第 44 卷 第 2 期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2009 年 2 月
Vol.44 No.2 Journal of Shandong University(Natural Science) Feb. 2009

文章编号:1671-9352(2009)02-0024-04

有限分形介质中带有分数阶振子的分数阶反应扩散方程及其解析解

林爱华, 蒋晓芸
(山东大学数学学院, 山东 济南 250100)

摘要:建立了有限分形介质中带有分数阶振子的分数阶反应扩散方程,利用 Laplace 变换和有限 Hankel 变换及相应的逆变换,给出上述问题浓度分布的解析解并以广义 Mittag-Leffler 的形式给予表示。将二维,三维空间以及整数阶的有限分形介质中反应扩散的模型作为本文的特例进行讨论。

关键词:分数阶微积分;分形介质;分数阶振子;Laplace 变换;有限 Hankel 变换;广义 Mittag-Leffler 函数
中图分类号:O175.29 **文献标志码:**A

The solution of the fractional reaction-diffusion equation with a fractional oscillator in a finite fractal medium

LIN Ai-hua, JIANG Xiao-yun
(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: The fractional reaction-diffusion differential equation with a fractional oscillator in a finite fractal medium was established. By applying Laplace transformation, the finite Hankel transformation and their inverse transform, the exact solution of the model were obtained. The expression in the form of the generalized Mittag-Leffler function was given. Finally, the solutions of two-dimensional space, three-dimensional space and the integral diffusion equation as some particular cases of this paper were discussed.

Key words: fractional calculus; fractal medium; fractional oscillator; Laplace transform; the finite Hankel transform; generalized Mittag-Leffler function

0 引言

分数阶微积分及最简单的分数阶微分方程最早由 Leibniz 和 L'Hospital 于 17 世纪提出。分数阶算子与传统的微分算子不同,是一种超长时间意义下的极限,是一种表征非局部的整体算子,这是由于分形物体不是光滑可微的,它要求的只是处处连续,可以是处处不可微的。如果从粗颗粒化进程的观点来看,两者是可以统一的。此后经过漫长的岁月,形成了 Caputo 分数阶算子[1],其 λ 阶微分算子的定义为 ${}_0D_t^{\lambda}f(t)=\int_0^t\frac{(t-\tau)^{n-\lambda-1}}{\Gamma(n-\lambda)}f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau, 0\leqslant n-1<\lambda<n$,其中 $\Gamma(q)$ 为 Gamma 函数。尽管有如此长的历史发展过程,但由于当时缺乏实际的应用背景,所以发展十分缓慢。直到 20 世纪 70 年代末,美国耶鲁大学 Mandelbrot[2,3] 教授首次提出,在自然界和其他一些科技领域中存在着大量分数维以及整体和部分之间的自相似的例子,并给出了一系列杰出的创造性的工作。自此,分数阶微积分作为分形几何和分形维数的一个基本概念而得

收稿日期:2008-10-17
基金项目:山东省自然科学基金资助项目(Y2007A06)
作者简介:林爱华(1982-),女,硕士研究生,研究方向为分数阶微积分. Email:aihualin-1230@163.com

到了很快的发展,并被广泛地应用于各类复杂系统。作为国际非线性研究的一个新的领域,近些年来,分数阶微积分被成功地应用到量子力学[4],生物物理和生物力学,反常扩散与随机游走理论,黏弹性动力学,非 Newton 流体力学,混沌和湍流等复杂系统[5] 中。反过来,这些应用的研究也加速了分数阶微积分理论的发展。近来,Jiang xiaoyun[6],段俊生[7,8], A.Schot[9] 等在这方面都做了大量的工作,并且取得了很好的结果。他们分别求解了在无序分形介质和欧氏空间中由瞬时点源反常扩散所形成的浓度概率密度分布并给出了散射函数的解析表达式,同登科则对分形油藏中非 Newton 黏弹性液作了分数阶流动分析[10]。本文在前人所做杰出成果的启发下,建立了有限分形介质中带有分数阶振子[11] 的分数阶反应扩散方程,利用 Laplace 变换及其逆变换[7],有限 Hankel 变换及其逆变换[12] 和广义 Mittag-Leffler 函数[13] 的性质给出了上述问题浓度分布的解析解,并将方程在二维空间,三维空间下模型的解以及整数阶的模型的解作为本文的特例给予了讨论。

