文章编号:1671-9352(2009)02-0019-05

一类二阶非线性摄动微分方程解的渐近性质

宋霞[1,2],刘保东[1*],张全信[2]
(1. 山东大学数学学院,山东 济南 250100;2. 滨州学院数学与信息科学系,山东 滨州 256603)

摘要:研究了一类二阶非线性摄动微分方程非振动解的渐近性质,建立了三个新的渐近性定理,推广和改进了一些已知的结果。

关键词:摄动微分方程;渐近性质;非振动解
中图分类号:O175 **文献标志码**:A

Asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second order nonlinear differential equation with perturbation

SONG Xia[1,2], LIU Bao-dong[1*], ZHANG Quan-xin[2]
(1. School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China;
2. Department of Mathematics and Information Science, Binzhou University, Binzhou 256603, Shandong, China)

Abstract: The asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of a class of second order nonlinear differential equation with perturbation was studied, three new asymptotic theorems were established, and some known results were extended and improved.

Key words: nonlinear differential equation with perturbation; asymptotic behavior; nonoscillatory solution

0 引言

从微观的晶格运动到宏观的大气潮汐运动,都离不开振动的研究。在大自然中广泛发生的非线性振动,物理上可以用二阶非线性微分方程来描述。二阶非线性微分方程在量子物理、工程力学、流体力学等方面都有十分重要的学术价值和应用,其解的振动理论和渐近性质也成为近几年研究的热点课题之一。

燕居让和张全信教授[1,2]研究了二阶非线性阻尼微分方程

$$(a(t)\Psi(x(t))x'(t))'+p(t)x'(t)+q(x)f(x(t))=0$$

的解的振动性质,M. Cecchi[3]与Yu.V. Rogovchenko[4]研究了二阶非线性微分方程

$$(a(t)\Psi(x(t))x'(t))'+q(x)f(x(g(t)))=0$$

和

$$(a(t)\Psi(x(t))x'(t))'+q(x)f(x(t))=0$$

的解的振动性质,燕居让教授在文[5]又研究了二阶线性阻尼微分方程

$$(r(t)x'(t))'+p(t)x'(t)+q(x)x(t)=0$$

的解的振动性质[5],分别建立了上述方程的若干个振动性定理。在此基础上,本文讨论了一类较为广泛的二

收稿日期:2008-05-04
作者简介:宋霞(1981-),女,助教,硕士研究生,主要从事微分方程理论研究. Email:songxia119@163.com
* **通讯作者**:刘保东(1964-),男,博士,副教授,主要研究方向为环境数学. Email:baodong@sdu.edu.cn

阶非线性摄动微分方程

$$(a(t)\Psi(x(t))x'(t))' + Q(t,x(t)) = P(t,x(t),x'(t)) \tag{1}$$

的非振动解的渐近性质,建立了方程(1)的三个新的渐近性定理,推广和改进了已知的一些结果。

1 基本假设

本文中约定:

(A_1) $a:[t_0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 是正的连续可微函数;

(A_2) $\Psi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续可微函数,并且当 $u=0$ 时,$\Psi(0)\geqslant 0$;

(A_3) $Q:[t_0,+\infty)\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续函数,并且存在连续函数 $q(t)$ 和连续可微函数 $f(u)$ 使得 $\dfrac{Q(t,u)}{f(u)}\geqslant q(t)$,$u\neq 0$(其中 $q:[t_0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,当 $u\neq 0$ 时,$uf(u)>0$,$f'(u)>0$);

(A_4) $P:[t_0,+\infty)\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是连续函数,并且存在连续函数 $p(t):[t_0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 使得

$$x(t)P(t,x(t),x'(t))\leqslant x(t)p(t)x'(t),\ x\neq 0。$$

本文总假设方程(1)的每一个解 $x(t)$ 可以延拓于 $[t_0,+\infty)$ 上。在任何无穷区间 $[T,+\infty)$ 上,$x(t)$ 不恒等于零,这样的解叫正则解。一个正则解,若它有任意大的零点,则称为振动的;否则就称为非振动的。一个非振动的解 $x(t)$,若对任意大的 t,总满足 $x'(t)$ 可以改变符号,则称 $x(t)$ 是方程(1)的弱振动解[3,6]。若方程(1)的所有正则解是振动的,则称方程(1)是振动的。

2 主要引理和定理

为了从解的渐近状态着手讨论,将方程(1)的所有正则解分为以下四类:

$S^+=\{x=x(t):x(t)$ 是方程(1)的正则解,且存在 $t_x\geqslant t_0$,当 $t\geqslant t_x$ 时,有 $x'(t)x(t)\geqslant 0\}$;

$S^-=\{x=x(t):x(t)$ 是方程(1)的正则解,且存在 $t_x\geqslant t_0$,当 $t\geqslant t_x$ 时,有 $x'(t)x(t)<0\}$;

