第 44 卷 第 12 期 Vol.44 No.12
山东大学学报(理学版) Journal of Shandong University(Natural Science)
2009 年 12 月 Dec. 2009

文章编号:1671-9352(2009)12-0060-04

双复合 Poisson-Geometric 风险模型及其破产概率

周绍伟

(山东科技大学理学院, 山东 青岛 266510)

摘要: 对理赔到达为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型进行了推广,建立了双复合 Poisson-Geometric 风险模型,即保单到达与理赔到达均为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型并对其进行了研究,证明了基于此模型的调节系数是不存在的。并进一步考虑到保险经营中的随机因素,将模型推广为带干扰的情形,得到了破产概率表达式及其上界。

关键词: 复合 Poisson-Geometric 过程;破产概率;调节系数

中图分类号: F840 **文献标志码:** A

A double-compound Poisson-Geometric risk model and ruin probability

ZHOU Shao-wei

(College of Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, Shandong, China)

Abstract: A risk model with compound Poisson-Geometric process is generalized. The double compound Poisson-Geometric risk model in which the arrival of policies and claims follows compound Poisson-Geometric process is constructed and studied. It is proved that the adjustment coefficient does not exist in the model. Furthermore, considering random factors, a perturbed model is studied, and its ruin probability and bound from upper are given.

Key words: compound Poisson-Geometric process; ruin probability; adjustment coefficient

0 引言

风险理论主要研究保险实务中的各种随机风险模型,是当前精算学界的热门课题。经典风险模型的定义为 $U(t)=u+ct-\sum_{k=1}^{N(t)}Z_k$,其中,$u$ 为初始资本,c 为常数,表示保险公司单位时间内的保费收入;$\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为齐次泊松过程,表示理赔次数;$\{Z_k,k\geqslant 1\}$ 为独立同分布的非负随机变量序列,表示个别理赔额;$U(t)$表示到时刻 t 为止的盈余[1-4]。近年来,许多研究人员对其进行了推广。主要体现在以下几个方面:一是理赔次数过程的推广,用更一般的点过程如(负)二项过程、更新过程、Cox 过程、复合 Poisson-Geometric 过程等来描述理赔次数[5-7];二是保单到达过程的推广,假设保费收入不再是线性增长的,而是随机到达的[8-9];另外还有险种的推广以及干扰、利率等随机因素的考虑[10-12]。文献[7]将理赔次数过程推广为复合 Poisson-Geometric 过程,有着实际的应用背景。泊松分布的一个重要性质是方差等于均值。然而,在保险实践中,理赔次数并不完全遵循泊松分布规律,方差往往大于均值,这种现象称为散度偏大,其产生的主要原因是由于保险公司采取了回避风险制度(如免陪制度、无赔款折扣制度等),使得风险事件不一定是赔付事件,这样理赔次数往往小于事故发生次数。比如,在汽车保险中,保险公司规定损失在 500 元以下的不进行赔付。文献[8]研究了双复合泊松风险模型。基于这两种模型,作者均给出了调节系数 R,并得到了由调节系数表达的

收稿日期: 2008-11-07
基金项目: 山东科技大学“春蕾计划”资助项目(2009AZZ086)
作者简介: 周绍伟(1979-),女,硕士,讲师,主要研究领域为风险理论、随机控制理论. Email: zsw9675@163.com

破产概率公式：$\Psi(u)=\dfrac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}\mid T<\infty]}$，其形式与经典风险模型的破产概率公式是相同的。考虑到保单到达的随机性，本文将文献[7]中的模型推广到更为一般的情形。首先建立了双复合 Poisson-Geometric 风险模型，即保单到达与理赔到达均为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型，证明了基于此模型的调节系数是不存在的，因此，不能用传统的方法得到破产概率表达式及其上界。进一步地，考虑到保险经营中的随机因素，将模型推广为带干扰的情形，使其更符合保险实际。针对新模型，得到了破产概率表达式及其上界。

1　预备知识[7]

定义 1　设 $\lambda>0,0\leqslant\rho<1$。称母函数 $G(t)=\exp\left[\dfrac{\lambda(t-1)}{1-\rho t}\right]$ 所对应的分布为复合 Poisson-Geometric 分布，记为 $PG(\lambda,\rho)$。

定义 2　设 $\lambda>0,0\leqslant\rho<1$。称 $\{N(t);t\geqslant0\}$ 为参数为 λ,ρ 的复合 Poisson-Geometric 过程，如果满足：

(1) $N(0)=0$；

(2) $\{N(t),t\geqslant0\}$ 具有独立平稳增量；

(3) 对 $t>0$ 有 $N(t)\sim PG(\lambda t,\rho)$，而且 $E[N(t)]=\dfrac{\lambda t}{1-\rho}$，$\mathrm{Var}[N(t)]=\dfrac{\lambda t(1+\rho)}{(1-\rho)^2}$。

