

◎ 博士论坛 ◎

混沌运动对初值敏感依赖的本质原因

孔令云, 樊养余

KONG Ling-yun, FAN Yang-yu

西北工业大学 电子信息学院, 西安 710072

School of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China

E-mail: konglingyun@mail.nwpu.edu.cn

KONG Ling-yun, FAN Yang-yu. Essential reason for chaotic system to be hypersensitive to initial value. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(32): 1-4.

Abstract: Taking example for Lorenz's chaotic system, Chen's system, Lü's system and Rössler's system, several crucial problems with regard to chaos are researched, such as the mechanism to form chaotic attractors, the structural characteristic of chaotic attractors and the essential reason why the motion of a chaotic system is hypersensitive to initial value and so on. It is pointed out that each chaotic system comprises leastways two nonlinear motion modes. The state of system moves from one mode to another. The essential reason to produce chaos is nonperiodic motion switch between two modes. Asynchronous switch of two state motions from adjacent different initial conditions results in sensitive dependence on initial value.

Key words: chaotic attractor; mechanism of chaos; Lorenz's system; Chen's system; Rössler's system

摘要:以 Lorenz 系统、Chen、Lü 系统和 Rössler 系统为例,研究了混沌吸引子形成的机理、结构特征以及混沌运动对初值敏感依赖的本质原因。指出,连续非线性动力学系统要产生混沌吸引子,至少要存在两种非线性运动模式,并在两种运动模式之间进行非严格周期地转换;相邻状态在同一运动模式中运动的逐渐分离,和在不同运动模式之间的不同时(或不同幅度)转换,导致了系统运动对初值的敏感依赖,这就是混沌运动的本质。

关键词:混沌吸引子;混沌机理;Lorenz 系统;Chen 系统;Rössler 系统

DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.32.001 **文章编号:**1002-8331(2009)32-0001-04 **文献标识码:**A **中图分类号:**O545

国内外研究者通常采用 Melnikov 方法^[1-2]、计算最大 Lyapunov 指数、关联维数和功率谱等数值方法来验证系统是否存在混沌运动。这些平均特性计算和统计特性描述都掩盖了非线性系统动力学行为的本质,不可能揭示出混沌产生的本质机理。采用分岔分析、拓扑结构分析^[3]、轨道流形分析、吸引子的周期轨道分析方法,也都没有能够圆满地回答为什么系统在一定参数条件下会产生具有复杂结构的混沌吸引子、为什么系统的运动会对初值有敏感依赖性等根本问题。“目前仍然缺乏一种深入理解混沌机理、阐明混沌吸引子结构而又能够直接应用于工程实际的理论框架”^[4]。

以 Lorenz 系统、Chen、Lü 系统和 Rössler 系统为例,从系统的收敛发散机制和非线性运动模式的角度来分析连续非线性动力学系统混沌产生的机理、对初值敏感的原因和条件以及混沌吸引子的结构特征。

1 Lorenz 系统的运动模式、收敛发散机制及混沌产生的机理

1.1 运动模式及混沌吸引子的形成机制

Lorenz 系统是国内外学者研究得最多的一种混沌系统。重写 Lorenz 系统^[5]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay \\ \dot{y} = cx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (1)$$

其 3 个平衡态为:

$$\begin{aligned} O: (x, y, z) &= (0, 0, 0) \\ S_1: (x, y, z) &= (\sqrt{b(c-1)}, \sqrt{b(c-1)}, c-1) \\ S_2: (x, y, z) &= (-\sqrt{b(c-1)}, -\sqrt{b(c-1)}, c-1) \end{aligned} \quad (2)$$

先来分析当取 $a=10, b=8/3, c=28$ (可出现混沌) 时, S_2 :

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60872159)。

作者简介:孔令云(1966-),男,博士后,研究方向:控制理论与应用、混沌学、混沌信号处理等;樊养余,男,教授,博士生导师,英国华威大学访问学者,研究领域为数字信号处理、数字图像处理等。

