不确定 AHP 中判断矩阵排序的最大似然法

王田娥[1],陈桂芬[1,2*],万保成[1]

(1.吉林农业大学信息技术学院,吉林长春 130118;2.吉林大学计算机科学与技术学院,吉林长春 130012)

摘要　在区间数正态分布的假设下,对于不确定 AHP 中判断矩阵的排序问题,提出了最大似然法的最优化模型,并使用优化软件 LINGO 对模型进行求解。实例证明该方法快速、有效。

关键词　不确定 AHP;判断矩阵;区间数;最大似然法

中图分类号　S11+9　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　0517－6611(2009)33－16193－02

Sorting of Judgment Matrix in Uncertain AHP by Maximum Likelihood Method

WANG Tian-e et al　(Information Technology College of Jilin Agricultural University, Changchun, Jilin 130118)

Abstract　Under the hypothesis of normal distribution of interval number, the optimization model of maximum likelihood was proposed for the sorting problem of judgment matrix in uncertain AHP, and the solution of the model was obtained with optimization software LINGO. The examples proved that the method was fast and effective.

Key words　Uncertain AHP; Judgment matrix; Interval number; Maximum likelihood method

层次分析法(AHP)在土壤肥力综合评价[1]、用地指标分解[2]、农地城市流转[3]等方面应用广泛。但传统的 AHP 要求判断矩阵元素为精确数,这种复杂性、不确定性及同一层次准则间的相对重要性往往难以精确给出,于是就产生了不确定 AHP。许树柏采用抽样方法对不确定 AHP 中的判断矩阵进行了计算,但工作量较大,方法不实用[4]。许先云等给出的一致性逼近公式虽较简单,但由于缺乏对区间数判断矩阵中每一个区间数的讨论,在一致性逼近及经过误差分析所得区间权重中选择较优权量时无从下手[5]。针对确定型 APH 的一致性权重估计,徐泽水使用了偏差的概念建立了优化模型,方法有新意,但不适用于区间数判断矩阵的排序[6-7]。范建峰等则在此基础上提出了元素相离度的概念,并建立了确定、不确定判断矩阵最优权重的目标优化模型,但相离度的确定缺乏理论依据,且给出的遗传算法求解方案缺乏实用性[8]。笔者给出的最大似然法则较好地解决了上述问题,建立的最优化模型可采用优化软件、LINGO 11.6 进行求解。

1　不确定 AHP 的基本概念

AHP 是定性问题定量化的一种有效方法,以其适应性,简洁性、实用性、系统性而倍受青睐。AHP 可借助人的知识、经验、智慧对那些无法用经典数学方法处理的定性问题给出符合实际的答案。AHP 解决问题的详细步骤见文献[4]。进行判断时,需给出定性判断的量比值,即标度。标度的选取可参考表 1。该标度的特点是将比较的程度线性化,体现了人的感觉的累加性。

表 1　标度选取标准

Table 1　The scale selection

程度 Degree	标度 Scale	程度 Degree	标度 Scale
相同	1	强烈	7
稍微	3	极端	9
明显	5		

基金项目　国家“863”项目(2006AA10Z245,2006AA10A309)。

作者简介　王田娥(1977－),女,山西平定人,讲师,从事运筹学方面的研究。*通讯作者。

收稿日期　2009-07-23

下面是有关区间数和区间判断矩阵的定义和结论[5]。

定义 1　设 R 为实数域。称闭区间 $X=[x_1,x_2]$为区间数,其中,$x_1,x_2\in R$,$0<x_1\leqslant x_2$,当 $x_1=x_2$ 时,区间数为正实数;当且仅当 $a_1=b_1$,$a_2=b_2$ 时,称 2 个区间数 $a=[a_1,a_2]$,$b=[b_1,b_2]$相等,记作 $a=b$。

(1)加法 $a+b=[a_1+b_1,a_2+b_2]$。

(2)乘法 $ab=[a_1b_1,a_2b_2]$。

(3)除法 $a/b=[a_1/b_1,a_2/b_2]$。

定义 2　称 $A=(A_{ij})_{n\times n}$,$A_{ij}=[a_{ij},b_{ij}]$ 为区间数判断矩阵,若其满足:

