

文章编号:1671-9352(2009)02-0045-07

两点边值问题基于三次样条插值的高精度有限体积元方法

高广花,王同科

(天津师范大学数学科学学院,天津 300387)

摘要:针对常微分方程线性和非线性两点边值问题,提出了基于三次样条插值的高精度有限体积元方法,给出了具体计算格式,讨论了格式所具有的优良性质——正型性,并应用能量方法给出了收敛性分析,证明了格式按照离散能量模具有四阶精度。最后给出线性、奇异源项和非线性数值算例,验证了算法的有效性和广泛适用性。

关键词:两点边值问题;三次样条插值;高精度有限体积元方法;收敛性分析

中图分类号:O241.81 文献标志码:A

A high accuracy finite volume element method based on cubic spline interpolation for two-point boundary value problems

GAO Guang-hua, WANG Tong-ke

(School of Mathematical Sciences, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China)

Abstract: A high accuracy finite volume element method was given based on cubic spline interpolation for linear and nonlinear two-point boundary value problems of ordinary differential equations. The computational scheme(FVCS) was derived and the property of positive type was discussed. Further we presented the convergence analysis and the scheme was proved having fourth order error estimate in discrete energy norm. Finally, numerical examples including linear and nonlinear problems, and source term with singularity problem were given to illustrate the high efficiency and wide adaptation of the method.

Key words: two-point boundary value problem; cubic spline interpolation; high accuracy finite volume element method; convergence analysis

本文考虑线性和非线性两点边值问题基于三次样条插值的高精度有限体积元方法。有限体积元方法(FVEM)^[1,2]通过微分方程的积分守恒形式,使用有限元子空间作为试探函数空间导出计算格式。李荣华教授等在文献[2]中给出了一些高精度有限体积元计算格式,王同科通过高次 Lagrange 插值得到了另外一类高精度有限体积元格式^[3,4]。三次样条插值作为一种分段三次插值,具有计算精度高,光滑性好等优点,在许多领域中有重要应用,但将样条插值应用于有限体积元方法的文献尚未见报道。

本文针对两点边值问题,应用三次样条插值对它的积分守恒形式进行离散,得到了一类具有四阶精度的有限体积元格式,并将该格式转化为仅含有未知函数节点值的五对角线性代数方程组。该方程组的系数矩阵当 h 满足一定条件时为 M 矩阵,表明本文所得有限体积元格式为正型格式,满足离散极值原理,保持了方程本身的物理性质。本文第一节给出了三次样条插值,并说明单元中点为一阶导数超收敛点。第二节针对 Dirichlet 边界条件下的线性两点边值问题,导出了基于三次样条插值的有限体积元格式,并简要分析了格式的正型性。第三节给出了该格式在离散 H^1 半模和离散 L^2 模下的收敛性分析,得到了四阶收敛精度。第

四节结合 Newton 迭代,给出了本文算法在求解非线性和奇异源项两点边值问题方面的应用。第五节分别给出线性、奇异源项和非线性数值算例,进一步验证了该方法的有效性和广泛适用性。

1 三次样条插值及其导数超收敛点

设 $\{(x_i, u_i)\}_{i=0}^n$ 为等距的 $n+1$ 个节点,其中 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 。三次样条插值函数 $S(x)$ 满足条件 $S(x_i) = u_i (i=0, 1, \dots, n)$, 且具有二阶光滑性。设 $h = x_i - x_{i-1}$, $S''(x_i) = M_i$, 则^[5]

$$S(x)|_{[x_{i-1}, x_i]} = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

其中 $a_i = u_{i-1}$, $b_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{h(M_i + 2M_{i-1})}{6}$, $c_i = \frac{M_{i-1}}{2}$, $d_i = \frac{M_i - M_{i-1}}{6h}$ 。由 $S'(x)$ 在内点 x_i 处的连续性得恒等式

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = 6(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})/h^2, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (1.2)$$

边界条件 M_0, M_n 已知。设 $u(x) \in C^4[a, b]$, 则其三次样条插值函数 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 有如下估计^[5]:

$$|u^{(j)}(x) - S^{(j)}(x)| \leq C_j h^{4-j} \|u^{(4)}(x)\|_\infty, \quad j = 0, 1, 2, \quad C_0 = \frac{1}{16}, \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2}. \quad (1.3)$$