$S^O=\{x=x(t):x(t)$ 是方程(1)的正则解,且存在 $\{t_n\}$, $\{t_n\}\to+\infty$,使得 $x(t_n)=0\}$;

$S^{WO}=\{x=x(t):x(t)$ 是方程(1)的正则解,对于充分大 t,有 $x(t)\neq 0$,并且对于所有的 $t_\alpha>t_0$,存在 $t_{\alpha_1}>t_\alpha$,$t_{\alpha_2}>t_\alpha$,使得 $x'(t_{\alpha_1})x'(t_{\alpha_2})<0\}$。

根据上面的定义,容易证明 S^+,S^-,S^O,S^{WO} 是互不相交的。且 S^+ 中的解最终或者是正的非减函数或者是负的非增函数,S^- 中的解最终或者是正的非增函数或者是负的非减函数,S^O 中的解是振动的,而 S^{WO} 中的解最终是弱振动的。

引理 设 $\Psi(x)f'(x)\geqslant c>0$,$x\neq 0$。

(Ⅰ)若

$$\limsup_{x\to\infty}\int_{t_0}^{t}\left[q(s)-\frac{p^2(s)}{4ca(s)}\right]\mathrm{d}s=+\infty, \tag{2}$$

则对于方程(1)有 $S^+=\varnothing$;

(Ⅱ)若

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\left[q(s)-\frac{p^2(s)}{4ca(s)}\right]\mathrm{d}s=+\infty, \tag{3}$$

则对于方程(1)有 $S^{WO}=\varnothing$。

证明 (Ⅰ)假设方程(1)有一个解 $x(t)\in S^+$。不失一般性,假设存在 $t_1\geqslant t_0$ 使得 $t\geqslant t_1$ 时,有 $x(t)>0$,$x'(t)\geqslant 0$。类似地可以证明当 $t\geqslant t_1$ 时 $x(t)<0$,$x'(t)\leqslant 0$ 的情况。考虑函数

$$W(t)=\frac{a(t)\Psi(x(t))x'(t)}{f(x(t))},\ t\geqslant t_1,$$

由方程(1)得

$$W'(t) = -\frac{Q(t,x(t))}{f(x(t))} + \frac{x(t)P(t,x(t),x'(t))}{x(t)f(x(t))} - a(t)\Psi(x(t))f'(x(t))\frac{x'^2(t)}{f^2(x(t))} \leqslant$$
$$-q(t) + \frac{p(t)x'(t)}{f(x(t))} - a(t)\Psi(x(t))f'(x(t))\frac{x'^2(t)}{f^2(x(t))} =$$
$$-q(t) + \frac{p^2(t)}{4a(t)\Psi(x(t))f'(x(t))} -$$
$$\left[\sqrt{a(t)\Psi(x(t))f'(x(t))}\frac{x(t)}{f(x(t))} - \frac{p(t)}{\sqrt{a(t)\Psi(x(t))f'(x(t))}}\right]^2 \leqslant$$
$$-q(t) + \frac{p^2(t)}{4ca(t)}。$$

从 t_1 到 $t(t \geqslant t_1)$ 积分上式得

$$\frac{a(t)\Psi(x(t))x'(t)}{f(x(t))} \leqslant \frac{a(t_1)\Psi(x(t_1))x'(t_1)}{f(x(t_1))} - \int_{t_1}^{t}\left[q(s) - \frac{p^2(s)}{4ca(s)}\right]\mathrm{d}s, \tag{4}$$

由条件(2) 得

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{a(t)\Psi(x(t))x'(t)}{f(x(t))} = -\infty。$$

这与 $x(t) > 0, x'(t) \geqslant 0\ (t \geqslant t_1)$ 矛盾。

(Ⅱ) 假设方程(1) 有一个解 $x(t) \in S^{WO}$。不失一般性,假设存在 $t_1 \geqslant t_0$ 使得 $t \geqslant t_1$ 时,有 $x(t) > 0$。类似地可以证明当 $t \geqslant t_1$ 时 $x(t) < 0$ 的情况。则对于所有的 $t_\alpha \geqslant t_1$, 存在 $t_{\alpha_1} \geqslant t_\alpha, t_{\alpha_2} \geqslant t_\alpha$ 使得 $x'(t_{\alpha_1})x'(t_{\alpha_2}) < 0$。如同上面(Ⅰ) 的证明过程,得到式(4),即

$$\frac{a(t)\Psi(x(t))x'(t)}{f(x(t))} \leqslant \frac{a(t_1)\Psi(x(t_1))x'(t_1)}{f(x(t_1))} - \int_{t_1}^{t}\left[q(s) - \frac{p^2(s)}{4ca(s)}\right]\mathrm{d}s,$$

