第44卷 第5期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2009年5月
Vol.44 No.5 Journal of Shandong University(Natural Science) May 2009

文章编号:1671-9352(2009)05-0067-07

一类新的含有垂直传染与脉冲免疫的SIR传染病模型的定性分析

赵文才

(山东科技大学理学院, 山东 青岛 266510)

摘要:建立一类具有饱和传染率的脉冲免疫接种SIR模型,结合具有常数移民和垂直传染的情况对模型进行分析研究,得到无病周期解,给出此周期解的全局稳定性分析,并获得系统一致持续生存的条件。

关键词:垂直传染;脉冲免疫接种;周期解;全局渐近稳定性;持久性

中图分类号:O175 **文献标志码**: A

Global qualitative analysis of a new SIR epidemic disease model with vertical transmission and pulse vaccination

ZHAO Wen-cai

(College of Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, Shandong, China)

Abstract: An SIR epidemic disease model with saturated incidence rate and pulse vaccination is constructed. Based on analysis of the model in constant recruitment and vertical transmission conditions, an infection-free periodic solution is obtained, and the analysis of global stability of the infection-free periodic solution is given. Also, the sufficient condition for permanence of the system is obtained.

Key words: vertical transmission; pulse vaccination; periodic solution; global asymptotic stability; permanence

0 引言

传染病是威胁人类生命健康的大敌,人类与传染病的斗争从未间断过,对传染病的发病机理、传染规律、防治策略的研究一直是人类面临的重要课题。早在1760年,D.Bernoulli就曾用数学研究过天花的传播,但传染病模型的系统研究始于20世纪,1927年Kermack与McKendrick引入“仓室”(compartment)模型,利用动力学的方法对传播规律和流行趋势进行了研究。近二十年来,传染病动力学的研究进展迅速,大量的数学模型被用于分析各种传染病问题[1-4]。

从传染病的传播机理来看,主要有接触传播、垂直传播、虫媒传播等不同的感染方式。我们把通过母亲传染新生儿的传播方式称为垂直传染,垂直传染病模型已有较广泛的研究[5-6]。文献[5]研究了具有标准传染率的脉冲免疫及垂直传染模型,给出无病周期解的全局稳定性和基本再生数。

为了对传染病进行控制,常采用预防接种策略,预防接种有两种方式:连续接种和脉冲接种。在某个时刻对易感者集中进行免疫接种的方式称为脉冲接种。脉冲接种模型由于其更接近实际正受到许多学者的重视[5-10],D'Onofrio Alberto研究了脉冲预防接种SEIR模型[9],孟新柱等研究了具有标准传染率的脉冲预防

收稿日期:2008-12-02
基金项目:山东科技大学“春蕾计划”基金资助项目(2008BWZ076)
作者简介:赵文才(1966-),男,副教授,研究方向为生物数学.Email:wencaizhao@126.com

接种 SIR 模型[7-8]。

本文研究了一类具有垂直传染的脉冲免疫接种 SIR 模型,将输入人口划分为易感者和移出者两部分,采用饱和传染率,得到了无病周期解的全局渐近稳定性和系统一致持续生存的条件。

1 基本假设与模型的建立

作如下假设:

(1) $S(t)$、$I(t)$、$R(t)$分别表示 t 时刻易感者类、染病者类和移出者类的数量,$N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$为 t 时刻种群的总数;

(2) 外来人口的输入率为常数 A,aA 及$(1-a)A$ 分别表示单位时间内输入易感者和已获得免疫的移出者的数量$(0<a\leqslant 1)$;

(3) 垂直传染的概率为 $1-\rho$;

(4) 只对易感者类进行脉冲免疫接种,接种成功的比例为 $p(0<p<1)$,脉冲免疫接种周期为 τ;

(5) 采用饱和传染率$\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha S(t)}$,$\alpha$ 是饱和度。

根据上面的假设,考虑一个具有垂直传染的脉冲免疫接种 SIR 模型如下:

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}&=aA+b[S(t)+R(t)]+b\rho I(t)-dS(t)-\frac{\beta I(t)S(t)}{1+\alpha S(t)},\\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}&=\frac{\beta I(t)S(t)}{1+\alpha S(t)}+b(1-\rho)I(t)-(\lambda+d+\gamma)I(t),\\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}&=(1-a)A+\gamma I(t)-dR(t),\end{aligned}\right\}\quad t\neq k\tau,\\ \left.\begin{aligned}\Delta S&=-pS(t),\\ \Delta I&=0,\\ \Delta R&=pS(t),\end{aligned}\right\}\quad t=k\tau,\end{cases}\tag{1}$$

这里 γ 代表移出率系数,b 和 d 分别代表出生率和自然死亡率系数,λ 代表因病死亡率系数。

2 无病周期解的存在性与稳定性

定理 1 当 $d>b$ 时,系统(1)存在无病周期解$(S^*(t),0,R^*(t))$。

证明 在系统(1)中,令 $I(t)=0$,则

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}&=aA+(b-d)S(t)+bR(t),\\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}&=(1-a)A-dR(t),\end{aligned}\right\}\quad t\neq k\tau,\\ \left.\begin{aligned}\Delta S&=-pS(t),\\ \Delta R&=pS(t),\end{aligned}\right\}\quad t=k\tau。\end{cases}\tag{2}$$

求解系统(2)的前两个方程,得

$$S(t)=S(k\tau)\mathrm{e}^{-(d-b)(t-k\tau)}-\frac{A}{d-b}\mathrm{e}^{-(d-b)(t-k\tau)}+\frac{(1-a)A}{d}\mathrm{e}^{-d(t-k\tau)}-$$

$$R(k\tau)(\mathrm{e}^{-d(t-k\tau)}-\mathrm{e}^{-(d-b)(t-k\tau)})+\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d(d-b)}\right)A,$$

$$R(t)=R(k\tau)\mathrm{e}^{-d(t-k\tau)}+\frac{(1-a)A}{d}(1-\mathrm{e}^{-d(t-k\tau)}),$$

这里 $k\tau<t\leqslant(k+1)\tau$,利用

$$\begin{cases}S(k\tau)=(1-p)S((k+1)\tau^-),\\ R(k\tau)=R((k+1)\tau^-)+pS((k+1)\tau^-),\end{cases}$$

得系统(2)的 τ 周期解为

$$S^*(t)=\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d(d-b)}\right)A\left(1-\frac{p}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-d\tau}}\mathrm{e}^{-d(t-k\tau)}\right),$$

$$R^*(t)=\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d(d-b)}\right)A\,\frac{p}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-d\tau}}\mathrm{e}^{-d(t-k\tau)}+\frac{(1-a)A}{d},$$

其中 $k\tau<t\leqslant(k+1)\tau$。证毕。

定义 $R_1=\dfrac{\beta}{[\lambda+d+\gamma-b(1-\rho)]\tau}\left\{\dfrac{\tau}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha d(1+\alpha\eta)}\ln\dfrac{(1+\alpha\eta)(\mathrm{e}^{d\tau}-1)+p}{[1+\alpha\eta(1-p)](1-\mathrm{e}^{-d\tau})+p\mathrm{e}^{-d\tau}}\right\}$,其中,$\eta=\left(\dfrac{a}{d}+\dfrac{b}{d(d-b)}\right)A$。

定理 2　当 $d>b$ 且 $R_1<1$ 时,系统(1)的无病周期解$(S^*(t),0,R^*(t))$局部渐近稳定。

证明　作变换 $x(t)=S(t)-S^*(t)$,$y(t)=I(t)$,$z(t)=R(t)-R^*(t)$,当 $t\neq k\tau$ 时,系统(1)关于无病周期解$(S^*(t),0,R^*(t))$的线性化系统为

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b-d & b\rho-\dfrac{\beta S^*(t)}{1+\alpha S^*(t)} & b\\ 0 & \dfrac{\beta S^*(t)}{1+\alpha S^*(t)}+b(1-\rho)-\lambda-d-\gamma & 0\\ 0 & \gamma & -d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}。\tag{3}$$

当 $t=k\tau$ 时,脉冲条件变为

$$\begin{pmatrix}x(t^+)\\ y(t^+)\\ z(t^+)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-p&0&0\\0&1&0\\p&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}。$$