令 $x_{i-\frac{1}{2}} = (x_{i-1} + x_i)/2$, 由式(1.1)直接计算得

$$S'(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{h}{24}(M_i - M_{i-1}).$$

当 $u(x) \in C^5[a, b]$ 时, 由 Taylor 公式知

$$\frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h} - \frac{h}{24}[u''(x_i) - u''(x_{i-1})] = u'(x_{i-\frac{1}{2}}) + O(h^4). \quad (1.4)$$

由式(1.3)和式(1.4)知, 三次样条插值导函数对所求函数的一阶导数进行逼近时, 一般仅有三阶精度。但当被插值函数 u 有更高的光滑性时, 在单元中点 $x_{i-\frac{1}{2}}$ 处, 插值函数一阶导数有高一阶的逼近精度, 称 $x_{i-\frac{1}{2}} (i = 1, 2, \dots, n)$ 为三次样条插值一阶导数超收敛点。若将这些超收敛点作为对偶剖分节点, 则可以得到具有超收敛性的有限体积元方法。

2 两点边值问题基于三次样条插值的有限体积元方法(FVCS)

本节考虑区间 $I = [a, b]$ 上的线性两点边值问题

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a, b), \quad (2.1a)$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta, \quad (2.1b)$$

其中 q, f 充分光滑, 且 $q(x) \geq 0$, α, β 为已知常数。

首先, 对区间 $I = [a, b]$ 作剖分 T_h , 节点为 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 。设 T_h 为均匀剖分, 步长为 h 。设 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{h}{2}$, 记 $I_i^* = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] (x_{-\frac{1}{2}} = x_0, x_{n+\frac{1}{2}} = x_n)$, 则所有 $I_i^* (i = 0, 1, \dots, n)$ 构成 T_h 的对偶剖分, I_i^* 称为控制体积。在 $I_i^* (i = 1, \dots, n-1)$ 上对方程(2.1a)进行积分, 并应用分部积分公式, 得(2.1)的积分守恒形式为, 求 $u \in H_E^1 = \{u, u \in H^1(I), u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$, 使得

$$u'(x_{i-\frac{1}{2}}) - u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + \int_{I_i^*} qu dx = \int_{I_i^*} f(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.2)$$

设 U_h 为 $H_E^1(I)$ 的三次样条插值函数子空间, 则式(2.2)的近似形式为, 求 $u_h \in U_h$, 使得

$$u'_h(x_{i-\frac{1}{2}}) - u'_h(x_{i+\frac{1}{2}}) + \int_{I_i^*} qu_h dx = \int_{I_i^*} f(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.3)$$

记 $u_i = u(x_i)$, 由第1节式(1.1)知当 $x \in [x_{i-1}, x_i]$ 时, $u(x)$ 的三次样条插值函数为

$$\Pi_3 u = u_{i-1} + \left[\frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{h(M_i + 2M_{i-1})}{6} \right] (x - x_{i-1}) + \frac{M_{i-1}}{2} (x - x_{i-1})^2 + \frac{M_i - M_{i-1}}{6h} (x - x_{i-1})^3. \quad (2.4)$$

设 $Du = (\Pi_3 u)'$, 由式(2.4) 知

$$Du(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{h}{24}(M_i - M_{i-1}). \tag{2.5}$$

对于式(2.3) 左端的积分项,可由式(2.4) 及 Simpson 公式求得,这样处理积分项精度比较高,对于非均匀网格亦可以很好地应用,但所得格式计算量大.在保持离散精度的前提下,为适当减少计算量,采用另一种较为简单的计算方法^[4].在 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ 上,对 u 作二次插值,插值函数为

$$\Pi_2 u = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)u_{i-1} - (\xi^2 - 1)u_i + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)u_{i+1}, \quad \xi = \frac{x - x_i}{h}.$$

对 qu 应用上述插值公式,得

$$\int_{I_i^*} qu dx \approx S(u)_i := \frac{h}{24}(q_{i-1}u_{i-1} + 22q_iu_i + q_{i+1}u_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \tag{2.6}$$

