第 44 卷 第 11 期
Vol.44 No.11

山 东 大 学 学 报 (理 学 版)
Journal of Shandong University(Natural Science)

2009 年 11 月
Nov. 2009

文章编号:1671-9352(2009)11-0093-04

粗积分的动态特征

黄江燕[1,2],于秀清[2,3],方文青[2,4]

(1. 江西理工大学理学院, 江西 赣州 341000; 2. 山东大学数学学院, 山东 济南 250100;
3. 德州学院, 山东 德州 253000; 4. 德州职业技术学院, 山东 德州 253034)

摘要:基于函数 S-粗集和 F-粗积分,本文研究粗积分的动态特征,定义粗积分链和粗积分环的概念,给出上积分链,下积分链定理,粗积分链定理,以及积分链的存在性定理,讨论了积分链的可闭条件,得到积分环定理,粗积分环定理。另外还对积分链与积分环的一些特征进行讨论,给出中值定理在粗积分链中的应用结果。

关键词:函数 S-粗集;动态特征;积分链;积分环

中图分类号:O159 **文献标志码:**A

Dynamic characteristics of rough integrals

HUANG Jiang-yan[1,2], YU Xiu-qing[2,3], FANG Wen-qing[2,4]

(1. Institute of Natural Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, Jiangxi, China;
2. School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China;
3. Dezhou College, Dezhou 253000, Shandong, China;
4. Dezhou Vocational and Technical College, Dezhou 253034, Shangdong, China)

Abstract: Based on the function S-rough sets and F-rough integral, the dynamic characteristics of rough integrals are studied. Two concepts, rough integral chain, rough integral ring, four theorems, up integral chain, down integral chain, rough integral chain theorem and existence of integral chain are given. Conditions of integral chain can be closed. Some of their characteristics are discussed, and the integral ring theorem is obtained. Finally, application of mean value theorem in rough integral chain are discussed. All theorems and conclusions present the foundation for further study on rough integrals.

Key words: the function S-rough sets; dynamic characteristics; rough integral chain; rough integral ring

粗集理论从 Z. Pawlak 粗集[1]发展到 S-粗集[2],从静态 R-元素等价类$[x]$到动态 R-元素等价类。文献[3]又改进 S-粗集,提出函数 S-粗集,并给出函数 S-粗集的若干特征和应用[4-9]。函数 S-粗集是用具有动态特性的 R-函数等价类定义的,它具有规律特征与动态特征。文献[10]将牛顿积分推广,在函数 S-粗集的理论基础上定义粗积分,并探讨了粗积分的部分特性。本文在粗积分的基础上,进一步讨论它的动态特征。

1 F-粗积分[10-11]

定义 1.1 称积分对$\left(\int_a^b p_{-,F}(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p_F^-(x)\mathrm{d}x\right)$为函数单向 S- 粗集$((R,F)_\circ(Q^\circ),(R,F)^\circ(Q^\circ))$生成的 F- 粗积分,称$\int_a^b p_{-,F}(x)\mathrm{d}x$ 是函数单向 S- 粗集生成的下近似积分,$\int_a^b p_F^-(x)\mathrm{d}x$ 是函数单向 S- 粗集生成的上近似积分。

收稿日期:2009-01-16
基金项目:山东省自然科学基金资助项目(Y2007H02)
作者简介:黄江燕(1980-),女,讲师,研究方向为粗系统理论与应用. Email: hjyjxust@126.com

定义 1.2 称积分对$(\int_a^b p_{-,\bar{F}}(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^{\bar{F}}(x)\mathrm{d}x)$是函数单向 S- 粗集对偶$((R,\bar{F})_\circ(Q'),(R,\bar{F})^\circ(Q'))$生成的 $\bar{F}$- 粗积分,称$\int_a^b p_{-,\bar{F}}(x)\mathrm{d}x$是函数单向 S- 粗集对偶生成的下近似积分,$\int_a^b p^{\bar{F}}(x)\mathrm{d}x$是函数单向 S- 粗集对偶生成的上近似积分。

定义 1.3 F- 粗积分与 $\bar{F}$- 粗积分统称为粗积分。

定理 1.1(粗积分萎缩定理) 对于粗积分$(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x)$,当上近似积分与下近似积分对应的属性集都有外来属性迁入时,粗积分萎缩,有下列不等式成立:

$$(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x)\geqslant(\int_a^b p_F(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^F(x)\mathrm{d}x)。$$

