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a))(\int_U\sigma(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a))^{\mathrm{T}}] + \langle D\mathscr{X}, \int_U b(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a)\rangle\Big\} < \\
&\quad -C_1\mathscr{X}(t,x)\psi(x) + \sup_{q\in\mathscr{R}}\Bigg\{\frac{1}{2}\frac{|\int_U\sigma(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a)|^2}{|x|^2+1}C\mathscr{X}(t,x)\psi(x) + \\
&\quad \frac{|\int_U b(t,x,a)q_t(\mathrm{d}a)|}{(|x|^2+1)^{\frac{1}{2}}}C\mathscr{X}(t,x)[\psi(x)]^{\frac{1}{2}}\Bigg\}。
\end{aligned} \tag{11}$$

又因为 b 和 σ 关于 x 是线性增长的,并且 $[\psi(x)]^{\frac{1}{2}} \leqslant \psi(x)$ 和 $1\leqslant\psi(x)$, 则不等式(11)满足

$$\begin{aligned}
(11) &< -C_1\mathscr{X}(t,x)\psi(x) + \frac{1}{2}C\mathscr{X}(t,x)\psi(x) + C\mathscr{X}(t,x)\psi(x) = \\
&\quad -(C_1-\frac{1}{2}C-C)\mathscr{X}(t,x)\psi(x)。
\end{aligned}$$

易见,当 C_1 足够大时,不等式右边为负值,即式(8)成立。

有了上面的引理可以得到 HJB 方程(5)粘性解的惟一性结果。

定理 2.2 若 b,σ,g 和 h 满足条件(A1)-(A2),则 HJB 方程(5)在空间 $C([0,T]\times\mathbf{R}^d)$ 中至多存在一个粘性解。

证明 若 $u_1,u_2\in C([0,T]\times\mathbf{R}^n)$ 是 HJB 方程(5)的两个粘性解。定义 $\omega := u_1-u_2$, 则可得:存在 $A>0$, 对于任意的 $t\in[0,T]$ 都有

$$\lim_{|x|\to\infty}\omega(t,x)\exp\{-A[\log((|x|^2+1)^{\frac{1}{2}})]\} = 0。$$

这意味着 $\omega(t,x)-\alpha\mathscr{X}(t,x)$ 是有界的,即在 $[t_1,T]\times\mathbf{R}^d$ 中,对于任意的 $\alpha>0$ 存在

$$M := \max_{[t_1,T]\times\mathbf{R}^d}(\omega-\alpha\mathscr{X})(t,x)\mathrm{e}^{-L(T-t)},$$

其中在 $(t_0,x_0)\in[t_1,T]\times\mathbf{R}^d$ 点可达到最大值((t_0,x_0) 依赖于 α, t_1 和引理 2.1 中的定义相同)。由此知可能存在下面的两种情况。

第一种情况: $\omega(t_0,x_0)\leqslant 0$, 即可得 $u_1(t,x)-u_2(t,x)\leqslant\alpha\mathscr{X}(t,x)$, $(t,x)\in[t_1,T]\times\mathbf{R}^n$。令 $\alpha\to 0$,

可得

$$u_1(t,x) \leqslant u_2(t,x),\ (t,x) \in [t_1,T] \times \mathbf{R}^n。 \tag{12}$$

第二种情况:$\omega(t_0,x_0) > 0$。根据最大值点的定义知道:

$$\omega(t,x) - \alpha\mathscr{X}(t,x) \leqslant (\omega(t_0,x_0) - \alpha\mathscr{X}(t_0,x_0))\mathrm{e}^{-L(T-t_0)},\ (t,x) \in [t_1,T] \times \mathbf{R}^d。$$

这意味着函数 $\omega - \varphi$ 在(t_0,x_0)达到最大值,令

$$\varphi(t,x) = \alpha\mathscr{X}(t,x) + (\omega(t_0,x_0) - \alpha\mathscr{X}(t_0,x_0))\mathrm{e}^{-L(T-t_0)},\ (t,x) \in [t_1,T] \times \mathbf{R}^n。$$

因为 ω 是方程(7)的粘性下解,所以 $\varphi(t_0,x_0) = \omega(t_0,x_0) > 0$,$t_0 \in [t_1,T)$。又因为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t_0,x_0) + \sup_{q\in\mathscr{R}}\Big\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}[D^2\varphi(\int_U \sigma(t_0,x_0,a)q_t(\mathrm{d}a))(\int_U \sigma(t_0,x_0,a)q_t(\mathrm{d}a))^{\mathrm{T}}] + \langle D\varphi,\int_U b(t_0,x_0,a)q_t(\mathrm{d}a)\rangle\Big\} \geqslant 0。$$

根据 φ 的定义,可把上述不等式写为

$$\alpha\Big[\frac{\partial\mathscr{X}}{\partial t}(t_0,x_0) + \sup_{q\in\mathscr{R}}\Big\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}[D^2\mathscr{X}(\int_U \sigma(t_0,x_0,a)q_t(\mathrm{d}a))(\int_U \sigma(t_0,x_0,a)q_t(\mathrm{d}a))^{\mathrm{T}} + \langle D\mathscr{X},\int_U b(t_0,x_0,a)q_t(\mathrm{d}a)\rangle\Big\}\Big] \geqslant 0,$$

这与引理 2.1 矛盾。当 $t_0 = T$ 时,$\varphi(t_0,x_0) = \omega(t_0,x_0) > 0$ 和 $\omega(t,x)$ 是(9)的一个粘性下解矛盾。所以第二种情况不存在。

如果把 $\omega(t,x) = u_1 - u_2$ 变为 $\omega'(t,x) = u_2 - u_1$,同样也可得

$$u_2(t,x) \leqslant u_1(t,x),\ (t,x) \in [t_1,T] \times \mathbf{R}^{\mathrm{d}}。 \tag{15}$$

综合式(12),(13)可以得到

$$u_1(t,x) = u_2(t,x),\ (t,x) \in [t_1,T] \times \mathbf{R}^d。$$

对于区间$[t_2,t_1]$应用同样的证明方法,其中 $t_2 = (t_1 - A/C_1)^+$。若 $t_2 > 0$ 则再继续在区间$[t_3,t_2]$上应用相同的方法证明,其中 $t_3 = (t_2 - A/C_1)^+$。以此类推,最终可得到

$$u_2(t,x) = u_1(t,x),\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^d。$$

至此定理 2.2 证毕。

参考文献:

[1] BAHLALI S. Necessary and sufficient optimality conditions for relaxed and strict control problems[J]. SIAM J Control Optim, 2008, 47: 2078-2095.

[2] BAHLALI S, DJEHICHE B, MEZERDI B. The relaxed stochastic maximum principle in singular control of diffusions[J]. SIAM J Control Optim, 2007, 46:427-444.

[3] YONG J, ZHOU X Y. Stochastic control, hamilton systems and HJB equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

[4] PENG S. A generalized dynamic programming principle and Hamilton-Jacobi-Bellmen equation[J]. Stochastics Stochastics Rep, 1992, 38:119-134.

[5] PENG S, YAN J, FANG S, et al. Backward stochastic differential equations-stochastic optimization theory and viscosity solution of HJB equations[M]// Topics on Stochastic Analysis. Beijing: Science Press, 1997: 85-138.

[6] WU Z, YU Z. Dynamic programming principle for one kind of stochastic recursive optimal control problem and Hamilton-Jacobi-Bellman equation[J]. SIAM J Control Optim, 2008, 47:2616-2641.

(编辑:李晓红)