令 $U_i = u_h(x_i)$, $DU = u'_h$, 将式(2.5) 和式(2.6) 代入式(2.3), 并取 $M_0 = q_0u_0 - f_0$, $M_n = q_nu_n - f_n$, 得基于三次样条插值的有限体积元格式(FVCS)

$$DU(x_{i-\frac{1}{2}}) - DU(x_{i+\frac{1}{2}}) + S(U)_i = \int_{I_i^*} f(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \tag{2.7}$$

式(2.7) 和式(1.2) 为关于 M_1, M_2, \dots, M_{n-1} 和 U_1, U_2, \dots, U_{n-1} 的 $2n - 2$ 阶线性代数方程组,阶数较高,直接求解困难.对于式(2.7),进一步消去 M_i , 得

$$AU = b, \quad A = (a_{ij})_{(n-1) \times (n-1)}, \quad b = (b_i)_{n-1}. \tag{2.8}$$

若记 $F_i = \int_{I_i^*} f(x) dx$, 则得

$$a_{i,j} = \begin{cases} 198 + 89q_jh^2, & i = j = 1 \text{ 或 } n - 1, \\ 90(2 + q_jh^2), & 2 \leq i = j \leq n - 2, \\ 2(-36 + 13q_jh^2), & |i - j| = 1, \\ -18 + q_jh^2, & |i - j| = 2, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} 24h(4F_1 + F_2) + 2(54 - 5h^2q_0)\alpha + 6h^2f_0, & i = 1, \\ 24h(F_1 + 4F_2 + F_3) + (18 - h^2q_0)\alpha, & i = 2, \\ 24h(F_{i-1} + 4F_i + F_{i+1}), & 3 \leq i \leq n - 3, \\ 24h(F_{n-3} + 4F_{n-2} + F_{n-1}) + (18 - h^2q_n)\beta, & i = n - 2, \\ 24h(F_{n-2} + 4F_{n-1}) + 2(54 - 5h^2q_n)\beta + 6h^2f_n, & i = n - 1. \end{cases}$$

式(2.8) 为五对角线性代数方程组.具体求解时,右端项可使用两点以上的 Gauss 求积公式或 Simpson 求积公式.由 A 的表达式知,只要 $36 - 13q_ih^2 \geq 0, 18 - q_ih^2 \geq 0, i = 1, 2, \dots, n - 1$, 则式(2.8) 为正型格式.记 $M = \max_{x \in [a, b]} q(x)$, 那么,当 $Mh^2 \leq \frac{36}{13}$ 时,就能保证 A 为 L 矩阵(定义见文献[6]).又 $q(x) \geq 0$, 故 A 必对角占优,即 A 为 M 矩阵.于是,有如下定理.

定理 1 当 $Mh^2 \leq \frac{36}{13}$ ($M = \max_{x \in [a, b]} q(x)$) 时, (2.8) 为正型格式.

由定理 1 知,只要 h 适当小, (2.8) 为正型格式,满足离散极值原理,从而格式保持了方程本身的物理性质.另外,通常的高精度差分格式不满足正型格式条件,这里,通过三次样条插值得到了一类高精度的正型差分格式.

3 收敛性分析

用 $|\cdot|_k, \|\cdot\|_k$ 分别表示通常 Sobolev 空间的 k 阶半模、全模.对任意网格函数 e ($e_0 = e_n = 0$), 定义其

离散 L^2 模、 H^1 半模如下:

$$\|e\|_{0,h} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} e_i^2 h\right)^{\frac{1}{2}}, \quad |e|_{1,h} = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i - e_{i-1}}{h}\right)^2 h\right)^{\frac{1}{2}}.$$

令 $u_i = u(x_i)$, 并设 $\tilde{M}_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{M}_{i-1} + 4\tilde{M}_i + \tilde{M}_{i+1} = 6(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})/h^2, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \tilde{M}_0 = M_0, \tilde{M}_n = M_n. \end{cases}$$

令 $\tilde{D}u(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{h}{24}(\tilde{M}_i - \tilde{M}_{i-1})$, 将守恒形式(2.2) 离散为

$$\tilde{D}u(x_{i-\frac{1}{2}}) - \tilde{D}u(x_{i+\frac{1}{2}}) + S(u)_i = \int_{I_i^*} f(x) dx + \tilde{R}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{3.1}$$