定理 1.2(粗积分扩张定理) 对于粗积分$(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x)$,当上近似积分与下近似积分对应的属性集都有属性迁出时,粗积分扩张,有下列不等式成立:

$$(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x)\leqslant(\int_a^b p_{\bar{F}}(x)\mathrm{d}x,\int_a^b p^{\bar{F}}(x)\mathrm{d}x)。$$

2 粗积分链与粗积分环

定义 2.1 设$[w]^-=(R,F)^\circ(Q^\circ)=\bigcup[w]$;$\alpha^-=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$是$[w]^-$的属性集,$p^-(x)$是$[w]^-$生成的函数,若有属性列$\{\beta_i\mid i=1,2,\cdots,k,\beta_i\in V,\beta_i\notin\alpha^-\}$逐个迁入属性集$\alpha^-$时,称上近似积分不等式序列

$$\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b p^{\bar{F}_1}(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b p^{\bar{F}_2}(x)\mathrm{d}x\geqslant\cdots\geqslant\int_a^b p^{\bar{F}_k}(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

为上积分链 Ⅰ,其中$\int_a^b p^{\bar{F}_j}(x)\mathrm{d}x$是有$j$个属性迁入属性集$\alpha^-$时,函数生成的上近似积分在不混淆的情况下,简称$\alpha^-$是$\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x$的属性集。

定义 2.2 设$[w]^-=(R,F)^\circ(Q^\circ)=\bigcup[w]$,$\alpha^-=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$是$[w]^-$的属性集,$p^-(x)$是$[w]^-$生成的函数,若有属性列$\{\alpha_j\mid\alpha_j\in\alpha^-\}$逐个迁出属性集$\alpha^-$时,有上近似积分不等式成立:

$$\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p^{\bar{F}_1}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p^{\bar{F}_2}(x)\mathrm{d}x\leqslant\cdots\leqslant\int_a^b p^{\bar{F}_l}(x)\mathrm{d}x, \tag{2}$$

称式(2)为上积分链 Ⅱ,其中$\int_a^b p^{\bar{F}_j}(x)\mathrm{d}x$是共有$j$个属性迁出属性集$\alpha^-$时,函数生成的上近似积分。

定义 2.3 上积分链 Ⅰ 与上积分链 Ⅱ 可连接在一起,称下式为上积分链:

$$\int_a^b p^{\bar{F}_k}(x)\mathrm{d}x\leqslant\cdots\leqslant\int_a^b p^{\bar{F}_1}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p^{\bar{F}_1}(x)\mathrm{d}x\leqslant\cdots\leqslant\int_a^b p^{\bar{F}_l}(x)\mathrm{d}x。$$

定义 2.4 $p_-(x)$是函数S- 粗集下近似$(R,F)_\circ(Q^\circ)$的生成函数,若有属性列$\{\beta_i\mid i=1,2,\cdots,k,\beta_i\in V,\beta_i\notin\alpha^-\}$逐个迁入属性集$\alpha_-$时,有下近似积分不等式成立:

$$\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b p_{-,F_1}(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b p_{-,F_2}(x)\mathrm{d}x\geqslant\cdots\geqslant\int_a^b p_{-,F_k}(x)\mathrm{d}x。 \tag{3}$$

称式(3)为下积分链 Ⅰ,称α_-是$\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x$的属性集。

定义 2.5 $p_-(x)$是函数S- 粗集下近似$(R,F)_\circ(Q^\circ)$的生成函数,若有属性列$\{\alpha_j\mid j=s+1,s+2\cdots,s+l,l\leqslant p,\alpha_j\in\alpha^-\}$逐个迁出属性集$\alpha_-$时,有下近似积分不等式成立:

$$\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p_{-,\bar{F}_1}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p_{-,\bar{F}_2}(x)\mathrm{d}x\leqslant\cdots\leqslant\int_a^b p_{-,\bar{F}_l}(x)\mathrm{d}x。 \tag{4}$$

称式(2)为下积分链 Ⅱ。

定义 2.6　下积分链 Ⅰ、Ⅱ 统称为下积分链;上积分链 Ⅰ、Ⅱ 统称上积分链;上、下积分链统称积分链。

定义 2.7　称积分链上的每一个积分为积分链结,简称链结;相邻链结积分值的绝对差称为链结距。

定义 2.8　称上积分链Ⅰ是$(f,\bar{f})$- 可闭,如果上积分链 Ⅰ 中不全取等号,且存在$f\in F,\bar{f}\in \bar{F}$,使得$\alpha_1 \rightarrow \alpha', \alpha_n \rightarrow \alpha'$,此时,称上积分链 Ⅰ 是$(f,\bar{f})$- 上积分环。