定义 3　设 $Y(t)=\sum\limits_{i=1}^{N(t)}X_i$，其中 $\{N(t);t\geqslant0\}$ 为复合 Poisson-Geometric 过程；$X_i(\geqslant0)$ 之间独立同分布，且与 $\{N(t);t\geqslant0\}$ 独立。称 $\{Y(t);t\geqslant0\}$ 为复合复合 Poisson-Geometric 过程。

性质 1　$N(t)$、$Y(t)$ 的矩母函数分别为 $M_{N(t)}(r)=\exp\left[\dfrac{\lambda t(e^r-1)}{1-\rho e^r}\right]$，$M_{Y(t)}(r)=\exp\left\{\dfrac{\lambda t[M_X(r)-1]}{1-\rho M_X(r)}\right\}$。

2　模型建立

建立如下风险模型：

$$U(t)=u+\sum_{i=1}^{M(t)}Y_i-\sum_{j=1}^{N(t)}X_j=u+S(t),\tag{1}$$

$$U(t)=u+\sum_{i=1}^{M(t)}Y_i-\sum_{j=1}^{N(t)}X_j+\sigma W(t)=u+S(t)。\tag{2}$$

其中 u 为初始资本；$M(t)$ 为到时刻 t 为止的保单个数；$Y_i(i=1,2,\cdots,M(t))$ 为第 i 张保单的保费；$N(t)$ 为到时刻 t 为止的理赔次数；$X_j(j=1,2,\cdots,N(t))$ 为第 j 次的理赔额；$W(t)$ 为干扰项，σ 为扰动系数；$U(t)$ 表示到时刻 t 为止的盈余。

假设 $X_j(j=1,2,\cdots,N(t))$ 独立同分布，$Y_i(i=1,2,\cdots,M(t))$ 独立同分布，且均为非负的随机变量序列；$M(t)$、$N(t)$、X_j、Y_i、$W(t)$ 相互独立，且 $M(t)\sim PG(\lambda_1t,\rho_1)$、$N(t)\sim PG(\lambda_2t,\rho_2)$，$W(t)$ 为一维标准维纳过程，则称模型(1)为双复合 Poisson-Geometric 风险模型，即保单到达与理赔到达均为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型。模型(2)为带干扰的双复合 Poisson-Geometric 风险模型。

定义 $T=\inf\{t:t\geqslant0$ 且 $U(t)<0\}$ 为破产时刻，$\Psi(u)=P(T<\infty)$ 为破产概率。

为了确保保险公司的稳定经营，要求期望保费收入大于期望理赔，即 $E[S(t)]>0$，而

$$E[S(t)]=E\left[\sum_{i=1}^{M(t)}Y_i-\sum_{j=1}^{N(t)}X_j\right]=E[M(t)]E[Y]-E[N(t)]E[X]=\frac{\lambda_1t}{1-\rho_1}E(Y)-\frac{\lambda_2t}{1-\rho_2}E(X)$$ 或

$$E[S(t)]=E\left[\sum_{i=1}^{M(t)}Y_i-\sum_{j=1}^{N(t)}X_j+\sigma W(t)\right]=\frac{\lambda_1t}{1-\rho_1}E(Y)-\frac{\lambda_2t}{1-\rho_2}E(X)。\tag{3}$$

其中，X、Y 分别表示与 $X_j(j=1,2,\cdots,N(t))$、$Y_i(i=1,2,\cdots,M(t))$ 同分布的随机变量。

为使 $E[S(t)]>0$，作如下假设：

假设 1
$$\frac{\lambda_1}{1-\rho_1}E(Y)-\frac{\lambda_2}{1-\rho_2}E(X)>0。\tag{4}$$

3 主要结果

3.1 模型(1)的结果

本节证明了模型(1)的调节系数是不存在的,故不能用传统的方法得到破产概率表达式及其上界。

引理 1 对于模型(1),存在函数 $g(r)$使得

$$E[\mathrm{e}^{-rS(t)}]=\mathrm{e}^{tg(r)}。\tag{5}$$

证明 $E[\mathrm{e}^{-rS(t)}]=E\left[\exp\left(-r\sum_{i=1}^{M(t)}Y_i+r\sum_{j=1}^{N(t)}X_j\right)\right]=E\left[\exp\left(-r\sum_{i=1}^{M(t)}Y_i\right)\right]E\left[\exp\left(r\sum_{j=1}^{N(t)}X_j\right)\right]=$

$$\exp\left\{\frac{\lambda_1 t[M_Y(-r)-1]}{1-\rho_1 M_Y(-r)}+\frac{\lambda_2 t[M_X(r)-1]}{1-\rho_2 M_X(r)}\right\},$$