其中 \tilde{R}_i 为格式(2.7) 的修正截断误差, 且

$$\tilde{R}_i = [\tilde{D}u(x_{i-\frac{1}{2}}) - u'(x_{i-\frac{1}{2}})] - [\tilde{D}u(x_{i+\frac{1}{2}}) - u'(x_{i+\frac{1}{2}})] + S(u)_i - \int_{I_i^*} qu dx.$$

令 $e_i^u = u_i - U_i, e_i^m = \tilde{M}_i - M_i$, 式(3.1) 减去式(2.7) 得误差方程

$$\begin{cases} \frac{1}{h}(-e_{i-1}^u + 2e_i^u - e_{i+1}^u) + \frac{h}{24}(e_{i-1}^m - 2e_i^m + e_{i+1}^m) + S(e^u)_i = \tilde{R}_i, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ e_0^u = e_n^u = 0, e_0^m = e_n^m = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

上式两边同乘以 e_i^u , 然后对 i 从 1 到 $n-1$ 求和, 并利用分部求和公式, 得

$$|e^u|_{1,h}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} S(e^u)_i e_i^u - \frac{h}{24} \sum_{i=1}^n (e_i^m - e_{i-1}^m)(e_i^u - e_{i-1}^u) = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{R}_i e_i^u. \tag{3.3}$$

引理 1 $\frac{h}{24} \sum_{i=1}^n (e_i^m - e_{i-1}^m)(e_i^u - e_{i-1}^u) \leq \frac{1}{2} |e^u|_{1,h}^2$.

证明 由 Cauchy 不等式, 有

$$\frac{h}{24} \sum_{i=1}^n (e_i^m - e_{i-1}^m)(e_i^u - e_{i-1}^u) \leq \frac{h}{24} \left(\sum_{i=1}^n (e_i^m - e_{i-1}^m)^2 h\right)^{\frac{1}{2}} |e^u|_{1,h} \leq \frac{h}{24} \left(4 \sum_{i=1}^n (e_i^m)^2 h\right)^{\frac{1}{2}} |e^u|_{1,h},$$

而由文献[7](引理 2) 知

$$4 \sum_{i=1}^n (e_i^m)^2 \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{6(e_{i-1}^u - 2e_i^u + e_{i+1}^u)}{h^2}\right)^2 \leq \frac{144}{h^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i^u - e_{i-1}^u}{h}\right)^2 = \frac{144}{h^3} |e^u|_{1,h}^2.$$

将上式代入前式, 引理 1 得证。

引理 2 若 $q(x) \in C^1(I)$, 且 $q(x) \geq 0$, 则对网格函数 $e (e_0 = e_n = 0)$, 存在与 h 无关的正常数 C , 满足

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} S(e^u)_i e_i^u - \sum_{i=1}^{n-1} q_i (e_i^u)^2 h \right| \leq Ch^2 |e^u|_{1,h}^2.$$

证明 由式(2.6) 及分部求和公式, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} S(e^u)_i e_i^u - \sum_{i=1}^{n-1} q_i (e_i^u)^2 h &= \frac{h}{24} \sum_{i=1}^n (q_i e_i^u - q_{i-1} e_{i-1}^u)(e_{i-1}^u - e_i^u) = \\ &= -\frac{h}{24} \sum_{i=1}^n q_i (e_i^u - e_{i-1}^u)^2 - \frac{h}{24} \sum_{i=1}^n (q_i - q_{i-1}) e_{i-1}^u (e_i^u - e_{i-1}^u), \end{aligned}$$

其中 $q_i - q_{i-1} = q'(\theta_i)h$. 由 Cauchy 不等式及 $\|e^u\|_{0,h} \leq C |e^u|_{1,h}, q \in C^1(I)$, 进一步可导出

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n-1} S(e^u)_i e_i^u - \sum_{i=1}^{n-1} q_i (e_i^u)^2 h \right| &\leq \frac{h^2}{24} \max_{x \in I} q(x) |e^u|_{1,h}^2 + \frac{h^2}{24} \max_{x \in I} |q'(x)| \|e^u\|_{0,h} |e^u|_{1,h} \leq \\ &= Ch^2 |e^u|_{1,h}^2. \end{aligned}$$