定义 2.9　一条积分链上链结的个数称为该积分链的长度。

命题 1　每条积分链链结距不等。

命题 2　每条积分链粗链结的个数不一定相等。

定理 2.1(上积分链基数有序定理)　设 α_i^- 为上积分链中积分链结$\int_a^b p_{F_i}^-(x)\mathrm{d}x$ 的属性集,则

$$\mathrm{card}(\alpha_1^-) > \mathrm{card}(\alpha_2^-) > \cdots > \mathrm{card}(\alpha_n^-)。$$

定理 2.2(下积分链基数有序定理)　设 $\alpha_{i,-}$ 为下积分链中积分链结$\int_a^b p_{-,F_j}(x)\mathrm{d}x$ 的属性集,则

$$\mathrm{card}(\alpha_{1,-}) > \mathrm{card}(\alpha_{2,-}) > \cdots > \mathrm{card}(\alpha_{n,-})。$$

定理 2.3(粗积分链定理)　称上积分链与下积分链对应积分构成的积分对链为粗积分链:

$$\left(\int_a^b p_{-,F_k}(x)\mathrm{d}x,\ \int_a^b p_{F_k}^-(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \left(\int_a^b p_{-,F_{k-1}}(x)\mathrm{d}x,\ \int_a^b p_{F_{k-1}}^-(x)\mathrm{d}x\right)\cdots \leqslant \left(\int_a^b p_{-,F_1}(x)dx,\ \int_a^b p_{F_1}^-(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \left(\int_a^b p_{-,\bar{F}_1}(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p_{\bar{F}_1}^-(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \cdots \leqslant \left(\int_a^b p_{-,\bar{F}_l}(x)\mathrm{d}x,\ \int_a^b p_{\bar{F}_l}^-(x)\mathrm{d}x\right)。$$

证明　由定义 2.3 与定义 2.6 可知对于由函数 S- 粗集生成的粗积分$\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)$,当上近似积分与下近似积分对应的属性集有属性逐个迁入时,可生成粗积分链上段

$$\left(\int_a^b p_{-,F_k}(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p_{F_k}^-(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \cdots \leqslant \left(\int_a^b p_{-,F_1}(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p_{F_1}^-(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right);$$

有属性逐个迁出时,可以生成粗积分链下段

$$\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \left(\int_a^b p_{-,\bar{F}_1}(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p_{\bar{F}_1}^-(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \cdots \leqslant \left(\int_a^b p_{-,\bar{F}_l}(x)\mathrm{d}x,\ \int_a^b p_{\bar{F}_l}^-(x)\mathrm{d}x\right)。$$

显然粗积分链上段与粗积分链下段通过粗积分$\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)$连成一粗积分链。定理 2.3 得证。

定理 2.4(积分链存在性定理)　设$[w]^- = (R,F)^\circ(Q^\circ) = \bigcup [w]$;$\alpha^- = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$是$[w]^-$的属性集,$p^-(x)$是$[w]^-$生成的函数,当属性列$\{\beta_i \mid i = 1,2,\cdots,k, \beta_i \in V, \beta_i \notin \alpha^-\}$中属性个数 $k \geqslant 2$,且上近似不等式序列不全取等号时,即存在$\int_a^b p_{F_i}^-(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b p_{F_j}^-(x)\mathrm{d}x$,则上积分链存在。

定理 2.4 的结论是显然的,其他积分链存在的条件也类似。

定理 2.5(上积分环定理)　设 L_1、L_2 是由同一粗积分$\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)$在不同的元素迁移族下形成的两个上积分链,如果上积分链 L_1 的第 c 个链结与上积分链 L_2 中的第 d 个链结相等,则 L_1、L_2 可构成一个积分环,当且仅当有上积分链 L_1 与 L_2 中两个首链结相等,两个尾链结也相等时,L_1、L_2 构成一个最大的积分环。

定理 2.6(下积分环定理)　设 L'_1、L'_2是由同一粗积分$\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)$在不同的元素迁移族下形成的两个下积分链,如果下积分链 L'_1的第 c 个链结与下积分链L'_2中的第 d 个链结相等,则 L'_1、L'_2可构成一个积分环,且当仅有下积分链 L'_1与 L'_2中两个首尾链结分别相等时,L'_1、L'_2 构成一个最大的积分环。