1　模型及其解

在内外半径分别为 1 和 R 的圆环空心柱体内,建立如下的有限分形介质中带有分数阶振子的分数阶反应扩散方程:

$$\frac{\partial^\lambda c(r,t)}{\partial t^\lambda} = \frac{D}{r^{df-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{df-1}\frac{\partial c(r,t)}{\partial r}\right) - \frac{\alpha}{\Gamma(\beta)}\int_0^t \mathrm{d}t'(t-t')^{\beta-1}c(r,t'), \tag{1}$$

$$c(r,0) = \delta(r-r_0),\ 1 < r_0 < R, \tag{2}$$

$$c(r,t) = 1,\ r = 1,\ t > 0, \tag{3}$$

$$c(r,t) = 0,\ r = R,\ t > 0, \tag{4}$$

其中 $c(r,t)$ 为分布浓度,df 为分形维数,D 为分形介质扩散系数,方程(2) 为初条件,方程(3) 和(4) 为边条件。对方程(1) ~ (4) 作分数阶 Caputo 导数的 Laplace 变换 $L\{{}_0D_t^\lambda c(r,t),s\} = s^\lambda L\{c(r,t)\} - {}_0D_t^{\lambda-1}c(r,0)$ 得:

$$s^\lambda\bar{c}(r,s) - s^{\lambda-1}\delta(r-r_0) = \frac{D}{r^{df-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{df-1}\frac{\partial\bar{c}(r,s)}{\partial r}\right) - \alpha s^{-\beta}\bar{c}(r,s), \tag{5}$$

$$\bar{c}(r,s) = \frac{1}{s}, r = 1, s > 0, \tag{6}$$

$$\bar{c}(r,s) = 0, r = R, s > 0, \tag{7}$$

其中 $\bar{c}(r,s)$ 是 $c(r,t)$ 的像函数。再对上述拉氏空间定解问题(5) ~ (7) 作如下变换[10]:

$$\bar{c}(r,s) = r^\upsilon f(y), y = r, \tag{8}$$

其中 $\upsilon = 1 - \dfrac{df}{2}$,整理后得到:

$$\frac{s^\lambda + \alpha s^{-\beta}}{D}f(y) = f''(y) + \frac{1}{y}f'(y) - \frac{\upsilon^2}{y^2}f(y) + \frac{s^{\lambda-1}\delta(y-y_0)}{Dy^\upsilon}, \tag{9}$$

$$f(y)\mid_{y=1} = \frac{1}{s}, \tag{10}$$

$$f(y)\mid_{y=R} = 0。 \tag{11}$$

对方程(9) ~ (11) 作 υ 阶有限 Hankel 变换[10,12]:$\tilde{f}(\lambda_i) = H_\upsilon\{f(y)\} = \int_1^R yf(y)\varphi(\lambda_i y)\mathrm{d}y$,这里的 $\varphi(\lambda_i y) = J_\upsilon(\lambda_i)Y_\upsilon(\lambda_i y) - J_\upsilon(\lambda_i y)Y_\upsilon(\lambda_i)$,$\lambda_i$ 是方程 $\varphi(\lambda_i R) = 0$ 的正根,并且 $J_\upsilon(x)$ 和 $Y_\upsilon(x)$ 分别为 υ 阶第一类和第二类 Bessel 函数。经过变换得到

$$\frac{s^\lambda + \alpha s^{-\beta}}{D}\tilde{f}(\lambda_i) = \int_1^R\left(\frac{\mathrm{d}^2 f(y)}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y} - \frac{\upsilon^2}{y^2}f(y)\right)y\varphi(\lambda_i y)\mathrm{d}y + \frac{s^{\lambda-1}}{D}\int_1^R y^{1-\upsilon}\delta(y-y_0)\varphi(\lambda_i y)\mathrm{d}y, 1 < y_0 < R, 1 < y_0 < R, \tag{12}$$