令 $\boldsymbol{\Phi}(t)$为(3)的基解矩阵,则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}b-d & b\rho-\dfrac{\beta S^*(t)}{1+\alpha S^*(t)} & b\\ 0 & \dfrac{\beta S^*(t)}{1+\alpha S^*(t)}+b(1-\rho)-\lambda-d-\gamma & 0\\ 0 & \gamma & -d\end{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}(t),$$

且 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵。容易解得,

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-(d-b)t} & \varphi_{12}(t) & \varphi_{13}(t)\\ 0 & \varphi_{22}(t) & 0\\ 0 & \varphi_{32}(t) & \mathrm{e}^{-dt}\end{pmatrix},$$

其中,$\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{22}(t)}{\mathrm{d}t}=\left[\dfrac{\beta S^*(t)}{1+\alpha S^*(t)}+b(1-\rho)-\lambda-d-\gamma\right]\varphi_{22}(t)$,即

$$\varphi_{22}(t)=\exp\int_0^t\left[\frac{\beta S^*(u)}{1+\alpha S^*(u)}+b(1-\rho)-\lambda-d-\gamma\right]\mathrm{d}u。$$

于是,系统(3) 的单值矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1-p&0&0\\0&1&0\\p&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}(\tau)=\begin{pmatrix}(1-p)\mathrm{e}^{-(d-b)\tau} & (1-p)\varphi_{12}(\tau) & (1-p)\varphi_{13}(\tau)\\ 0 & \varphi_{22}(\tau) & 0\\ p\mathrm{e}^{-(d-b)\tau} & p\varphi_{12}(\tau)+\varphi_{32}(\tau) & p\varphi_{13}(\tau)+\mathrm{e}^{-d\tau}\end{pmatrix}。$$

对 $\boldsymbol{M}$ 进行初等行变换,得

$$\boldsymbol{M}^*=\begin{pmatrix}(1-p)\mathrm{e}^{-(d-b)\tau} & (1-p)\varphi_{12}(\tau) & (1-p)\varphi_{13}(\tau)\\ 0 & \varphi_{22}(\tau) & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-d\tau}\end{pmatrix}。$$

当 $d>b$ 时,其特征值为 $\lambda_1=(1-p)\mathrm{e}^{-(d-b)\tau}<1$,$\lambda_2=\varphi_{22}(\tau)$,$\lambda_3=\mathrm{e}^{-d\tau}<1$,由于

$$R_1 = < 1,$$

于是 $\lambda_2 < 1$,由 Floquet 定理,无病 τ 周期解 $(S^*(t),0,R^*(t))$ 局部渐近稳定。证毕。

引理 1 当 $d > b$ 时,系统(1)的所有正解最终一致有界。

证明 设 $(S(t),I(t),R(t))$ 为系统(1)的任一正解,则 $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ 满足:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = A - (d-b)N(t) - \lambda I(t) \leqslant A - (d-b)N(t), & t \neq k\tau, \\ N(t^+) = N(t), & t = k\tau。\end{cases}$$

由脉冲微分不等式,得

$$N(t) \leqslant N(0)e^{-\int_0^t (d-b)ds} + \int_0^t A e^{-\int_s^t (d-b)d\tau} ds = N(0)e^{-(d-b)t} + \frac{A}{d-b}(1 - e^{-(d-b)t}) \to \frac{A}{d-b}(t \to \infty)。$$

所以,存在一个常数 $M > 0$,当 t 充分大时,$N(t) \leqslant M$。从而,$S(t) \leqslant M$,$I(t) \leqslant M$,$R(t) \leqslant M$。

故系统(1)的所有正解最终一致有界。证毕。

利用频闪映射,不难得到

引理 2 系统

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = a - bX(t), & t \neq k\tau, \\ X(t^+) = (1-p)X(t), & t = k\tau, \end{cases} \tag{4}$$

存在惟一全局渐近稳定的正的 τ 周期解

$$X^*(t) = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{pe^{-b(t-k\tau)}}{1-(1-p)e^{-b\tau}}\right), \quad k\tau < t \leqslant (k+1)\tau,$$

且有惟一正的不动点

$$X^* = \frac{a(1-p)(1-e^{-b\tau})}{b(1-(1-p)e^{-b\tau})}。$$

定义

$$R_2 = \frac{\beta A\left(\dfrac{a}{d} + \dfrac{b}{d(d-b)}\right)(1-e^{-d\tau})}{[\lambda + d + \gamma - b(1-\rho)][1-(1-p)e^{-d\tau}]}。$$

