文章编号:1671-9352(2009)12-0014-03

一类算数函数的均值估计

王晓瑛[1],张瑾[1,2]

(1. 西北大学数学系, 陕西 西安 710127; 2. 西安文理学院数学系, 陕西 西安 710065)

摘要: 设 n 为正整数。定义可加函数 $F(n)$ 为 $F(1)=0$,当 $n>1$ 且 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时定义 $F(n)=\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\cdots+\alpha_k p_k$。设 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子。利用初等方法以及素数的分布性质研究函数 $(F(n)-P(n))^2$ 的均值性质,并给出一个较强的渐近公式。

关键词: 可加函数;最大素因子;均方值;渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标志码:** A

Mean-value estimate for a certain arithmetical function

WANG Xiao-ying[1], ZHANG Jin[1,2]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, Shaanxi, China;
2. Department of Mathematics, Xi'an University of Arts and Sciences, Xi'an 710065, Shaanxi, China)

Abstract: Let n be a positive integer and $F(n)$ be defined by $F(1)=0$, $F(n)=\alpha_1 p_1+\cdots+\alpha_k p_k$ if $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ is the canonical decomposition of n. Let $P(n)$ be the largest prime divisor of n. One mean-value estimate for $(F(n)-P(n))^2$ is given.

Key words: additive function; the largest prime divisor; mean square value; asymptotic formula

1 引言及结论

设 $f(n)$ 表示一个算术函数,称 $f(n)$ 是可加的,如果对任意正整数 m,n 且 $(m,n)=1$ 有 $f(mn)=f(m)+f(n)$。称 $f(n)$ 是完全可加的,如果对任意正整数 r 及 s 都有 $f(rs)=f(r)+f(s)$。在初等数论中,满足可加性质的算术函数很多,例如当 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,函数 $\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$ 及对数函数 $f(n)=\ln n$ 都是完全可加函数。此外,正整数 n 的所有不同素因数的个数 $\omega(n)=k$ 是一个可加函数,但不是完全可加函数。关于可加函数性质的研究,在初等数论以及素数分布问题中占有十分重要的位置,许多著名的数论难题都与之密切相关,因而其研究工作是很有意义的。有关函数 $\Omega(n)$ 及 $\omega(n)$ 的性质,可参阅文献[1-5]。本文中定义一个新的完全可加函数 $F(n)$ 如下:$F(0)=0$,当 $n>1$ 且 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,定义 $F(n)=\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\cdots+\alpha_k p_k$。显然这样定义的函数 $F(n)$ 为完全可加函数。事实上当 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 及 $n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$ 时,有 $mn=p_1^{\alpha_1+\beta_1}p_2^{\alpha_2+\beta_2}\cdots p_k^{\alpha_k+\beta_k}$,从而由 $F(n)$ 的定义有 $F(mn)=(\alpha_1+\beta_1)p_1+(\alpha_2+\beta_2)p_2+\cdots+(\alpha_k+\beta_k)p_k=F(m)+F(n)$。所以 $F(n)$ 是一个完全可加函数。现在用 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子。本文的主要目的是研究函数 $F(n)$ 的值分布性质。关于这一问题,至今似乎没有人研究,至少我们没有在现有的文献中看到。本文利用初等方法以及素数分布理论给出 $(F(n)-P(n))^2$ 的一个较强的均值公式,即下面的定理。

定理 设 N 为给定的正整数,则对任意给定的实数 $x>1$,有渐近公式

收稿日期: 2009-05-21
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155);陕西省教育厅科研专项基金资助项目(08JK433)
作者简介: 王晓瑛(1964-),女,副教授,博士,从事数论研究. Email:xdwxy@163.com

$$\sum_{n\leqslant x}(F(n)-P(n))^2=\sum_{i=1}^{N}c_i\cdot\frac{x^2}{\ln^{i+1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+2}\sqrt{x}}\right),$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,N)$为可计算的常数,且 $c_1=\frac{\pi^2}{6}$。