由条件(3) 得,对于充分大的 t,恒有 $x'(t) < 0$,这与 $x'(t_{\alpha_1})x'(t_{\alpha_2}) < 0$ 矛盾。证毕。

注 1　引理中的(Ⅱ) 推广了[3] 中定理 2(a)。特别地, 当方程(1) 中 $P(t,x(t),x'(t)) = 0$, $Q(t,x(t)) = q(x)f(x(t))$ 时,引理(Ⅱ) 即为[3] 中定理 2(a)。

注 2　若条件(3) 成立,显然条件(2) 成立,因此当条件(3) 成立时,有 $S^O = S^{WO} = \varnothing$。

定理 1　设 $\Psi(x)f'(x) \geqslant c > 0, x \neq 0$。如果条件(3) 成立,则对于方程(1) 任意非振动解必属于下列两种类型之一:

$$\mathrm{A}_C: x(t) \to C \neq 0,\ t \to +\infty,$$
$$\mathrm{A}_0: x(t) \neq 0,\ t \to +\infty。$$

证明　设 $x(t)$ 是方程(1) 的任意一个非振动解,则 $x(t)$ 不属于 S^O,由引理知,对于方程(1),有 $S^+ = S^{WO} = \varnothing$。因此得,$x(t) \in S^-$。

如果 $x(t)$ 最终为正,则存在 $t_1 \geqslant t_0$ 使得 $t \geqslant t_1$ 时,有 $x(t) > 0, x'(t) \leqslant 0$。如同引理的证明过程,得到式(4),即

$$\frac{a(t)\Psi(x(t))x'(t)}{f(x(t))} \leqslant \frac{a(t_1)\Psi(x(t_1))x'(t_1)}{f(x(t_1))} - \int_{t_1}^{t}\left[q(s) - \frac{p^2(s)}{4ca(s)}\right]\mathrm{d}s。$$

由条件(3) 得,存在 $t_2 \geqslant t_1$ 使得当 $t \geqslant t_2$ 时,有 $x'(t) < 0$。因此,$x(t)$ 是单调递减且有下界的,于是 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ 存在,并且 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = C \geqslant 0$,这里 C 是一个常数。

如果 $x(t)$ 最终为正,则存在 $t_3 \geqslant t_1$ 使得 $t \geqslant t_3$ 时,有 $x(t) > 0, x'(t) > 0$。因此 $x(t)$ 是单调递增且有上界的,于是 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ 存在,并且 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = C \leqslant 0$,这里 C 是一个常数。

综上可知,对于方程(1) 的任意非振动方程解必属于 A_C 和 A_0 两种类型之一。证毕。

定理 2　设 $\Psi(x)f'(x) \geqslant c > 0, \Psi(x) \leqslant \alpha, x \neq 0$,如果条件(3) 成立,则方程(1) 有 A_C 型非振动解 $x(t)$ 的必要条件为当 $T \geqslant t_0$ 充分大时,

$$\int_{T}^{+\infty}\frac{1}{a(s)}\int_{T}^{s}\left[q(\tau)-\frac{p^{2}(\tau)}{4ca(\tau)}\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s<+\infty。\tag{5}$$

证明　设 $x(t)$ 是方程(1) 的一个 A_C 型非振动解，不妨设 $C>0$，故 $x(t)$ 最终为正。由定理 1 的证明知 $x'(t)$ 最终为负。再注意到(3)，则存在 $T\geqslant t_0$，使当 $t\geqslant T$ 时，$x'(t)<0$ 且

$$\int_{T}^{t}\left[q(s)-\frac{p^{2}(s)}{4ca(s)}\right]\mathrm{d}s\geqslant 0。$$

如同引理的证明过程，得到式(4)，即

$$\frac{a(t)\Psi(x(t))x'(t)}{f(x(t))}\leqslant\frac{a(T)\Psi(x(T))x'(T)}{f(x(T))}-\int_{T}^{t}\left[q(s)-\frac{p^{2}(s)}{4ca(s)}\right]\mathrm{d}s\leqslant$$
$$-\int_{T}^{t}\left[q(s)-\frac{p^{2}(s)}{4ca(s)}\right]\mathrm{d}s,$$

从而

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))}\leqslant-\frac{1}{\alpha a(t)}\int_{T}^{t}\left[q(s)-\frac{p^{2}(s)}{4ca(s)}\right]\mathrm{d}s。$$

从 T 到 t 积分上式得

$$\int_{T}^{t}\frac{x'(s)}{f(x(s))}\mathrm{d}s\leqslant-\frac{1}{\alpha}\int_{T}^{t}\frac{1}{a(s)}\int_{T}^{s}\left[q(\tau)-\frac{p^{2}(\tau)}{4ca(\tau)}\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,$$