收稿日期:2009-07-21 **修回日期:**2009-09-14

$(-\sqrt{72}, -\sqrt{72}, 27)$ 邻域内近似线性化方程的运动模式和收敛发散机制。此时, S_2 邻域内的近似线性化方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{72} \\ -\sqrt{72} & -\sqrt{72} & -8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

求得系统的特征值为 $\lambda_1 = -13.8546, \lambda_{2,3} = 0.0940 \pm 10.1945i$ 。那么, 近似线性化方程的解为:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_{11} e^{-13.8546t} + C_{12} e^{0.094t} \cos 10.1945t + C_{13} e^{0.094t} \sin 10.1945t \\ y_1(t) &= C_{21} e^{-13.8546t} + C_{22} e^{0.094t} \cos 10.1945t + C_{23} e^{0.094t} \sin 10.1945t \\ z_1(t) &= C_{31} e^{-13.8546t} + C_{32} e^{0.094t} \cos 10.1945t + C_{33} e^{0.094t} \sin 10.1945t \end{aligned}$$

其运动模式可分为由 λ_1 确定的模式和由 $\lambda_{2,3}$ 确定的模式。前者按指数作快速收敛运动, 后者在相空间的一个平面内(证明略)作螺旋发散运动。由于 $\lambda_1 < 0$, 称该平面为吸引平面 Π_2 。例如以平面 Π_2 内一点 $(-0.0686, 0.0014, 0.1766)$ 为初始条件的解为:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -0.0686 e^{0.094t} \cos 10.1945t + 0.0693 e^{0.094t} \sin 10.1945t \\ y_1(t) &= 0.0014 e^{0.094t} \cos 10.1945t - 0.1533 e^{0.094t} \sin 10.1945t \\ z_1(t) &= 0.1766 e^{0.094t} \cos 10.1945t - 0.10046 e^{0.094t} \sin 10.1945t \end{aligned}$$

可求得相空间中吸引平面的方程为: $-2.73x_1 + 0.29y_1 - 1.06z_1 = 0$ 。

从相空间任意点出发的轨线, 先被吸引到吸引平面上, 不久后在吸引平面内作螺旋发散运动。近似线性化系统从点 $(0.1, 0.1, 0.1)$ 出发, 积分 20 s 所得的相空间轨线见图 1。

在相同的初始条件 $(0.1, 0.1, 0.1)$ 下, 对(1)直接积分 10 s, 相轨迹图见图 2。通过数值模拟, 得到非线性方程(1)的近似运动模式为:

$$\begin{cases} x=0.1e^{(0.13+10.167i)(t-0.068)} \\ y=0.1e^{(0.13+10.167i)(t+0.01)} \\ z=0.1e^{(0.13+10.167i)(t+0.152)} \end{cases}$$

比较图 1 和图 2 可见, 非线性系统(1)的运动机制与其对应的线性化方程(3)的运动机制几乎相同。轨线被吸引到平面 Π_2 (线性化方程(3)的吸引平面)上, 之后沿着平面作螺旋发散运动。仿真结果表明, 在 S_2 的较大邻域内(没有进入 O, S_1 的邻域时), 非线性误差对运动模式的影响并不是太大, 至少没有改变运动模式的本质属性, 没有改变收敛发散的基本运动机制。尽管用线性模式来代替非线性模式因有较大的误差而必需修正, 但用线性系统的运动机制来解释非线性系统的收敛发散机制是完全可以的。

再来考察 $S_1: (\sqrt{72}, \sqrt{72}, 27)$ 邻域的情况。线性化方程

为(3)中根号前变号。它和(3)有相同的特征方程和特征根, 表现出一定的对称性。所不同的是吸引平面 Π_1 在相空间的位置与 Π_2 有所不同。通过计算得出相空间中吸引平面的方程为: $2.6933x_1 + 0.5378y_1 + 1.419z_1 = 0$ 。吸引平面 Π_1 和 Π_2 之间的夹角约为 28.571° 。

由以上分析, Lorenz 系统混沌吸引子的形成机制可叙述为:

- (1) 3 个平衡点的属性确定了其邻域的 3 种运动模式。系统状态在其邻域内的收敛与发散运动机制, 可用其对应的近似线性化方程的运动机制来近似描述。
- (2) 从 S_1 (或 S_2) 邻域出发的状态, 先被吸引到近似平面(仍记为 Π_1) (或 Π_2) 上, 然后在该近似平面内作螺旋发散运动。
- (3) 当系统的状态越过两近似平面的交线后, 轨线转入另一个由 S_2 (或 S_1) 确定的近似平面 Π_2 (或 Π_1) 仍作螺旋发散运动。其最终的运动结果是, 在这两个近似平面之间转来转去, 形成了混沌吸引子(见图 3)。
- (4) 从远离平衡点 S_1, S_2 出发的轨线, 先被吸引到两者之一的邻域, 然后作混沌运动。

1.2 对初值敏感依赖的原因及混沌运动的本质

系统状态在相空间的两个近似平面之间转来转去, 为什么会导对初值的敏感依赖呢?

1.2.1 模式转换的内在原因

该系统存在两个模式及状态在两个模式间转换的根本原因在于式(1)关于 z 轴的对称性。对于式(1)使 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$, $x(t)$ 和 $y(t)$ 的变化率符号取反, 而 $z(t)$ 的变化率符号不变。这就使得相空间中关于 z 轴对称的两点的速度方向也关于 z 轴对称, 一边围绕 S_2 运动, 另一边围绕 S_1 运动。当系统状态绕 S_2 运动时, $x(t) < 0$ 和 $y(t) < 0$, 相空间中速度方向不发生突变, 运动模式也就不发生转换。当运动到 $y(t) > 0$ 而 $x(t) < 0$ 时, 由(1)第一式知 $\dot{x}(t) > 0$, 使 $x(t)$ 迅速增大至 $x(t) > 0$ 。此时, 速度方向突变, 运动模式发生转换。

1.2.2 轨道突变的原因

考察从 S_2 邻域内相邻的两初始点 P_{01} 和 P_{02} 出发的状态运动轨线。状态首先向近似吸引平面运动, 之后在近似平面内作螺旋发散运动。由于运动的扩散性, 必使得状态间的距离 $|x(P_{02}, t) - x(P_{01}, t)|$ 被放大。又由于运动到一定的时候, 必转入 S_1 邻域的模式运动, 必使得 $x(P_{02}, t)$ 和 $x(P_{01}, t)$ 不总是同时进行模式间的转换。当 $x(P_{02}, t)$ 达到了模式转换的条件而进入另一个运动模式, 而 $x(P_{01}, t)$ 仍按原模式进行螺旋发散运动时, 轨道会截然不同, “对初值的敏感依赖性”就发生了。

若 P_{01} 和 P_{02} 太近, 使得 $x(P_{02}, t)$ 和 $x(P_{01}, t)$ 同时转入另一个运动模式, 由于另一个模式的运动扩散性, 仍会对