应用初始条件以及 Bessel 函数的 Wronsky 关系式[14]

$$J_\upsilon(\lambda_i y)Y'_\upsilon(\lambda_i y) - J'_\upsilon(\lambda_i y)Y_\upsilon(\lambda_i y) = \frac{2}{\pi\lambda_i y}, \tag{13}$$

并且考虑到特征值问题：$\dfrac{d^2\varphi(\lambda_i y)}{dy^2}+\dfrac{1}{y}\dfrac{d\varphi(\lambda_i y)}{dy}+\left(\lambda_i^2-\dfrac{\upsilon^2}{y^2}\right)\varphi(\lambda_i y)=0$，可以得到：

$$\tilde{f}(\lambda_i)=\frac{2}{\pi s}\frac{D}{s^\lambda+\alpha s^{-\beta}+D\lambda_i^2}+\frac{DKs^{\lambda-1}}{s^\lambda+\alpha s^{-\beta}+D\lambda_i^2}, \tag{14}$$

其中 $K=\dfrac{y_0^{1-\upsilon}}{D}\varphi(\lambda_i y_0)$。再对上式进行有限 Hankel 逆变换[12]：

$$H_\upsilon^{-1}\{\tilde{f}(\lambda_i)\}=f(y)=\frac{\pi^2}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^2\tilde{f}(\lambda_i)\varphi(\lambda_i y)J_\upsilon^2(R\lambda_i)}{J_\upsilon^2(\lambda_i)-J_\upsilon^2(\lambda_i R)}, \tag{15}$$

就可以得到表达式

$$f(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi\lambda_i^2 D\varphi(\lambda_i y)J_\upsilon^2(\lambda_i R)}{J_\upsilon^2(\lambda_i)-J_\upsilon^2(\lambda_i R)}\left[\frac{1}{s(s^\lambda+\alpha s^{-\beta}+D\lambda_i^2)}+\frac{\pi K s^{\lambda-1}}{2(s^\lambda+\alpha s^{-\beta}+D\lambda_i^2)}\right]。 \tag{16}$$

将(16)式代入方程(8)，可以很容易得到

$$\bar{c}(r,s)=r^\upsilon f(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi\lambda_i^2 r^\upsilon D\varphi(\lambda_i y)J_\upsilon^2(\lambda_i R)}{J_\upsilon^2(\lambda_i)-J_\upsilon^2(\lambda_i R)}\bar{A}(\lambda_i,s), \tag{17}$$

其中 $\bar{A}(\lambda_i,s)=\dfrac{1}{s(s^\lambda+\alpha s^{-\beta}+D\lambda_i^2)}+\dfrac{\pi K s^{\lambda-1}}{2(s^\lambda+\alpha s^{-\beta}+D\lambda_i^2)}$。显然，为了求得精确解的表达式，只要求得 $\bar{A}(\lambda_i,s)$ 就可以了。采用离散逆 Laplace 变换技术[1,15] 可以得到

$$A(\lambda_i,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\alpha^n t^{(n+1)\lambda+n\beta}E_{\lambda,\lambda+n\beta+1}^{(n)}(-D\lambda_i^2 t^\lambda)+\frac{K\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\alpha^n t^{n\lambda-n\beta-2}E_{\lambda,-n\beta-1}^{(n)}(-D\lambda_i^2 t^\lambda),$$

