第 44 卷 第 12 期 Vol.44 No.12
山 东 大 学 学 报 (理 学 版)
Journal of Shandong University(Natural Science)
2009 年 12 月 Dec. 2009

文章编号:1671-9352(2009)12-0056-04

随机变量阵列的强收敛性

管总平,孙友彬
(暨南大学统计学系,广东 广州 510630)

摘要:获得了独立随机变量阵列的对数律成立的一个充分条件,推广了已有的结果。

关键词:对数律;强收敛性;独立随机变量阵列
中图分类号:O211.4 **文献标志码**:A

Strong law for arrays of random variables

GUAN Zong-ping, SUN You-bin
(Department of Statistics, Jinan University, Guangzhou 510630, Guangdong, China)

Abstract: The sufficient conditions of the law of a logarithm for array of independent random variables are obtained, which extend some well-known results.

Key words: law of logarithm; strong converge; array of independent random variables

0 引言

设$\{X, X_n, n \geqslant 1\}$是独立同分布的随机变量序列,通过经典的 Hartman-Wintner 重对数律[1]知:如果

$$EX = 0,\ EX^2 = 1, \tag{0.1}$$

则

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1 \quad \text{a.s.}, \quad \liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{2n\log\log n}} = -1, \quad \text{a.s.} \tag{0.2}$$

Strassen 证明了(0.1)是(0.2)成立的必要条件[2]。

对于独立同分布的随机变量阵列,上面的 Hartman-Wintner 重对数律不再成立,但有着不同的极限结果。

设$\{X_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1\}$是独立随机变量阵列,且 $EX_{ni} = 0, EX_{ni}^2 < \infty, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1$。令 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{ni}$和 $s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} EX_{ni}^2$。Hu 在独立随机变量阵列同分布于 Bernoulli 分布 $P(X_{11} = \pm 1) = 1/2$ 的情况下证明了如下结论[3]:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2\log s_n^2}} = 1 \ \text{a.s.}, \ \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2\log s_n^2}} = -1 \quad \text{a.s.}。 \tag{0.3}$$

Hu 和 Weber 在更弱的条件下:只要$\{X_{ni}\}$是独立同分布随机变量阵列,且 $EX_{ni} = 0, E|X_{11}|^4 < \infty$得到了(0.3)的结论[4]。Qi 在此基础上进一步把条件推广为:只要$\{X_{ni}\}$是独立同分布随机变量阵列,且 $EX_{ni} = 0$, $E|X_{11}|^4(\log^+|X_{11}|)^{-2} < \infty$也有(0.3)成立[5]。这里要注意从(0.3)的结论容易看出

收稿日期:2009-06-19
作者简介:管总平(1984-),男,硕士研究生,研究方向为概率与数理统计.Email:guanzongping@163.com

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2\log\log s_n^2}}=\infty,\text{a.s.},$$

所以从这里可以证实对于随机变量阵列 Hartman-Wintner 重对数律不成立。

当随机变量阵列$\{X_{ni}\}$独立但不一定同分布的情况下,Baxter, Rosalsky, Rosalsky and Teicher, Sung, and Teicher 得到了一些重对数律和单对数律结论[6-10]。Recently, Sung 证明了对于独立随机变量阵列 Kolmogorov 重对数律不成立,但是他在某些条件下得到了对于独立随机变量阵列 Kolmogorov 重对数律的一个类似结论[9]:设$\{X_{ni},1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 1\}$是独立随机变量阵列,$EX_{ni}=0$, $EX_{ni}^2<\infty$, $1\leqslant i\leqslant n$, $n\geqslant 1$。且满足

$$|X_{ni}|\leqslant k_n\sqrt{\frac{s_n^2}{\log n}},1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 1,$$

其中$\{k_n\}$是一个正的常数列,且 $k_n\to 0$, $n\to\infty$,那么

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2\log n}}=1,\ \text{a.s.}。\tag{0.4}$$

后来 Sung 又在 $EX_{ni}=0$, $0<a\leqslant EX_{ni}^2$, $\sup_{n,i}EX_{ni}^4<\infty$条件下得到了(0.4)的结论[11]。

本文获得了式(0.4)成立的一个更弱的充分条件,并把 Sung 的结果[11]推广到$[n^\alpha]$的情形。因此 Sung 的条件可以作为一个推论给出。这里及后文$[\cdot]$都表示取整函数。