由引理 1, 引理 2 及式(3.3) 知, 存在 $h_0 > 0$, 当 $h < h_0$ 时, $\exists \gamma > 0$, 使得

$$\gamma |e^u|_{1,h}^2 \leq \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{R}_i e_i^u. \tag{3.4}$$

引理 3 设 $u \in H_x^1(I) \cap H^5(I)$, 则

$$|\tilde{D}u(x_{i-\frac{1}{2}}) - u'(x_{i-\frac{1}{2}})| \leq Ch^{\frac{7}{2}} |u|_{5,[x_{i-2}, x_{i+1}]}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.5}$$

证明 记 $\bar{D}u(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{h}{24}(u''_i - u''_{i-1})$, 则

$$\tilde{D}u(x_{i-\frac{1}{2}}) - \bar{D}u(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{h}{24}[(u''_i - \tilde{M}_i) - (u''_{i-1} - \tilde{M}_{i-1})].$$

由文献[8]知, $\tilde{M}_i = u''_i - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_{i1})$, $\tilde{M}_{i-1} = u''_{i-1} - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_{i2})$, 其中 $\xi_{i1} \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, $\xi_{i2} \in [x_{i-2}, x_i]$. 故

$$|\tilde{D}u(x_{i-\frac{1}{2}}) - \bar{D}u(x_{i-\frac{1}{2}})| = \frac{h^3}{288} |u^{(4)}(\xi_{i1}) - u^{(4)}(\xi_{i2})| \leq \frac{h^3}{288} \int_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} |u^{(5)}(x)| dx \leq Ch^{\frac{7}{2}} |u|_{5,[x_{i-2}, x_{i+1}]}$$

又 $|\bar{D}u(x_{i-\frac{1}{2}}) - u'(x_{i-\frac{1}{2}})| \leq Ch^{\frac{7}{2}} |u|_{5,[x_{i-1}, x_i]}$. 事实上, 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 令 $\xi = \frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{h}$, 则

$$\bar{D}u(x_{i-\frac{1}{2}}) - u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{h} \left[u_i - u_{i-1} - \frac{1}{24} \frac{d^2 u}{d\xi^2} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{24} \frac{d^2 u}{d\xi^2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{du}{d\xi}(0) \right] := \frac{1}{h} E(u).$$

$E(u)$ 作为 u 的线性泛函, 有 $|E(u)| \leq C \|u\|_{2,\infty,[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$, 又 $H^5 \hookrightarrow C^2$, 从而 $|E(u)| \leq C \|u\|_{5,[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$.

当 $u = \xi^k$ ($k = 0, 1, \dots, 4$) 时, $E(u) \equiv 0$, 由 Bramble-Hilbert 引理, $|E(u)| \leq C |u|_{5,[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$. 使用坐标变换,

$|u|_{5,[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} = h^{\frac{9}{2}} |u|_{5,[x_{i-1}, x_i]}$, 故 $|\bar{D}u(x_{i-\frac{1}{2}}) - u'(x_{i-\frac{1}{2}})| \leq Ch^{\frac{7}{2}} |u|_{5,[x_{i-1}, x_i]}$. 因此,

$$|\tilde{D}u(x_{i-\frac{1}{2}}) - u'(x_{i-\frac{1}{2}})| \leq |\tilde{D}u(x_{i-\frac{1}{2}}) - \bar{D}u(x_{i-\frac{1}{2}})| + |\bar{D}u(x_{i-\frac{1}{2}}) - u'(x_{i-\frac{1}{2}})| \leq Ch^{\frac{7}{2}} |u|_{5,[x_{i-2}, x_{i+1}]}$$

注意, 上式当 $i = 1$ 时, $x_{-1} = x_0$; 当 $i = n$ 时, $x_{n+1} = x_n$. 引理 3 得证。

引理 4 若 $q \in C^4(I)$, $u \in H^1_E(I) \cap H^4(I)$, 则有

$$\left| S(u)_i - \int_{I_i^*} qu dx \right| \leq Ch^{\frac{9}{2}} \|u\|_{4,[x_{i-1}, x_{i+1}]}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