(1)$A_{ij}=[1,1]$$(i=1,2,\cdots,n)$。

(2)i,j,A_{ij}为区间数,且满足 $1/9\leqslant a_{ij}\leqslant b_{ij}\leqslant 9$。

(3)$a_{ij}b_{ji}=1$,$b_{ij}a_{ji}=1$。

若对任意 i,j,均有 $a_{ij}=b_{ij}$,则称 A 为数字判断矩阵,即通常所说的正互反阵。

定义 3　设 $A=(A_{ij})_{n\times n}$为区间数判断矩阵,称 $C=(c_{ij})_{n\times n}$为 A 的中值数字矩阵,简称中值矩阵,则:$c_{ij}=(a_{ij}+b_{ij})/2$。

定义 4　设 $A=(A_{ij})_{n\times n}$为一区间数判断矩阵,称 A 为一致性区间数矩阵,则对任意 $i,j,k(i,j,k=1,2,\cdots,n)$,均有:

$$A_{ij}A_{jk}=A_{ik}$$

定理 1　数字判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为一致性矩阵的充分必要条件是行向量(或列向量)对应成比例。

定理 2　数字矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为一致性矩阵的充要条件是对任意 $i,j(i,j=1,2,\cdots,n)$,其排序向量均满足:

$$a_{ij}=w_i/w_j$$

2　不确定判断矩阵排序的最大似然估计

2.1　区间数概率假设和一致性逼近原则　对区间数概率进行如下假设:2 准则比较值在区间数上服从均值为区间数中值的正态分布。

为了确定区间数判断矩阵的最优权重,关键要进行一致性逼近。一致性逼近的原则为:①逼近矩阵为一致性矩阵,即具有完全一致性;②逼近矩阵尽量靠近中值矩阵,即逼近矩阵相对中值矩阵有尽可能小的偏差;③所得一致性矩阵的元素位于原区间数判断矩阵的对应区间中。得到区间数判断矩阵后,需构造数学模型,利用区间数判断矩阵的信息得

出一个满意的答案。

2.2　最大似然的最优化模型　根据上述区间数概率假设及一致性逼近原则建立最大似然的最优化模型。设区间数判断矩阵为 $A=(A_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}=[a_{ij},b_{ij}]$，其中值矩阵为 C，权重向量为 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$。根据比较矩阵的互反性，仅需给出 A 的上三角比较值，即 $n(n-1)/2$ 个区间数。这些区间数的联合概率分布密度函数为：

$$p(w)=\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{b_{ij}-a_{ij}}{6}}\exp\left(-\frac{\left(\frac{w_i}{w_j}-\frac{a_{ij}+b_{ij}}{2}\right)^2}{2\left(\frac{b_{ij}-a_{ij}}{6}\right)^2}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n}\frac{6}{\sqrt{2\pi}(b_{ij}-a_{ij})}\exp\left(-18\left(\frac{\frac{w_i}{w_j}-c_{ij}}{b_{ij}-a_{ij}}\right)^2\right)$$

两边取对数得：

$$\ln p(w)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(-18\left(\frac{\frac{w_i}{w_j}-c_{ij}}{b_{ij}-a_{ij}}\right)^2+\ln\frac{6}{\sqrt{2\pi}(b_{ij}-a_{ij})}\right)$$

于是似然函数可取作：

$$L(w)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}-\left(\frac{\frac{w_i}{w_j}-c_{ij}}{b_{ij}-a_{ij}}\right)^2$$

考虑到权重的非负性和一致性逼近原则(3)，建立如下最优化模型：

$\max L(w)$

$s.t.\ \sum_{i=1}^{n}w_i=1,a_{ij}\leqslant w_{ij}\leqslant b_{ij}(i=1,2,\cdots,n-1;j=i+1,\cdots,n),w_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$。