1 主要结果

定理 1.1 设 $\alpha>0$, $\{X_{ni},1\leqslant i\leqslant[n^\alpha],n\geqslant 1\}$是独立随机变量阵列,$EX_{ni}=0$且满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}E|X_{ni}|^p}{(s_n^2\log n)^{\frac{p}{2}}}<\infty,\ p>2,\tag{1.1}$$

其中 $S_n=\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}$, $s_n^2=\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}EX_{ni}^2$。则

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2\log n}}=1,\ \text{a.s.},\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2\log n}}=-1,\ \text{a.s.}。\tag{1.2}$$

本文约定,$\log x=\max\{1,\ln x\}$, C 代表正常数,它在不同的地方可代表不同的值。

2 定理的证明

定理证明的主要方法是用不变原理来估计收敛速率(见文献[12-14]),这种方法已经是概率极限领域的一个强有力的工具,参见文献[15-16],即为下面引理:

引理 2.1 对任意 $q>2$,存在 $B=B(q)>0$ 使对任意均值为零,q 阶距有限的独立随机变量序列$\{\xi_i,1\leqslant i\leqslant n\}$,存在独立正态随机变量序列$\{\eta_i,1\leqslant i\leqslant n\}$, $E\eta_i=0$, $E\eta_i^2=E\xi_i^2$,对所有 $y>0$,有

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}\xi_i-\sum_{i=1}^{k}\eta_i|>y\}\leqslant By^{-q}\sum_{i=1}^{n}E|\xi_i|^q。$$

定理 1.1 的证明 只需证明

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2\log n}}=1,\ \text{a.s.}。\tag{2.1}$$

因为$\{S_n,n\geqslant 1\}$是独立随机变量序列,由 Borel-Cantelli 引理,要证(2.1),只要证

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\Big\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}>(1+\varepsilon)\sqrt{2s_n^2\log n}\Big\}<\infty,\ \forall\varepsilon>0,\tag{2.2}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\Big\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}>(1-\varepsilon)\sqrt{2s_n^2\log n}\Big\}=\infty,\quad\forall\varepsilon>0。\tag{2.3}$$

由引理 1.1,存在独立的服从正态分布的随机变量序列 Z_{ni},满足 $EZ_{ni}=0$, $EZ_{ni}^2=EX_{ni}^2$,且对任意 $q>2$

及所有 $y>0$,

$$P\{|\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}-\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}Z_{ni}|>y\}\leqslant Cy^{-q}\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}E|X_{ni}|^q。\qquad(2.4)$$

并对每个 $\varepsilon>0$,

$$\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}>(1+\varepsilon)\sqrt{2s_n^2\log n}\}\subset\left\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}-\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}Z_{ni}>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2s_n^2\log n}\right\}\cup\left\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}Z_{ni}>\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2s_n^2\log n}\right\}。$$

因此对任意 $\varepsilon>0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}>(1+\varepsilon)\sqrt{2s_n^2\log n}\}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}-\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}Z_{ni}>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2s_n^2\log n}\right\}+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}Z_{ni}>\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2s_n^2\log n}\right\}=I_1+I_2。$$

所以由式(1.4),对 $p>2$ 有

$$I_1\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{|\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}-\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}Z_{ni}|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2s_n^2\log n}\right\}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}E|X_{ni}|^p}{(s_n^2\log n)^{\frac{p}{2}}}<\infty。$$

现令 N 是服从标准正态分布的随机变量,注意到 $EZ_{ni}^2=EX_{ni}^2$ 及 $P\{N>x\}\sim(2\pi)^{-1}x^{-1}e^{\frac{-x^2}{2}}$,因此

$$I_2=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{N>\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2\log n}\right\}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(1+\varepsilon/2)^2}}<\infty。$$

从而式(2.2)成立。

注意到对任意 $\varepsilon>0$,

$$\left\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}Z_{ni}>\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2s_n^2\log n}\right\}\subset\left\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}Z_{ni}-\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2s_n^2\log n}\right\}\cup\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}>(1-\varepsilon)\sqrt{2s_n^2\log n}\}。$$

因此对任意 $\varepsilon>0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}Z_{ni}>\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2s_n^2\log n}\right\}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}Z_{ni}-\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2s_n^2\log n}\right\}+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}>(1-\varepsilon)\sqrt{2s_n^2\log n}\}。$$