证明 在 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ 上, 令 $\eta = \frac{x - x_i}{h}$, 则

$$S(u)_i - \int_{I_i^*} qu dx = h \left[\frac{1}{24}(q_{i-1}u_{i-1} + 22q_iu_i + q_{i+1}u_{i+1}) - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} qu d\eta \right] := hF(qu).$$

$F(qu)$ 作为 qu 的线性泛函, 有 $F(qu) \leq C \|qu\|_{0,\infty,[-1,1]}$, 又 $H^4 \hookrightarrow C^0$, 从而 $F(qu) \leq C \|qu\|_{4,[-1,1]}$. 当 $qu = 1, \eta, \eta^2, \eta^3$ 时, $F(qu) \equiv 0$, 由 Bramble-Hilbert 引理, $F(qu) \leq C |qu|_{4,[-1,1]} \leq Ch^{\frac{7}{2}} \|u\|_{4,[x_{i-1}, x_{i+1}]}$. 引理 4 得证。

由引理 3, 引理 4 及 $H^5 \hookrightarrow H^4$ 知

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{R}_i e_i^u \right| = \left| \sum_{i=1}^n (\tilde{D}u(x_{i+\frac{1}{2}}) - u'(x_{i+\frac{1}{2}}))(e_i^u - e_{i-1}^u) + \sum_{i=1}^{n-1} (S(u)_i - \int_{I_i^*} qu dx) e_i^u \right| \leq Ch^4 |u|_5 |e^u|_{1,h} + Ch^4 \|u\|_4 \|e^u\|_{0,h} \leq Ch^4 \|u\|_5 |e^u|_{1,h}. \tag{3.6}$$

从而, 由式(3.4), 式(3.6), 得

$$\|u - U\|_{1,h} = |e^u|_{1,h} \leq Ch^4 \|u\|_5. \tag{3.7}$$

由于 $\|u - U\|_{0,h} \leq C \|u - U\|_{1,h}^{[9]}$, 进一步有

$$\|u - U\|_{0,h} \leq Ch^4 \|u\|_5. \tag{3.8}$$

将以上结果总结为如下定理。

定理 2 设 $q \in C^4(I)$, 且 $q \geq 0$, $u \in H^1_E(I) \cap H^5(I)$ 是(2.1) 或其等价形式(2.2) 的解, U 是有限体积元格式(2.7) 或其约化形式(2.8) 的解, 则当 h 充分小时, U 按离散 H^1 半模和离散 L^2 模收敛于 u , 且分别有误差估计式(3.7) 和(3.8)。

4 非线性和奇异源项两点边值问题

本节将本文算法应用于求解非线性和奇异源项两点边值问题。首先考虑下面的非线性问题：

$$-u''(x) = f(x, u(x)), \quad x \in (a, b), \quad u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \quad (4.1)$$

假设 $f: [a, b] \times R$ 连续并关于 u 连续可微, 定义 $F(u)(x) = -u''(x) - f(x, u(x))$, 则求解 $F(u)(x) = 0$ 的 Newton 迭代法为 $u_{k+1} = u_k - [F'(u_k)]^{-1} F(u_k)$, 其中 $F'(u)$ 为 Fréchet 导数^[10], 有

$$F'(u)(y)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F(u + hy)(x) - F(u)(x)] = -y''(x) - \frac{\partial f(x, u(x))}{\partial u} y(x).$$

从而, 在迭代的每一步, 只需应用本文算法求解如下线性两点边值问题:

$$-u''_{k+1}(x) - \frac{\partial f(x, u_k(x))}{\partial u} u_{k+1}(x) = f(x, u_k(x)) - \frac{\partial f(x, u_k(x))}{\partial u} u_k(x), \quad x \in (a, b), \quad (4.2a)$$

$$u_{k+1}(a) = u_{k+1}(b) = 0. \quad (4.2b)$$

其次对于奇异源项两点边值问题^[11], 考虑源项为 Delta 函数的情形, 即在式(2.1)中取 $f(x) = \delta(x - \xi)$, $\xi \in (a, b)$. 由于 Delta 函数不同于通常意义下的函数, 一般的差分方法难以直接应用. 但有限体积元方法从微分方程的积分守恒形式出发, 结合 Delta 函数定义, 容易知道本文算法应用于求解该问题非常方便. 当然, 由于 u 光滑性差, 误差估计收敛阶将受到一定影响, 下一节将给出具体数值算例.