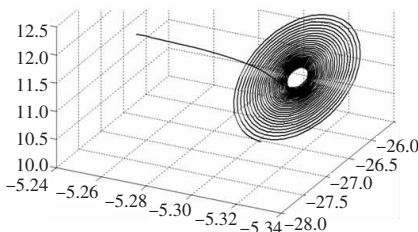


图1 Lorenz 系统的线性化方程的吸引平面及相轨迹

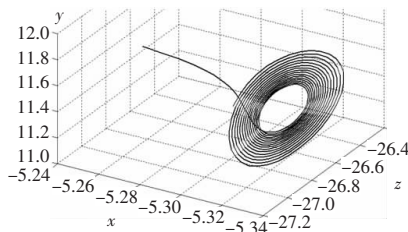


图2 Lorenz 混沌系统的状态向吸引面的运动

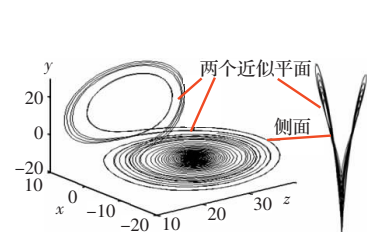


图3 Lorenz 混沌吸引子的两个近似吸引平面

$|x(P_{02}, t) - x(P_{01}, t)|$ 继续放大, 直至其不同时转换。

1.3 仿真算例

令 $P_{01}:(-5.7963, -1.3678, 28), P_{02}:(-5.7963, -1.3678, 27)$ 。分别以 P_{01} 和 P_{02} 为初始条件, 状态变量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的时间积分曲线见图 4 和图 5, 相空间轨线在 Oxy 平面的投影见图 6。1.6 s 后, $x(P_{01}, t)$ 转入 S_1 邻域的模式运动, 而 $x(P_{02}, t)$ 刚好没有达到转换的条件, 仍按原模式螺旋发散运动一周, 直到 2.3 s 后, 才转入另一模式。从图 4、图 5 和图 6 可清楚地看出, 在 1.6 s 时, 两个相邻轨道发生了突变。

结论 对初值敏感依赖的原因可简单叙述为: 任意接近的两个初始状态 \rightarrow 螺旋发散运动使状态间距离增大 \rightarrow 不同时进行模式转换 \rightarrow 相邻轨道发生突变 \rightarrow 对初值敏感。

2 Chen、Lü 系统的混沌机理

陈关荣教授、吕金虎博士在控制 Lorenz 系统时发现了形状不同于经典 Lorenz 系统吸引子的两个吸引子, 他们命名为 Chen 系统(吸引子)和 Lü 系统(吸引子)。在文献[6]等系列文献中, 对这两个系统进行了大量的分析。这里用该文的分析方法来阐述这两个系统产生混沌的机理。

Chen 系统方程为:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay \\ \dot{y} = dx + cy - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (4)$$

当取参数 $a=35, b=8/3, c=28, d=-7$ 时, 存在混沌吸引子(图略)。从相轨迹图中似乎看不出吸引平面(或曲面)的存在, 它的运动模式和运动机制又是怎样的呢?

该系统的第一、第三个方程与 Lorenz 系统的第一、第三个方程完全相同, 差别在于第二个方程中 x 和 y 的系数。其 3 个平衡态为:

$$O: (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$S_1: (x, y, z) = (\sqrt{b(d+c)}, \sqrt{b(d+c)}, d+c)$$

$$S_2: (x, y, z) = (-\sqrt{b(d+c)}, -\sqrt{b(d+c)}, d+c)$$

在 S_1, S_2 处进行泰勒展开, 得雅可比矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & \mp \sqrt{b(d+c)} \\ \sqrt{b(d+c)} & \sqrt{b(d+c)} & -b \end{bmatrix}$$

对于 S_1, S_2 , 可求得线性化方程的特征值为 $\lambda_1 = -17.82, \lambda_{2,3} = 4.0769 \pm 14.26i$ 。与 Lorenz 系统在非零平衡点处线性化方程的特征根 $\lambda_1 = -13.855, \lambda_{2,3} = 0.094 \pm 10.194i$ 相比, 形式相同, 但 $\text{Re}(\lambda_{2,3}) : 4.0769 \gg 0.094$, 也就是说非零平衡点在吸引平面向上对状态的排斥力很大, 这就使得螺旋发散的运动步伐很

大, 在一个运动周期内从一个运动模式转到另一个模式, 还没有等到 $z(t)$ 回落, $x(t), y(t)$ 便又转回原来的模式。这样, 相空间的状态轨迹就拉出了层次。当减小参数 c 的取值, 比如取 $c=18$ 时, $\lambda_1 = -20.818, \lambda_{2,3} = 0.5756 \pm 9.915i$, 混沌吸引子与 Lorenz 混沌吸引子是非常相似的。当 $c \leq 15.762$ 时, S_1 和 S_2 稳定, 系统轨线趋于某个平衡点。

由于当 $c=28$ 时, 该系统 $\text{Re}(\lambda_{2,3})$ 大, $x(t), y(t)$ 快速多变, 状态在非零平衡点邻域停留的时间很短, 使得方程中的非线性项的作用增强。若再用线性化方程的运动模式来代替非线性模式是不可以的。尽管如此, 系统运动的基本机制与 Lorenz 系统是相同的, 混沌的机理也是一样的。