分别类似于 $I_1<\infty$, $I_2<\infty$ 的证明有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}Z_{ni}-\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2s_n^2\log n}\right\}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{|\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}Z_{ni}-\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2s_n^2\log n}\right\}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}E|X_{ni}|^p}{(s_n^2\log n)^{\frac{p}{2}}}<\infty,$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}Z_{ni}>\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2s_n^2\log n}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N>(1-\varepsilon/2)\sqrt{2\log n}\}=C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(1-\varepsilon/2)^2}\sqrt{\log n}}=\infty。$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}X_{ni}>(1-\varepsilon)\sqrt{2s_n^2\log n}\}=\infty。$$

因此式(2.3)得证。从而式(2.1)成立。

推论 2.1（文献[11]的结论） 设 $\{X_{ni},1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant1\}$ 是独立随机变量阵列,如果 $EX_{ni}=0$, $0<a\leqslant EX_{ni}^2$, $1\leqslant i\leqslant n$, $n\geqslant1$,且 $\sup_{n,i}EX_{ni}^4<\infty$,那么有式(0.4)成立。

证明 在定理0.1中取 $\alpha=1$, $p=4$,易知存在一个 $M>0$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}E|X_{ni}|^4}{(s_n^2\log n)^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nM}{(na\log n)^2}<\infty。$$

所以有式(0.4)成立。

推论 2.2 如果 $\{X_{ni}\}$ 是独立同分布随机变量阵列,且 $EX_{ni}=0$, $E|X_{11}|^4<\infty$。那么有式(0.4)成立。

致谢:本论文是在导师陈平炎教授的悉心指导下完成的,谨向导师表示衷心的感谢!

参考文献：

[1] HARTMAN P, WINTNER P. On the law of the iterated logarithm[J]. Amer J Math, 1941, 63:169-176.

[2] STRASSEN V. A converse to the law of the iterated logarithm[J]. Z W View Gebiete, 1960, 4:265-268.

[3] HU T C. On the law of the iterated logarithm for arrays of random variables[J]. Comm Statist Theory Methods, 1991, 20:1989-1994.

[4] HU T C, WEBER N C. On the rate of convergence in the strong law of large numbers for arrays[J]. Bull Austral Math Soc, 1992, 45: 479-482.

[5] QI Y C. On strong convergence of arrays[J]. Bull Austral Math Soc, 1994, 50:219-223.

[6] BAXTER G. An analogue of the law of the iterated logarithm[J]. Proc Amer Math Soc, 1955, 6:177-181.

[7] ROSALSKY A. On the number of successes in independent trials[J]. Sankhya Ser A, 1985, 47:380-391.

[8] ROSALSKY A, TEICHER H. A limit theorem for double arrays[J]. Ann Prob, 1981, 9:460-467.

[9] SUNG S H. An analogue of Kolmogorov's law of the iterated logarithm for arrays[J]. Bull Austral Math Soc, 1996, 54:117-182.

[10] TEICHER H. Almost certain behavior of row sums of double arrays[M]// Lecture Notes in Mathematics. Berlin:Springer-Verlag, 1981, 861:155-165.

[11] SUNG S H. Strong laws for arrays of random variables[J]. Bull Austral Math Soc, 1998, 35:769-775.

[12] SAKHANENKO A I. On unimprovable estimates of the rate of convergence in the invariance principle[J]. Colloquia Math Soci Janos Bolyai, 1980, 32:779-783.

[13] SAKHANENKO A I. On estimates of the rate of convergence in the invariance principle[C]// Advances in Probab Theory: Limit Theorems and Related Problems. New York:Springer, 1984:124-135.

[14] SAKHANENKO A I. Convergence rate in the invariance principle for nonidentically distributed variables with exponential moments[C]// Advances in Probab The-orv: Limit Theorems for Sums of Random Variables. New York: Springer, 1985:2-73.

[15] JIANG Y, ZHANG L X. Precise rates in the law of iterated logarithm for the moment of I.I.D. random variables[J]. Acta Math Sinica, 2006, 22: 781-792.

[16] CHEN Pingyan, GAN Shixin. Limiting behavior of weighted sums of IID random variables[J]. Statist Probab Lett, 2007, 77:1589-1599.

（编辑：孙培芹）