其中 $E_\alpha^\beta(z)$ 是广义 Mittag-Leffler 函数[13]。上式 $A(\lambda_i,t)$ 的得到利用了广义 Mittag-Leffler 函数的 Laplace 变换的一个重要公式[1] $L^{-1}\left\{\dfrac{n!\,s^{\lambda-\mu}}{(s^\lambda\mp c)^{n+1}};t\right\}=t^{n\lambda+\mu-1}E_{\lambda,\mu}^{(n)}(\pm ct^\lambda)$，$\mathrm{Re}(s)>|c|^{\frac{1}{\lambda}}$，从而

$$c(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi\lambda_i^2 r^\upsilon D\varphi(\lambda_i r)J_\upsilon^2(\lambda_i R)}{J_\upsilon^2(\lambda_i)-J_\upsilon^2(\lambda_i R)}A(\lambda_i,t), \tag{18}$$

其中 $A(\lambda_i,t)$ 如上所示。方程(18)即为有限分形介质中带有分数阶振子的分数阶扩散方程(1)～(4)的精确解。

2 结果与讨论

当 $df=2$，$\upsilon=0$ 时，方程(18)简化为

$$c(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi D\lambda_i^2\varphi(\lambda_i r)J_0^2(\lambda_i R)}{J_0^2(\lambda_i)-J_0^2(\lambda_i R)}A(\lambda_i,t), \tag{19}$$

其中 $K=y_0\varphi_0(\lambda_i y_0)=y_0[J_0(\lambda_i)Y_0(\lambda_i y_0)-J_0(\lambda_i y_0)Y_0(\lambda_i)]$。当 $df=3$ 时，$\upsilon=-\dfrac{1}{2}$，$K=y_0^{\frac{3}{2}}\varphi_{-\frac{1}{2}}(\lambda_i y_0)$，

$$c(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi D\lambda_i^2 r^{-\frac{1}{2}}\varphi_{-\frac{1}{2}}(\lambda_i r)J_{-\frac{1}{2}}^2(\lambda_i R)}{J_{-\frac{1}{2}}^2(\lambda_i)-J_{-\frac{1}{2}}{}^2(\lambda_i R)}A(\lambda_i,t)。 \tag{20}$$

方程(19)与(20)分别为有限分形介质中带有分数阶振子的分数阶扩散方程在二维和三维空间中模型的精确解。

如果 $\lambda=1$，则方程(18)可简化为

$$c(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi D\lambda_i^2 r^\upsilon\varphi(\lambda_i r)J_\upsilon^2(\lambda_i R)}{J_\upsilon^2(\lambda_i)-J_\upsilon^2(\lambda_i R)}A(\lambda_i,t), \tag{21}$$

其中 $A(\lambda_i,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\alpha^n t^{n+1+n\beta}E_{1,n\beta+2}^{(n)}(-D\lambda_i^2 t)+\dfrac{K\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\alpha^n t^{n-n\beta-2}E_{1,-n\beta-1}^{(n)}(-D\lambda_i^2 t)$。此时方程(21)为经典的整数阶的有限分形介质中带有分数阶振子的反应扩散方程的解。

若 $\alpha=0$ 则 $A(\lambda_i,t)=t^\lambda E_{\lambda,\lambda+1}^{(0)}(-D\lambda_i^2 t^\lambda)+\dfrac{K\pi}{2}E_{\lambda,1}^{(0)}(-D\lambda_i^2 t^\lambda)$。相应地，方程(18)转化为

$$c(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi D\lambda_i^2 r^{\upsilon}\varphi(\lambda_i r)J_{\upsilon}^2(\lambda_i R)}{J_{\upsilon}^2(\lambda_i)-J_{\upsilon}^2(\lambda_i R)}A(\lambda_i,t), \tag{22}$$

此为不含吸附项的有限分形介质中分数阶反应扩散方程的解。特别地,$df=2$ 时,

$$c(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi D\lambda_i^2\varphi(\lambda_i r)J_0^2(\lambda_i R)}{J_0^2(\lambda_i)-J_0^2(\lambda_i R)}A(\lambda_i,t)。 \tag{23}$$