定理 3 当 $d > b$ 且 $R_2 < 1$ 时,系统(1)的无病周期解 $(S^*(t),0,R^*(t))$ 全局渐近稳定。

证明 由系统(1)及引理1,得

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} \leqslant \left(a + \dfrac{b}{d-b}\right)A - dS(t), & t \neq k\tau, \\ S(t^+) = (1-p)S(t), & t = k\tau。\end{cases} \tag{5}$$

根据引理2,系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \left(a + \dfrac{b}{d-b}\right)A - dx(t), & t \neq k\tau, \\ x(t^+) = (1-p)x(t), & t = k\tau, \end{cases}$$

存在正的 τ 周期解:

$$x^*(t) = \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d(d-b)}\right)A\left(1 - \frac{p}{1-(1-p)e^{-d\tau}}e^{-d(t-k\tau)}\right), \quad k\tau < t \leqslant (k+1)\tau。$$

设 $(S(t),I(t),R(t))$ 为系统(1)的任一解,由脉冲比较定理,对于任意正数 ε,存在正整数 N,当 $k > N$ 时,有

$$S(t) < x^*(t) + \varepsilon, \quad k\tau < t \leqslant (k+1)\tau。\tag{6}$$

从而,$S(t) < \left(\dfrac{a}{d} + \dfrac{b}{d(d-b)}\right)A\dfrac{1-e^{-d\tau}}{1-(1-p)e^{-d\tau}} + \varepsilon$。根据系统(1)的第二个方程,当 $k > N$ 时,有

$$\frac{dI}{dt} < \left\{\beta\left[\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d(d-b)}\right)A\frac{1-e^{-d\tau}}{1-(1-p)e^{-d\tau}} + \varepsilon\right] + b(1-\rho) - \lambda - d - \gamma\right\}I(t),$$
$$k\tau < t \leqslant (k+1)\tau。\tag{7}$$

利用已知条件 $R_2 = \dfrac{\beta A\left(\dfrac{a}{d}+\dfrac{b}{d(d-b)}\right)(1-e^{-d\tau})}{[\lambda+d+\gamma-b(1-\rho)][1-(1-p)e^{-d\tau}]} < 1$,故 $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = 0$。

由式(7) 及引理 1 可得,存在正常数 K,μ,使得

$$\left| b\rho + \gamma + \frac{\beta S(t)}{1+\alpha S(t)} \right| I(t) \leqslant K e^{-\mu t}。$$

令 $V(t) = | S(t) - S^*(t) | + | R(t) - R^*(t) |$,则当 $t \neq k\tau$ 时,

$$D^+ V \leqslant -(d-b)[\,| S(t) - S^*(t) | + | R(t) - R^*(t) |\,] + \left| b\rho + \gamma + \frac{\beta S(t)}{1+\alpha S(t)} \right| I(t) \leqslant -(d-b)V(t) + K e^{-\mu t}。$$

脉冲条件为

$$V(t^+) = | S(t^+) - S^*(t^+) | + | R(t^+) - R^*(t^+) | = (1-p) | S(t) - S^*(t) | + | R(t) - R^*(t) + p(S(t) - S^*(t)) | \leqslant V(t)\ (t = k\tau)。$$

利用脉冲微分不等式,

$$V(t) \leqslant V(0)e^{-(d-b)t} + \int_0^t e^{-(d-b)(t-s)} K e^{-\mu s}\,ds = V(0)e^{-(d-b)t} + \frac{K}{d-b-\mu}(e^{-\mu t} - e^{-(d-b)t}) \to 0\ (t \to \infty)。$$

于是,$S(t) \to S^*(t)$,$R(t) \to R^*(t)\ (t \to \infty)$。故当 $R_2 < 1$ 时,系统(1) 的无病 τ 周期解 $(S^*(t),0,R^*(t))$ 全局吸引,又 $R_1 < R_2 < 1$,根据定理 2,$(S^*(t),0,R^*(t))$ 全局渐近稳定。证毕。