2 定理的证明

利用初等方法以及素数分布理论直接给出定理的证明。采用文献[4]中的思想。首先定义四个集合 A,B,C,D 如下:$A=\{n,n\in N,n$ 恰好有一个素因子 p 满足 $n=kp,p>n^{\frac{1}{3}},k$ 的所有素因子 q 满足 $q<n^{\frac{1}{3}}\}$;$B=\{n,n\in N,n$ 有一个素因子 p 满足 $n=p^2\cdot k,p>n^{\frac{1}{3}}>k\}$;$C=\{n,n\in N,n$ 有两个素因子 p_1 及 p_2 满足 $n=p_1p_2k,p_2>p_1>n^{\frac{1}{3}}>k\}$;$D=\{n,n\in N,n$ 的所有素因子 p 满足 $p\leqslant n^{\frac{1}{3}}\}$,其中 N 表示所有正整数之集。于是由集合 A,B,C 及 D 的定义可得

$$\sum_{n\leqslant x}(F(n)-P(n))^2=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}(F(n)-P(n))^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}(F(n)-P(n))^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in C}}(F(n)-P(n))^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in D}}(F(n)-P(n))^2\equiv W_1+W_2+W_3+W_4。\tag{2.1}$$

现在利用初等方法以及素数分布理论来估计(2.1)中的各项。首先估计 W_1。注意到 $F(n)$为完全可加函数且当 $n\in A$ 且 $n=pk,k$ 的所有素因子 q 满足 $q\leqslant n^{\frac{1}{3}}$时,$F(k)\leqslant n^{\frac{1}{3}}\ln n$ 以及素数分布定理(参阅文献[3]中第三章定理 2)

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\sum_{i=1}^{k}c_i\cdot\frac{x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),\tag{2.2}$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$为可计算的常数且 $c_1=1$。我们有估计式:

$$\begin{aligned}W_1&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}(F(n)-P(n))^2=\sum_{\substack{pk\leqslant x\\ (pk)\in A}}(F(pk)-p)^2=\\&\sum_{\substack{pk\leqslant x\\ (pk)\in A}}F^2(k)\ll\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\sum_{k<p\leqslant\frac{x}{k}}(pk)^{\frac{2}{3}}\ln^2(pk)\leqslant(\ln x)^2\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}k^{\frac{2}{3}}\sum_{k<p\leqslant\frac{x}{k}}p^{\frac{2}{3}}\ll\\&(\ln x)^2\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}k^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{5}{3}}\frac{1}{\ln\frac{x}{k}}\ll x^{\frac{5}{3}}\ln^2 x。\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}W_2&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}(F(n)-P(n))^2=\sum_{\substack{p^2k\leqslant x\\ p>k}}(F(p^2k)-p)^2=\\&\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}(F(k)+p)^2\ll\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}p^2\ll\\&\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}\ln x}\ll\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}。\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$W_4=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in D}}(F(n)-P(n))^2\ll\sum_{n\leqslant x}n^{\frac{2}{3}}\ln^2 n\ll x^{\frac{5}{3}}\ln^2 x。\tag{2.5}$$

最后估计主项 W_3。注意到 $n\in C$ 时,$n=p_1p_2k$,其中 $p_2>p_1>n^{\frac{1}{3}}>k$。如果 $k<p_1<n^{\frac{1}{3}}$,这种情况属于 W_1 的估计。如果 $k<p_1<p_2<n^{\frac{1}{3}}$,这种情况属于 W_4 的估计。于是应用式(2.2),有

$$\begin{aligned}W_3&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in C}}(F(n)-P(n))^2=\sum_{\substack{p_1p_2k\leqslant x\\ p_2>p_1>k}}(F(p_1p_2k)-p_2)^2+O(x^{\frac{5}{3}}\ln^2 x)=\\&\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}\sum_{p_2\leqslant\frac{x}{p_1k}}(F^2(k)+2p_1F(k)+p_1^2)+O(x^{\frac{5}{3}}\ln^2 x)=\\&\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}\sum_{p_1<p_2\leqslant\frac{x}{p_1k}}p_1^2+O\Big(\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}\sum_{p_1<p_2\leqslant\frac{x}{p_1k}}kp_1\Big)+O(x^{\frac{5}{3}}\ln^2 x)=\end{aligned}$$

$$\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}p_1^2\left(\sum_{i=1}^{N}c_i\cdot\frac{x}{p_1k\ln^i\frac{x}{p_1k}}+O\left(\frac{x}{p_1k\ln^{N+1}x}\right)\right)+O(x^{\frac{5}{3}}\ln^2x)-$$

$$\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}\sum_{p_2\leqslant p_1}p_1^2+O\Big(\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}\sum_{p_1<p_2\leqslant\frac{x}{kp_1}}kp_1\Big)。\tag{2.6}$$