5 数值算例

为检验本文算法的有效性, 本节分别给出线性、奇异源项和非线性数值例子.

例 1^[12] 在(2.1)中, 令 $a = 0, b = 1, q(x) = \pi^2, f(x) = 2\pi^2 \sin(\pi x)$, 该问题精确解为 $u = \sin \pi x$. 我们分别用本文方法(FVCS), 线性有限元方法(FEM)和三点差分法(FDM)求解, 所得结果如表 1 所示.

表 1 当 $n = 10$ 时不同方法计算所得数值解与精确解(AS)之比较

Table 1 The comparison between the numerical and exact solutions(AS) using different methods with $n = 10$

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
FDM	0.310 290	0.590 200	0.812 350	0.951 060	1.004 120
FEM	0.310 280	0.590 200	0.812 340	0.954 960	1.004 100
FVCS	0.309 009	0.587 770	0.808 996	0.951 032	0.999 975
AS	0.309 017	0.587 785	0.809 017	0.951 0565	1.000 000

进一步, 在不同剖分下分别用 FVCS 方法和三点差分方法进行计算, 所得结果如图 1 所示. 图中直线位置越高, 计算误差越小, 而直线斜率反映数值收敛阶. 从图 1(a) 中可以看出, FVCS 相应直线斜率约为 4, FDM 相应斜率约为 2, 说明了本文格式(2.8)按离散 L^2 模和最大模确实具有四阶精度; 图 1(b) 反映了对偶剖分节点处的一阶导数的逼近阶和格式在 H^1 模下的收敛阶(直线斜率约为 4, 图例中 DSCP 表示一阶导数超收敛点), 验证了三次样条插值在对偶剖分节点处一阶导数的超收敛性和格式在 H^1 模下四阶收敛性.

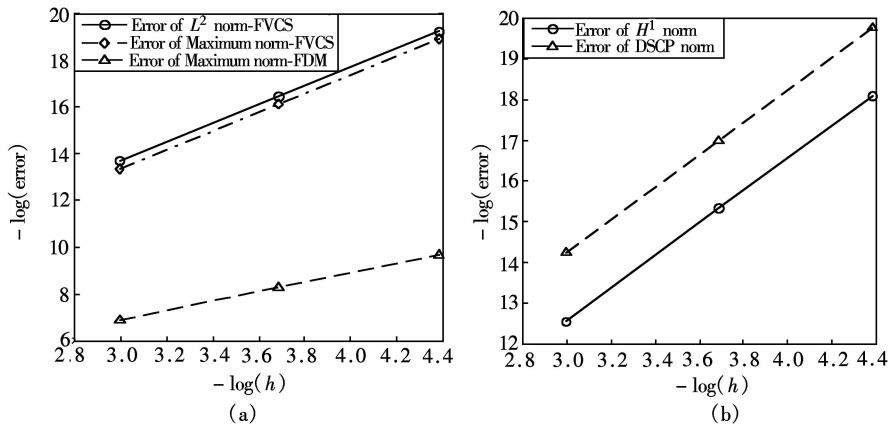


图 1 (a) 数值解最大模及 L^2 模收敛阶; (b) H^1 模收敛阶及对偶节点处一阶导数逼近阶
Fig.1 (a) Convergence order of numerical solution in maximum and L^2 norm;
(b) Convergence order in H^1 norm and maximum norm of first derivative at dual points

例 2^[11] 在式(2.1)中,令 $a = 0, b = 1, q(x) = 0, f(x) = \delta(x - 0.5)$,精确解为 $u(x) = \frac{x}{2}, x \leq 0.5$; $u(x) = \frac{1}{2}(1 - x), x > 0.5$ 。取 $n = 40$,利用格式(2.8)进行计算,所得结果如图 2 所示。图 2(a) 为由格式(2.8)计算所得的近似解曲线,(b)为误差曲线。由图 2可知,该问题在奇点处计算误差较大,如果在奇点附近加密网格,效果会更好。此例说明,虽然在格式推导时假定了函数具有一阶和二阶光滑性,但推导出的格式有比较大的适用性,即使对于非光滑问题亦可以得到令人满意的计算结果。