其中 $M_X(r)$、$M_Y(r)$表示 X_j、Y_i 的矩母函数。令 $g(r)=\dfrac{\lambda_1[M_Y(-r)-1]}{1-\rho_1 M_Y(-r)}+\dfrac{\lambda_2[M_X(r)-1]}{1-\rho_2 M_X(r)}$即得。

定义 4 方程 $g(r)=0$ 在 $r>0$ 内的正解 R 称为(1)的调节系数。

定理 1 模型(1)不存在调节系数。

证明 $g(r)=\dfrac{\lambda_1[M_Y(-r)-1]}{1-\rho_1 M_Y(-r)}+\dfrac{\lambda_2[M_X(r)-1]}{1-\rho_2 M_X(r)}$,易得 $g(0)=0,g(+\infty)=-\lambda_1-\dfrac{\lambda_2}{\rho_2}<0$。

$$g'(r)=\frac{-\lambda_1 M'_Y(-r)(1-\rho_1)}{[1-\rho_1 M_Y(-r)]^2}+\frac{\lambda_2 M'_X(r)(1-\rho_2)}{[1-\rho_2 M_X(r)]^2}。\tag{6}$$

由假设 1,$g'(0)=\dfrac{-\lambda_1 E(Y)}{1-\rho_1}+\dfrac{\lambda_2 E(X)}{1-\rho_2}<0,g'(+\infty)>0$;

$$g''(r)=\frac{\lambda_1 M''_Y(-r)(1-\rho_1)[1-\rho_1 M_Y(-r)]^2+2\lambda_1\rho_1(1-\rho_1)M'^2_Y(-r)[1-\rho_1 M_Y(-r)]}{[1-\rho_1 M_Y(-r)]^4}+$$
$$\frac{\lambda_2 M''_X(r)(1-\rho_2)[1-\rho_2 M_X(r)]^2+2\lambda_2\rho_2(1-\rho_2)M'^2_X(r)[1-\rho_2 M_X(r)]}{[1-\rho_2 M_X(r)]^4}>0,\ r>0。\tag{7}$$

所以 $g'(r)$是$(0,+\infty)$上的增函数,又 $g'(0)<0,g'(+\infty)>0$,故 $g(r)$先减后增,而 $g(0)=0,g(+\infty)<0$,所以 $g(r)=0$ 在 $r>0$ 内无解,即模型不存在调节系数。

3.2 模型(2)的结果

引理 2 对于模型(2),存在函数 $g(r)$使得

$$E[\mathrm{e}^{-rS(t)}]=\mathrm{e}^{tg(r)}。\tag{8}$$

证明 类似引理 1 的证明,令 $g(r)=\dfrac{\lambda_1[M_Y(-r)-1]}{1-\rho_1 M_Y(-r)}+\dfrac{\lambda_2[M_X(r)-1]}{1-\rho_2 M_X(r)}+\dfrac{1}{2}r^2\sigma^2$ 即得。

定义 5 方程 $g(r)=0$ 在 $r>0$ 内的正解 R 称为(2)的调节系数。

定理 2 模型(2)存在惟一的调节系数。

证明 $g(r)=\dfrac{\lambda_1[M_Y(-r)-1]}{1-\rho_1 M_Y(-r)}+\dfrac{\lambda_2[M_X(r)-1]}{1-\rho_2 M_X(r)}+\dfrac{1}{2}r^2\sigma^2$,易得 $g(0)=0,g(+\infty)=+\infty$。

$$g'(r)=\frac{-\lambda_1 M'_Y(-r)(1-\rho_1)}{[1-\rho_1 M_Y(-r)]^2}+\frac{\lambda_2 M'_X(r)(1-\rho_2)}{[1-\rho_2 M_X(r)]^2}+r\sigma^2。\tag{9}$$

由假设 1,$g'(0)=\dfrac{-\lambda_1 E(Y)}{1-\rho_1}+\dfrac{\lambda_2 E(X)}{1-\rho_2}<0,g'(+\infty)>0$。

$$g''(r)=\frac{\lambda_1 M''_Y(-r)(1-\rho_1)[1-\rho_1 M_Y(-r)]^2+2\lambda_1\rho_1(1-\rho_1)M'^2_Y(-r)[1-\rho_1 M_Y(-r)]}{[1-\rho_1 M_Y(-r)]^4}+$$
$$\frac{\lambda_2 M''_X(r)(1-\rho_2)[1-\rho_2 M_X(r)]^2+2\lambda_2\rho_2(1-\rho_2)M'^2_X(r)[1-\rho_2 M_X(r)]}{[1-\rho_2 M_X(r)]^4}+\sigma^2>0,r>0。\tag{10}$$