3　疾病的永久持续存在性

第 2 节讨论了传染病被根除的条件,而系统的持久性意味着疾病能够传播或者形成流行病持续存在。下面讨论系统(1) 的持久性,即疾病的永久持续存在性。

定义

$$R_3 = \frac{\beta \dfrac{aA}{d-b}(1-p)(1-e^{-(d-b)\tau})}{[\lambda+d+\gamma-b(1-\rho)]\left(1+\alpha\dfrac{A}{d-b}\right)[1-(1-p)e^{-(d-b)\tau}]}。$$

定理 4　当 $d > b$ 且 $R_3 > 1$ 时,系统(1) 疾病持续。

证明　设 $(S(t), I(t))$ 是系统(1) 满足正初值条件的任意一个解,由引理 1,存在一个常数 $M > 0$,使 $S(t) \leqslant M$,$I(t) \leqslant M$。下面证明存在正数 m_1, m_2,当 t 充分大时,有 $S(t) \geqslant m_1$,$I(t) \geqslant m_2$。

由于 $I(t) \leqslant \dfrac{A}{d-b}$,由系统(1) 的第一个方程,得

$$\frac{dS}{dt} \geqslant aA - \left(d - b + \frac{A\beta}{d-b}\right)S(t) = aA - BS(t),$$

其中,$B = d - b + \dfrac{A\beta}{d-b}$。由引理 2,方程

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = aA - By(t), & t \neq k\tau, \\ y(t^+) = (1-p)y(t), & t = k\tau \end{cases}$$

的正的 τ 周期解为

$$y^*(t) = \frac{aA}{B}\left(1 - \frac{p e^{-B(t-k\tau)}}{1-(1-p)e^{-B\tau}}\right), \quad k\tau < t \leqslant (k+1)\tau。$$

利用脉冲比较定理,对于任意正数 ε,存在正整数 N,当 $k > N$ 时,有

$$S(t) \geqslant y(t) > y^*(t) - \varepsilon \geqslant \frac{aA(1-p)(1-e^{-B\tau})}{B[1-(1-p)e^{-B\tau}]} - \varepsilon = m_1 > 0, \quad k\tau < t \leqslant (k+1)\tau。$$

这就证明了存在正常数 m_1,当 t 充分大时,有 $S(t) \geqslant m_1$。

再证存在正数 m_2,当 t 充分大时,有 $I(t) \geqslant m_2$。证明分下列两步进行。

步骤 1 由条件 $R_3 > 1$,选取正数 m_3 及 ε 足够小,使 $\sigma = \dfrac{\beta\xi}{1+\alpha\dfrac{A}{d-b}} + b(1-\rho) - \lambda - d - \gamma > 0$,其中

$$\xi = \frac{aA}{(d-b+\beta m_3)}\frac{(1-p)(1-e^{-(d-b+\beta m_3)\tau})}{[1-(1-p)e^{-(d-b+\beta m_3)\tau}]} - \varepsilon。$$

可以证明存在 $t_1 \in (0, +\infty)$,使 $I(t_1) \geqslant m_3$。否则,对任意 $t \in (0, +\infty)$,都有 $I(t) < m_3$,由系统(1)得

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt} \geqslant aA - (d-b+\beta m_3)S(t) = aA - qS(t), & t \neq k\tau,\\ S(t^+) = (1-p)S(t), & t = k\tau,\end{cases} \tag{8}$$

其中,$q = d - b + \beta m_3$。作脉冲比较方程

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dt} = aA - qz(t), & t \neq k\tau,\\ z(t^+) = (1-p)z(t), & t = k\tau。\end{cases} \tag{9}$$

由引理2,该系统的全局渐近稳定的正的 τ 周期解为

$$z^*(t) = \frac{aA}{q}\left(1 - \frac{pe^{-q(t-k\tau)}}{1-(1-p)e^{-q\tau}}\right), \quad k\tau < t \leqslant (k+1)\tau,$$

且有惟一正的不动点 $z^* = \dfrac{aA(1-p)(1-e^{-q\tau})}{q(1-(1-p)e^{-q\tau})}$。由脉冲微分方程比较定理,对任意小的正数 ε,存在正整数 N,当 $k > N$ 时,有

$$S(t) \geqslant z(t) > z^*(t) - \varepsilon \geqslant \frac{aA}{d-b+\beta m_3}\left(1 - \frac{p}{1-(1-p)e^{-(d-b+\beta m_3)\tau}}\right) - \varepsilon = \xi, \quad k\tau < t \leqslant (k+1)\tau。$$