若式(4)中取 $d=0$, 式(4)即为 Lü 系统。显然这没有改变系统运动机制的本质, 混沌产生的机理与 Lorenz 系统也是相同的。

3 Rössler 系统混沌产生机理

O.E.Rössler 在 1976 年构造了如下的方程组:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = -bz + xz + c \end{cases} \quad (5)$$

它只有一个方程包含交叉项, 而且还有一个常数项, 与 Lorenz 系统有很大的不同。当取参数 $a=0.2, b=5.7, c=0.2$ 时, 存在一个混沌吸引子。它有两个平衡点, 可求得在 $S_1: (0.007, -0.035, 0.035)$ 点线性化方程的特征值为 $\lambda_1 = -5.687, \lambda_{2,3} = 0.097 \pm 0.9952i$, 在 $S_2: (5.693, -28.465, 28.465)$ 点线性化方程的特征值为 $\lambda_1 = 0.193, \lambda_{2,3} = 0.000 \pm 5.428i$ 。可见, S_2 是一个源奇点, 不具有吸引性, 它和混沌吸引子的形成没有关系。从 S_2 的内侧邻域(靠近 S_1 的一侧)出发的轨线, 趋于混沌吸引子; 从 S_2 的外侧邻域(远离 S_1 的一侧)出发的轨线, 螺旋发散至无穷大。显然, Rössler 混沌吸引子不是全局吸引子, 它仅存在于 S_1 的有限邻域内。

在 S_1 的有限邻域 ($|x(t) - S_1| < |S_2 - S_1|$) 内, 先讨论式(5)的第三式。若 $z \approx 0$ (真实值为 $z=0.035$, 下同), 则 $\dot{z} \approx c, z(t) \approx ct$ 随时间缓慢增加。当 $z(t)$ 不能近似看作零时, 若将 $(x-b)$ 看作常数, 则:

$$z(t) = e^{(x-b)t} + ct \quad (6)$$

当 $(x-b) < 0$ 时, $z(t)$ 按指数快速收敛至 $z \approx 0$ 。若出现 $(x-b) > 0, z(t)$ 按指数快速增加。从式(5)的第一式知, $z(t)$ 的增加很快便有 $\dot{x}(t) < 0, x(t)$ 会快速减小导致 $(x-b) < 0$, 又使 $z(t)$ 收敛至 $z \approx 0$ 。这样, 就可以将状态 $z(t)$ 的变化分为快速升降和 $z \approx 0$ 这两个基本状态。

先考察 $z \approx 0$ 时, 式(5)的前两式约为二阶线性方程组:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + ay \end{cases}$$