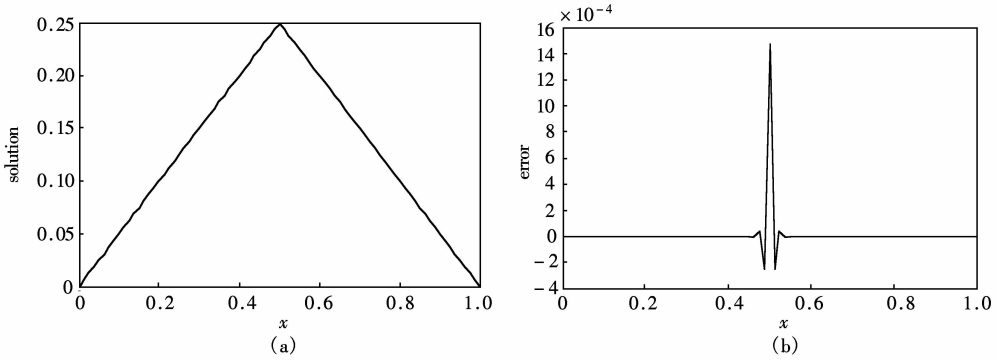


图 2 例 2 计算结果(a) 计算解曲线;(b) 精确解与计算解误差 $u - U$ 曲线

Fig.2 Computational results of example 2 (a) Numerical solution curve; (b) Exact solutions and error curve of $u - U$

例 3 在式(4.1)中,令 $a = 0, b = 1, f(x, u) = 20e^{-0.1u}4^{-x}$ 。精确解为 $u(x) = 20(\ln(1 + x) - x \ln 2)$ 。采用本文算法求解该问题的线性化问题(4.2),取初始近似解函数 $u_0(x) = 20(1 - \ln 2)x$,结果见表 2。

表 2 当 $n = 20$ 时迭代次数及前后两次迭代结果最大误差

Table 2 Iterative steps and the maximum errors of the two successive steps with $n = 20$

k	1	2	3
$\ u_k - u_{k-1}\ _\infty$	0.257 523	$2.517\ 027 \times 10^{-4}$	$2.307\ 023 \times 10^{-10}$

可见迭代很快收敛,而且求得计算解与真解的最大绝对误差为 $2.937\ 334 \times 10^{-6}$,从而验证了本文算法对非线性问题亦非常有效。

参考文献:

- [1] CAI Z Q, STEVE Mccormick. On the accuracy of the finite volume element method for diffusion equations on composite grids[J]. SIAM J Numer Anal, 1990, 27(3):636-655.
- [2] LI Ronghua, CHEN Zhongying, WU Wei. Generalized difference methods for differential equations: numerical analysis of finite volume methods[M]. Marcel Dekker, Inc, 2000.
- [3] WANG Tongke. High accuracy finite volume element method for two-point boundary value problem of second order ordinary differential equations[J]. Numer Math, Journal of Chinese Univ, 2002, 11(2):213-225.
- [4] WANG Tongke. High accuracy finite volume element methods for one-dimensional second order elliptic and parabolic differential equations [J]. Chinese Journal of Numerical Mathematics and Applications, 2003, 25(1):51-64.
- [5] 蒋尔雄,赵风光.数值逼近[M].上海:复旦大学出版社,1996.
- [6] 徐树方.矩阵计算的理论与方法[M].北京:北京大学出版社,1995.
- [7] 孙红,王同科.对流扩散方程基于三次自然样条插值特征差分方法[J].天津师范大学学报:自然科学版, 2005, 25(1):36-39.
- [8] THOMAS R L. Error bounds for interpolating cubic splines under various end conditions[J]. SIAM J Numer Anal, 1974, 11(3):569-584.
- [9] 李荣华.偏微分方程数值解法[M].北京:高等教育出版社,2006.
- [10] ATKINSON Kendall, HAN Weimin. Theoretical numerical analysis[M]. 2nd ed. USA: Springer, 2005.
- [11] ASHYRALIYEV M, BLOM J G, VERWER J G. On the numerical solution of diffusion-reaction equations with singular sources terms [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 216:20-38.
- [12] 蔡大用,白峰杉.高等数值分析[M].北京:清华大学出版社,1997.