由系统(1)的第二个方程,当 $k > N$ 时,有

$$\frac{dI}{dt} \geqslant \left(\frac{\beta(z^*(t)-\varepsilon)}{1+\alpha\dfrac{A}{d-b}} + b(1-\rho) - \lambda - d - \gamma\right)I(t) \geqslant \sigma I(t)。 \tag{10}$$

当 $k > N$ 时,将式(10)在$[k\tau,(k+1)\tau]$上积分,得 $I((k+1)\tau) \geqslant I(k\tau)e^{\sigma\tau}$。选取 $N' \geqslant N$,于是,当 $k \to \infty$ 时,$I((k+N')\tau) \geqslant I(N'\tau)e^{k\sigma\tau} \to \infty$,矛盾。

步骤 2 如果对于任意的 $t \geqslant t_1$ 有 $I(t) \geqslant m_3$,则结论成立。否则,存在 $t > t_1$,使得 $I(t) < m_3$,假设 $t^* = \inf\limits_{t \geqslant t_1}\{t \mid I(t) < m_3\}$,则存在正整数 n_1,使得 $t^* \in (n_1\tau,(n_1+1)\tau]$,且当 $t_1 \leqslant t < t^*$ 时,有 $I(t) \geqslant m_3$。若 t^* 不是脉冲点,$I(t)$ 在 t^* 点连续,则有 $I(t^*) = m_3$;若 t^* 是脉冲点,即 $t^* = n_0\tau$,令 $t^{**} = t^* - \varepsilon_0$,$\varepsilon_0$ 充分小,有 $I(t^{**}) \geqslant m_3$。现在假设 t^* 不是脉冲点,否则用 t^{**} 同样进行讨论。对任意 $\varepsilon > 0$,选取 n_2,$n_3 \in Z_+$,使得

$$n_2\tau > \frac{1}{q}\ln\frac{M+z^*}{\varepsilon}, e^{-(\lambda+d+\gamma)(n_2+1)\tau}e^{n_3\sigma\tau} > 1。$$

可以证明,在区间$[(n_1+1)\tau,(n_1+1+n_2+n_3)\tau]$上必存在 t_2,使 $I(t_2) \geqslant m_3$。否则,若对任意 $t \in [(n_1+1)\tau,(n_1+1+n_2+n_3)\tau]$,都有 $I(t) < m_3$。考虑系统(9),其中 $t \in (k\tau,(k+1)\tau]$,$n_1+1 \leqslant k \leqslant n_1+1+n_2+n_3$,且 $z((n_1+1)\tau^+) = S((n_1+1)\tau^+)$。由于

$$|z(t) - z^*(t)| = \left|\left(z((n_1+1)\tau) - \frac{aA(1-p)(1-e^{-q\tau})}{q(1-(1-p)e^{-q\tau})}\right)e^{-q(t-(n_1+1)\tau)}\right| \leqslant (M+z^*)e^{-q(t-(n_1+1)\tau)}。$$

因此,当$(n_1+1+n_2)\tau \leqslant t \leqslant (n_1+1+n_2+n_3)\tau$ 时,有 $|z(t) - z^*(t)| < \varepsilon$,此时(10)式成立,类似于步骤1,有

$$I((n_1+1+n_2+n_3)\tau) \geqslant I((n_1+1+n_2)\tau)e^{n_3\sigma\tau}。$$

由系统(1),

$$\frac{dI}{dt} \geqslant -(\lambda+d+\gamma)I(t)。 \tag{11}$$

将上式在区间$[t^*,(n_1+1+n_2)\tau]$上积分,得

$$I((n_1+1+n_2)\tau) \geqslant I(t^*)\mathrm{e}^{-(\lambda+d+\gamma)((n_1+1+n_2)\tau-t^*)} \geqslant m_3\mathrm{e}^{-(\lambda+d+\gamma)(n_2+1)\tau}。$$

从而 $I((n_1+1+n_2+n_3)\tau) \geqslant m_3\mathrm{e}^{-(\lambda+d+\gamma)(n_2+1)\tau}\mathrm{e}^{n_3\sigma\tau} > m_3$,矛盾。