其中 $A(\lambda_i,t)$ 中 $K=y_0\varphi_0(\lambda_i y_0)=y_0[J_0(\lambda_i)Y_0(\lambda_i y_0)-J_0(\lambda_i y_0)Y_0(\lambda_i)]$。同理,$df=3$ 时,运用类似的方法可以得到

$$c(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi Dr^{-\frac{1}{2}}\lambda_i^2\varphi(\lambda_i r)J_{-\frac{1}{2}}^2(\lambda_i R)}{J_{-\frac{1}{2}}^2(\lambda_i)-J_{-\frac{1}{2}}^2(\lambda_i R)}A(\lambda_i,t), \tag{24}$$

其中 $A(\lambda_i,t)$ 中 $K=y_0^{\frac{3}{2}}\varphi_{-\frac{1}{2}}(\lambda_i y_0)$。方程(23)和方程(24)分别为不含吸附项的二维和三维欧式空间情形下有限分形介质中分数阶反应扩散方程的解,其结果与文献[12]是一致的。

3　结论

本文建立了有限分形介质中带有分数阶振子的分数阶反应扩散方程,利用 Laplace 变换,有限 Hankel 变换及相应的逆变换得到了以广义 Mittag-Leffler 函数表示的上述问题浓度分布的解析解。在文章的最后,将二维、三维空间以及整数阶的有限分形介质中反应扩散的模型作为本文的特例给予了讨论。本文所做工作正是前人对分形介质中分数阶反应扩散方程研究的推广。

参考文献:

[1] PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. San Diego: Academic, 1999.

[2] MANDELBROT B B. The fractional geometry of nature[M]. New York: W H Freeman, 1982.

[3] MANDELBROT B B. Is the nature fractals[J]. Science,1982, 279: 5352.

[4] WANG Shaowei, XU Mingyu. Generalized fractional Schrödinger equation with space-time fractional derivatives[J]. J Math Phys, 2007, 48:043502.

[5] MA Junhai. A Study on fractal characteristic and inherence complexity of Shanghai stock exchange's data[J]. International Conference on Dynamics, Vibration and Control, 2007, 14:305-309.

[6] JIANG Xiaoyun, XU Mingyu. Analysis of fractional anomalous diffusion caused by an instantaneous point source in disordered fractal media[J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2006, 41:156-165.

[7] 段俊生, 徐明瑜.有限区间上的分数阶扩散－波方程定解问题与 Laplace 变换[J].高校应用数学学报:A 辑, 2004, 19(3): 165-171.

[8] 段俊生, 徐明瑜. 分数阶扩散方程半无界混合问题的解[J].高校应用数学学报:A 辑, 2003, 18(3):259-266.

[9] SCHOT A, LENZI M K, EVANGELISTA L R, et al. Fractional diffusion equation with an absorbent term and a linear external force: Exact solution[J]. Physics Letters A, 2007, 366:346-350.

[10] 同登科, 王瑞和. 分形油藏非 Newton 黏弹性液分数阶流动分析[J]. 中国科学:G 辑, 2004, 34(1):87-101.

[11] NARAHARI B N, ACHAR, HANNEKEN J W, et al. Dynamics of the fractional oscillator[J]. Physica A, 2001, 297:361-367.

[12] DEBNATHAND L, BHATTA D. Integral transforms and their applications[M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2007.

[13] MATHAI A M, SAXENA R K. The *H*-Function with applications in statistics and other disciplines[M]. New Delhi: Wiley Eastern Limited, 1978.

[14] ÖZISIK M N. Heat Conduction[M]. New York: Wiley, 1980.

[15] XU Mingyu, TAN Wenchang. Theoretical analysis of velocity field, stress field and vortex sheet of generalized second order fluid with fractional anomalous diffusion[J]. Siciece in China Series A, 2001, 44(11):1387-1399.

(编辑:陈丽萍)