注意到 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$，应用 Abel 恒等(参阅文献[6]中定理4.2)及(2.2)，有

$$\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}p_1^2\sum_{p\leqslant p_1}1=\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}p_1^2\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i\cdot p_1}{\ln^ip_1}+O\left(\frac{p_1}{\ln^{N+1}p_1}\right)\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}\frac{c_i\cdot p_1^3}{\ln^ip_1}+O\left(\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}\frac{p_1^3}{\ln^{N+1}p_1}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}\frac{c_i\cdot p_1^3}{\ln^ip_1}+O\left(\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}\frac{p_1^3}{\ln^{N+1}p_1}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{c_ix^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}\ln^i\sqrt{\frac{x}{k}}}\pi\left(\sqrt{\frac{x}{k}}\right)-\int_2^{\sqrt{\frac{x}{k}}}\pi(y)d\left(\frac{c_iy^3}{\ln^iy}\right)\right)+O\left(\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}\frac{p_1^3}{\ln^{N+1}p_1}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i\cdot x^2}{\ln^{i+1}x}+O\left(\frac{2^N\cdot x^2}{\ln^{N+2}x}\right),\tag{2.7}$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为可计算的常数且 $d_1=\frac{\pi^2}{6}$。

$$\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}\sum_{p_1<p_2\leqslant\frac{x}{p_1k}}kp_1\ll\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}k\sum_{p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}p_1\cdot\frac{x}{p_1k\ln x}\ll\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k}\ln^2x}\ll\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\ln^2x},\tag{2.8}$$

$$\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}\frac{p_1x}{k\ln^{N+1}x}\ll\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{x^2}{k^2\ln^{N+2}x}\ll\frac{x^2}{\ln^{N+2}x}。\tag{2.9}$$

同理应用 Abel 恒等，式(2.2) 以及(2.7) 的证明方法，也可以得到渐近式

$$\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{k<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}p_1^2\frac{x}{p_1k\ln\frac{x}{p_1k}}=\sum_{k\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{k}\sum_{k<p_1\leqslant\sqrt{\frac{x}{k}}}\frac{xp_1}{\ln\frac{x}{kp_1}}=\sum_{i=1}^{N}a_i\cdot\frac{x^2}{\ln^{i+1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+2}x}\right),\tag{2.10}$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,N)$ 是可计算的常数且 $a_1=\frac{\pi^2}{3}$。

于是结合(2.1)，(2.3) ~ (2.10)，立刻推出渐近公式：

$$\sum_{n\leqslant x}(F(n)-P(n))^2=\sum_{i=1}^{N}a_i\cdot\frac{x^2}{\ln^{i+1}x}-\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i\cdot x^2}{\ln^{i+1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+2}\sqrt{x}}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{N}h_i\frac{x^2}{\ln^{i+1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+2}\sqrt{x}}\right),$$

其中 $h_i=a_i-d_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为可计算的常数且 $h_1=a_1-d_1=\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{6}$。

定理证毕。

参考文献：

[1] ZHONG C H. A sum related to a class arithmetical functions[J]. Utilitas Math, 1993, 44:231-242.
[2] SHAPIRO H N. Introduction to the theory of numbers[M]. New York:Wiley, 1983.
[3] 潘承洞，潘承彪.素数定理的初等证明[M].上海：上海科学技术出版社，1988.
[4] 徐哲峰.Smarandache 函数的值分布性质[J]. 数学学报，2006,49(5):1009-1012.
[5] 张文鹏.初等数论[M].西安：陕西师范大学出版社，2007.
[6] APOSTOL T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

（编辑：李晓红）