令 $\bar{t} = \inf\limits_{t\geqslant t^*}\{t \mid I(t) \geqslant m_3\}$,则 $I(\bar{t}) \geqslant m_3$,对于 $t \in [t^*, \bar{t})$,由式(11),得

$$I(t) \geqslant I(t^*)\mathrm{e}^{-(\lambda+d+\gamma)(t-t^*)} \geqslant m_3\mathrm{e}^{-(\lambda+d+\gamma)(n_2+1+n_3)\tau} = m_2。$$

当 $t > \bar{t}$ 时,由于 $I(\bar{t}) \geqslant m_3$,重复上述步骤即可。

综上所述,证明了存在正数 m_2,当 t 充分大时,有 $I(t) \geqslant m_2$。证毕。

4　讨论

对于外来人口,假定病人不能输入,因而只能是易感者或移出者输入,外来人口的常数输入保证了该地区的人口不致于灭绝。

记 $\omega = \dfrac{\beta A\left(\dfrac{a}{d} + \dfrac{b}{d(d-b)}\right)}{\lambda + d + \gamma - b(1-\rho)}$,则当 $p > (\omega - 1)(\mathrm{e}^{d\tau} - 1)$ 或 $\tau < \dfrac{1}{d}\ln\left(1 + \dfrac{p}{\omega - 1}\right)$ 时,$R_2 < 1$,疾病灭绝。因此,为了阻止传染病流行,要对人口的出生率进行有效控制,使得 $b < d$,同时适当选取脉冲免疫接种周期 τ 以及脉冲接种率 p,使 $R_2 < 1$。若脉冲免疫接种周期 τ 较大或脉冲接种率 p 太小,使得 $R_3 > 1$,疾病将持续存在。

R_2 和 R_3 与垂直传染的概率 $1-\rho$ 成正比,当 $1-\rho < \rho^*$ 时,$R_2 < 1$,这里

$$\rho^* = \frac{1}{b}\left(\lambda + d + \gamma - \frac{\beta A\left(\dfrac{a}{d} + \dfrac{b}{d(d-b)}\right)(1-\mathrm{e}^{-d\tau})}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-d\tau}}\right),$$

如果垂直传染的概率小于阀值 ρ^*,传染病将最终灭绝,理论上说明父母应该仔细注意自己的健康,进行优生优育,尽量避免其后代在出生时被垂直传染。

参考文献:

[1] 马知恩,周义仓,王稳地,等.传染病动力学的数学建模与研究[M].北京:科学出版社,2004:301-331.

[2] VANDEN D P, WATMOUGH J. A simple SIS epidemic model with a backward bifurcation[J]. Journal of Mathematical Biology, 2000, 40(6):525-540.

[3] VANDEN D P, WATMOUGH J. Epidemic solutions and endemic catastrophes[J]. Fields Institute Communications, 2003, 36(1):247-257.

[4] ALEXANDER Me, MOGHADAS Sm. Periodicity in an epidemic model with a generalized non-linear incidence[J]. Mathematical Biosciences, 2004, 189(1):75-96.

[5] 魏巍,刘少平,舒云星. 脉冲接种作用下具有垂直传染的 SIR 模型的定性分析[J].大学数学,2008,24(3):84-87.

[6] 孟新柱,陈兰荪,宋治涛.一类新的含有垂直传染与脉冲免疫的时滞 SEIR 传染病模型的全局动力学行为[J].应用数学和力学,2007,28(9):1123-1134.

[7] MENG Xinzhu, CHEN Lansun. Global dynamical behaviors for a SIR epidemic model with time delay and pulse vaccination[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2008, 12(5):1107-1122.

[8] MENG Xinzhu, CHEN Lansun. The dynamics of a new SIR epidemic model concerning pulse vaccination strategy[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 197(2):582-597.

[9] D'ONOFRIO Alberto. Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model[J]. Mathematial Biosciences, 2002, 179(1):57-72.

[10] 庞国萍,陶凤梅,陈兰荪.具有饱和传染率的脉冲免疫接种 SIRS 模型分析[J].大连理工大学学报,2007,47(3):460-464.

(编辑:陈丽萍)