3　应用实例

3.1　实例 1[5]　煤炭生产企业的综合评价一般考虑：A1，产量；A2，效益；A3，成本；A4，安全等因素。综合 3 个决策者得到的区间数判断矩阵（仅给出上三角部分）为：

$$\begin{pmatrix}[1,1] & [3,4.5] & [1.5,2.7] & [1,2]\\ & [1,1] & [0.4,0.9] & [0.25,0.55]\\ & & [1,1] & [0.4,1.2]\\ & & & [1,1]\end{pmatrix}$$

LINGO 求解程序：

```
MODEL:
TITLE 不确定 AHP 中判断矩阵排序的最大似然法;
DATA:
  n = 4;
ENDDATA
SETS:
  lub/1..2/;
  rows/1..n/: w;
  matrix(rows,rows)|&1#LT#&2: delta;
  matrix_lub(matrix,lub)|&1#lt#&2: A;
ENDSETS
DATA:
  A = 3,4.5  1.5,2.7  1,  2
             0.4,0.9  0.25,0.55
                      0.99,1.2;
ENDDATA
min = @ sum(matrix(i,j): ((delta(i,j) - (A(i,j,1) + A(i,j,2))/2)/(A(i,j,2) - A(i,j,1)))^2);
@ for(matrix(i,j): w(j) * delta(i,j) = w(i));
@ for(matrix(i,j): A(i,j,1) < delta(i,j); delta(i,j) < A(i,j,2););
@ sum(rows: w) = 1;
@ for(rows: w > 0.000 1);
END
```

计算得到最优权重为(0.411 9，0.109 6，0.246 1，0.232 4)，耗时不足 1 s。

3.2　实例 2[8]　对某一混凝土连续梁桥的安全性能进行综合评估时，采用该研究介绍的方法获取评估指标的权重。仅给出混凝土质量的评估模型，考虑下面 5 个指标：表观质量，混凝土裂缝，保护层厚度，钢筋锈蚀和混凝土强度。通过专家打分和综合评估，给出评估指标的区间数判断矩阵：

$$\begin{pmatrix}[1,1] & [0.5,1] & [3,5] & [0.4,0.67] & [0.25,0.33]\\ & [1,1] & [4,5] & [0.5,1] & [0.29,0.4]\\ & & [1,1] & [0.2,0.25] & [0.14,0.17]\\ & & & [1,1] & [0.5,1]\\ & & & & [1,1]\end{pmatrix}$$

LINGO 求解程序同上例类似，只需将数据部分改动一下即可。计算得到最优权重为(0.142 7，0.171 5，0.042 9，0.214 3，0.428 6)，耗时不足 1 s。

4　结语

该研究针对不确定 AHP 中判断矩阵的排序问题，提出了最大似然法的最优化模型，并利用 LINGO 软件对优化模型进行求解。2 个实例计算结果表明，该方法是有效的。

参考文献

[1] 章海波，骆永明，赵其国，等. 基于改进层次分析法的土壤肥力质量综合评价[J]. 土壤学报，2006，43(4)：577－583.
[2] 尧德明，陈玉福，张富刚，等. 层次分析法在土地利用总体规划用地指标分解中的应用[J]. 安徽农业科学，2007，35(34)：11175－11176.
[3] 黄烈佳，张波清，张安录. 农地城市流转区位决策问题探讨[J]. 资源科学，2007，29(3)：183－190.
[4] 许树柏. 实用决策方法——层次分析法原理[M]. 天津：天津大学出版社，1988.
[5] 许先云，杨永清. 不确定 AHP 判断矩阵的一致性逼近与排序方法论[J]. 系统工程理论与实践，1998(2)：19－22.
[6] 徐泽水. 层次分析法中判断矩阵排序的新方法——广义最小平方方法[J]. 系统工程理论与实践，1998(9)：38－43.
[7] 徐泽水. 层次分析中判断矩阵排序的最小偏差二乘法[J]. 系统工程理论方法应用，1998，7(3)：72－76.
[8] 范剑峰，袁海庆，钟珞. 不确定层次分析下的桥梁评估最优指标权重确定[J]. 公路交通科技，2007，22(9)：65－68.