所以 $g'(r)$是$(0,+\infty)$上的增函数,又 $g'(0)<0,g'(+\infty)>0$,故 $g(r)$先减后增,而 $g(0)=0,g(+\infty)>0$,所以 $g(r)=0$ 在 $r>0$ 内有惟一解,即模型(2)存在惟一的调节系数。

定理 3　模型(2)的破产概率 $\Psi(u)=\dfrac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}\mid T<\infty]}$,且 $\Psi(u)\leqslant e^{-Ru}$。　(11)

其中,R 为调节系数,T 为破产时刻。

证明　由定理 2,模型(2)有惟一的调节系数 R,即 $g(R)=0$,所以,$E[e^{-RU(t)}]=e^{-Ru}$。

而
$$E[e^{-RU(t)}]=E[e^{-RU(t)}\mid T\leqslant t]P(T\leqslant t)+E[e^{-RU(t)}\mid T>t]P(T>t)。\tag{12}$$

下证当 $t\to\infty$ 时,$E[e^{-RU(t)}\mid T>t]\to 0$。

令 $\beta^2 t=\mathrm{Var}[U(t)]$,考虑函数 $h(t)=E[U(t)]-\beta t^{\frac{2}{3}}$,由假设 1 当 t 充分大时 $h(t)>0$,且当 $t\to\infty$ 时 $h(t)\to+\infty$,因此,

$$\begin{aligned}E[e^{-RU(t)}\mid T>t]&=E[e^{-RU(t)}\mid T>t,0\leqslant U(t)\leqslant h(t)]P[T>t,0\leqslant U(t)\leqslant h(t)]+E[e^{-RU(t)}\mid T>t,\\&\quad U(t)>h(t)]P[T>t,U(t)>h(t)]\leqslant P[0\leqslant U(t)\leqslant h(t)]+e^{-Rh(t)},\end{aligned}$$

而
$$0\leqslant P[0\leqslant U(t)\leqslant h(t)]\leqslant P\{\mid U(t)-E[U(t)]\mid\geqslant\beta t^{\frac{2}{3}}\}\leqslant\frac{\mathrm{Var}[U(t)]}{\beta^2 t^{\frac{4}{3}}}=t^{-\frac{1}{3}},\tag{13}$$

所以,$0\leqslant E[e^{-RU(t)}\mid T>t]\leqslant t^{-\frac{1}{3}}+e^{-Rh(t)}$,故由控制收敛定理得 $\lim\limits_{t\to\infty}E[e^{-RU(t)}\mid T>t]=0$。对 $e^{-Ru}=E[e^{-RU(t)}\mid T\leqslant t]P(T\leqslant t)+E[e^{-RU(t)}\mid T>t]P(T>t)$ 两端取极限 $t\to\infty$,得 $e^{-Ru}=E[e^{-RU(t)}\mid T<\infty]P(T<\infty)$,所以 $\Psi(u)=P(T<\infty)=\dfrac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}\mid T<\infty]}$。又由 $U(T)<0$,从而有 $\Psi(u)\leqslant e^{-Ru}$。

致谢:感谢审稿人提出的宝贵意见!

参考文献:

[1] 汉期 盖伯.数学风险论导引[M].北京:世界图书出版公司,1997.
[2] 卡尔斯, 胡法兹, 达呐, 等.现代精算风险理论[M].唐启鹤,胡太忠,译.北京:科学出版社,2005.
[3] 谢志刚,韩天雄.风险理论与非寿险精算[M].天津:南开大学出版社,2000.
[4] 李大潜. 风险理论[M].上海:上海科学技术出版社,1995.
[5] GRANDELL J. Aspects of risk theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
[6] 龚日朝,杨向群.复合二项风险模型的破产概率[J].经济数学,2001,18(2):38-42.
[7] 毛泽春,刘锦萼.索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型及破产概率[J].应用数学学报,2005,28(3):419-428.
[8] 董亚娟,朱勇华.保险系统中一种推广风险模型的破产概率[J].数学的实践与认识,2004,34(6):17-20.
[9] 刘家军,刘再明. 保费到达次数为更新过程的复合更新风险模型[J].数学理论与应用, 2003,23(1):102-106.
[10] 熊双平.带干扰的索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的负风险和模型[J].经济数学,2007,24(1):37-41.
[11] 龚日朝,邹捷中.重尾索赔下带干扰风险模型破产概率的局部解[J].应用数学学报,2007,30(3):563-572.
[12] 周绍伟,王传会.多险种的 Cox 风险模型[J].山东科技大学学报:自然科学版,2007,26(5):69-71.

(编辑:孙培芹)