即

$$\int_{x(T)}^{x(t)}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}\leqslant-\frac{1}{\alpha}\int_{T}^{t}\frac{1}{a(s)}\int_{T}^{s}\left[q(\tau)-\frac{p^{2}(\tau)}{4ca(\tau)}\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s。$$

令 $t\to+\infty$ 得

$$\int_{x(T)}^{C}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}\leqslant-\frac{1}{\alpha}\int_{T}^{+\infty}\frac{1}{a(s)}\int_{T}^{s}\left[q(\tau)-\frac{p^{2}(\tau)}{4ca(\tau)}\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,$$

注意到 $x(T)>C>0, f(u)>0$，则得

$$\frac{1}{\alpha}\int_{T}^{+\infty}\frac{1}{a(s)}\int_{T}^{s}\left[q(\tau)-\frac{p^{2}(\tau)}{4ca(\tau)}\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant\int_{C}^{x(T)}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}<+\infty。$$

故(5) 成立。类似地可以证明 $C<0$ 的情形。证毕。

定理 3　设 $\Psi(x)f'(x)\geqslant c>0, \Psi(x)\leqslant\alpha, x\neq 0$，如果条件(3) 成立，并且对于任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\int_{0}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}<+\infty, \int_{-\varepsilon}^{0}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}>-\infty,\tag{6}$$

若方程(1) 有 A_0 型非振动解，则当 $T\geqslant t_0$ 充分大时(5) 成立。

证明　设 $x(t)$ 是方程(1) 的一个 A_0 型非振动解。不妨设 $x(t)$ 最终为正，类似于定理 2 的证明可得

$$\int_{x(T)}^{x(t)}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}\leqslant-\frac{1}{\alpha}\int_{T}^{t}\frac{1}{a(s)}\int_{T}^{s}\left[q(\tau)-\frac{p^{2}(\tau)}{4ca(\tau)}\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s。$$

令 $t\to+\infty$，由 $x(t)\to 0$ 及 $x(T)>0$ 和条件(6) 得

$$\frac{1}{\alpha}\int_{T}^{+\infty}\frac{1}{a(s)}\int_{T}^{s}\left[q(\tau)-\frac{p^{2}(\tau)}{4ca(\tau)}\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant\int_{0}^{x(T)}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}<+\infty。$$

故(5) 成立。类似地可证 $x(t)$ 最终为负的情形。证毕。

由上面的三个定理，便可得到下面的推论。

推论　设 $\Psi(x)f'(x)\geqslant c>0, \Psi(x)\leqslant\alpha, x\neq 0$，如果条件(3) 和(6) 成立，并且

$$\int_{T}^{+\infty}\frac{1}{a(s)}\int_{T}^{s}\left[q(\tau)-\frac{p^{2}(\tau)}{4ca(\tau)}\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=+\infty,\tag{7}$$

则方程(1) 是振动的。

注 3　该推论推广了[2] 中的定理 1。

3　结果分析与评价

对于非线性微分方程

$$(a(t)\Psi(x(t))x'(t))' + Q(t,x(t)) = P(t,x(t),x'(t)),$$

本文证明了当 $\Psi(x)f'(x) \geqslant c > 0, x \neq 0, \lim\limits_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\left[q(s) - \dfrac{p^2(s)}{4ca(s)}\right]\mathrm{d}s = +\infty$ 时,方程任意的非振动解有两种类型,其渐近性质为:

$$\mathrm{A}_C:\ x(t) \to C \neq 0,\ t \to +\infty,$$

$$\mathrm{A}_0:\ x(t) \neq 0,\ t \to +\infty,$$

并且进一步证明了有 A_C 和 A_0 两种类型渐近解时方程分别应满足的条件,在此基础上文章对参考文献中已知的一些结果进行了推广和改进。

参考文献:

[1] 燕居让,张全信.二阶非线性阻尼微分方程的振动定理[J].系统科学与数学,1993,13(3):276-278.

[2] 张全信,燕居让.一类二阶非线性阻尼微分方程的振动性[J].系统科学与数学,2004,24(3):276-278.

[3] CECCHI M, MARINI M. Oscillatory and nonoscillatory behavior of a second order functional differential equation[J]. Rocky Mount J Math, 1992, 22:1259-1276.

[4] YU V Rogovchenko. On oscillation of a second order nonlinear delay differential equation[J]. Funkcial Ekvac, 2000, 43:1-29.

[5] YAN J R. Oscillation theorems for second order linear differential equations with damping[J]. Proc Amer math Soc, 1986, 98:276-282.

[6] LADDE G S, LAKSHMIKANTHAM V. ZHANG B G. Oscillation theory of differential equations with deviating arguments[M]. New York: Marcel Dekker, 1987.

（编辑:李晓红）