定理 2.7(积分环定理)　设 T_1、T_2 是由同一粗积分$\left(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x\right)$在不同的元素迁移族下形成的两个积分链,如果积分链 T_1 的第 c 个链结与积分链 T_2 中的第 d 个链结相等,则 T_1、T_2 可构成一个积分环,且当仅有积分链 T_1 与 T_2 中两个首尾链结分别相等时,T_1、T_2 构成一个最大的积分环。

3 中值定理在粗积分中的应用

引理 3.1 对于粗积分$(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x)$存在一对实数$(c_-, c^-)$, $a < c_- < b$, $a < c^- < b$,使得$(\int_a^b p_-(x)\mathrm{d}x, \int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x) = (p_-(c_-)(b-a), p^-(c^-)(b-a))$。

证明见文献[14]。

定理 3.1 对于上积分链 Ⅰ,存在实数列$\{c_i \mid i = 0,1,2,\cdots,k\}$,使下列不等式成立:

$$\int_a^b p^-(x)\mathrm{d}x = p^-(c_0)(b-a), a < c_0 < b; \int_a^b p^-_{F_i}(x)\mathrm{d}x = p^-_{F_i}(c_i)(b-a), i = 1,2,\cdots,k, a < c_i < b;$$

且$p^-(c_0) \leqslant p^-_{F_1}(c_1) \leqslant \cdots \leqslant p^-_{F_k}(c_k)$。

对于上积分链 Ⅱ,下积分链 Ⅰ、Ⅱ,上积分链,下积分链都有相似的结论。

由积分中值定理及上积分链的定义可直接得到结论,证明略。

定理 3.2 粗积分链中,存在实数对列$\{(d_i, d^i) \mid i = 1,2,\cdots,k+l+1\}$,使下式成立:

$$\begin{aligned}&(p_{-,F_k}(d_1)(b-a), p^-_{F_k}(d^1)(b-a)) \leqslant \cdots \leqslant (p_{-,F_1}(d_k)(b-a), p^-_F(d^k)(b-a)) \leqslant \\ &\quad (p_-(d_{k+1})(b-a), p^-(d^{k+1})(b-a)) \leqslant (p_{-,\bar{F}_1}(d_{k+2})(b-a), p^-_{\bar{F}}(d^{k+2})(b-a)) \leqslant \cdots \leqslant \\ &\quad (p_{-,\bar{F}_l}(d_{k+l+1})(b-a), p^-_{\bar{F}_l}(d^{k+l+1})(b-a))。\end{aligned}$$

由粗积分链的定义及积分中值定理直接得到,证明略。

4 结论

本文基于函数S-粗集和F-粗积分,研究粗积分的动态特征,给出粗积分链和粗积分环的概念,并对它们的一些特征进行了讨论。提出粗积分链和粗积分环定理,并且将牛顿积分中值定理推广到了粗积分链中。

参考文献:

[1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11:341-356.

[2] SHI Kaiquan. S-rough sets and its applications in diagnosis-recognition for disease[J]. IEEE Proceedings of the First International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 2002, 1:50-54.

[3] SHI Kaiquan, CUI Yuquan. F-decomposition and $\bar{F}$-reduction of S-rough sets[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2004, 4:487-499.

[4] SHI Kaiquan. S-rough sets and knowledge separation[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2005, 2:403-410.

[5] SHI Kaiquan, CHANG Tingcheng. One direction S-rough sets[J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 2:319-334.

[6] SHI Kaiquan. Two direction S-rough sets[J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 2:335-349.

[7] CUI Minghui, SHI Kaiquan. f-heredity knowledge and f-heredity mining[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2006, 1:101-106.

[8] HU Haiqing, WANG Yan, SHI Kaiquan. S-rough communication and its characteristics[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2007, 1:148-154.

[9] YIN Shoufeng, HU Haiqing, SHI Kaiquan. Two direction S-rough communication and its heredity-variation characteristcs[J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2007, 3:593-606.

[10] 于秀清,史开泉.函数单向 S-粗集生成的 F-粗积分[J].山东大学学报:理学版,2008,43(2):29-34.

[11] 于秀清,史开泉.函数单向 S-粗集对偶生成的 $\bar{F}$-粗积分[J].聊城大学学报:自然科学版,2007,20(4):15-19.

(编辑:陈丽萍)