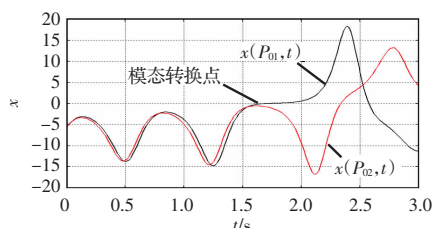


图4 Lorenz 系统从两个邻近点出发状态变量 x 的时间响应曲线

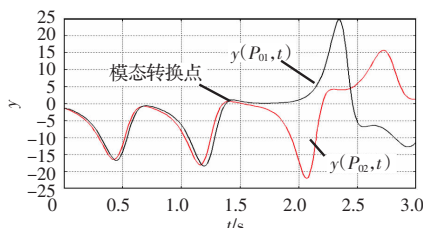


图5 Lorenz 系统从两个邻近点出发状态变量 y 的时间响应曲线

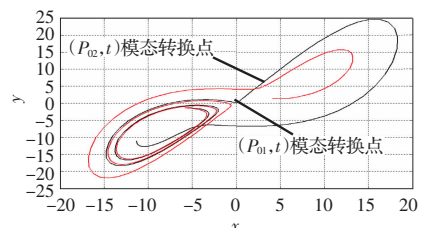


图6 Lorenz 系统两个邻近点出发的轨线在 Oxy 平面的投影

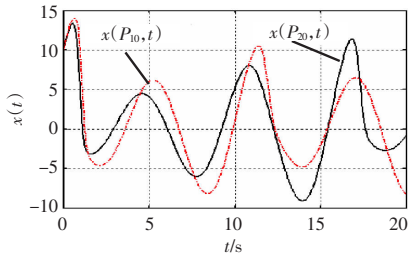


图7 Rössler 系统从两个邻近点出发状态变量 $x(t)$ 的时间响应曲线比较

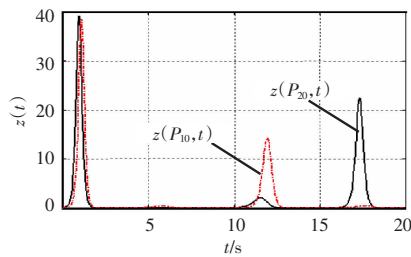


图8 Rössler 系统从两个邻近点出发状态变量 $z(t)$ 的时间响应曲线比较

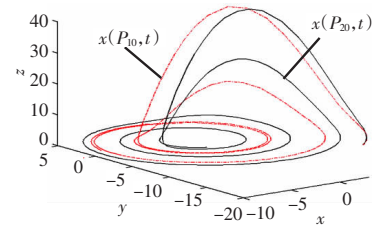


图9 Rössler 系统从两个邻近点出发的相轨迹比较

此时的运动模态为:

$$x(t) = C_{11} e^{\lambda_1 t} + C_{12} e^{\lambda_2 t}$$

$$y(t) = C_{21} e^{\lambda_1 t} + C_{22} e^{\lambda_2 t}$$

式中 $C_{ij} (i,j=1,2)$ 为常数, $\lambda_{1,2} = (a \pm \sqrt{a^2 - 4})/2$ 。系统的运动机制为在 Oxy 平面上绕 S_1 作螺旋发散运动。

再来考察 $z(t)$ 作升降运动时系统的运动机制。由式(6), 当 $(x-b) < 0$ 时, $e^{(x-b)t}$ 项的作用抑制了 ct 项所带来的 $z(t)$ 的缓慢增加, 使得 $z(t)$ 保持在约为零的状态。当 $x(t)$ 发散运动到 $t > t_1$, $\exists x(t) > b$ 时, $e^{(x-b)t}$ 和 ct 共同使 $z(t)$ 快速增大, 当 $-y-z < 0$ 时, 使

$$\dot{x}(t) = - \int_{t_1}^t [y(\tau) + z(\tau)] d\tau$$

结束发散运动而快速(几乎沿直线)向零状态作折回运动。一旦有 $x(t) < b$, 又使 $z(t)$ 收敛至 $z \approx 0$ 。

例如, 仍取 $a=0.2, b=5.7, c=0.2$ 时, 从 $P_{10} : (10, -10, 0)$ 和 $P_{20} : (10, -10, 0.1)$ 两个相邻点出发的状态变量 $x(t)$ 和 $z(t)$ 的时间积分曲线见图7和图8, 相轨迹见图9。初始状态的微小差别, 导致 $x(t)$ 和 $y(t)$ 折回的点之间的距离较大, 又经过螺旋发散运动, 将状态间的距离进一步增大, 使得系统状态在两个模态间的转换不同步, 两个轨道越分离越远, 从而产生了对初值的敏感依赖, 也即产生了混沌。

由以上分析, 可叙述 Rössler 系统混沌产生的机理为:

(1) 仅在平衡点 S_1 的有限邻域内存在单核混沌吸引子, 混沌的产生与平衡点 S_2 无关。

(2) 状态在 S_1 的有限邻域内的运动, 存在两种运动模态。一是近似 Oxy 平面将状态吸引到该近似平面上, 再在该平面内作螺旋发散运动; 二是 $z(t)$ 的快速升降和 $x(t), y(t)$ 结束螺旋发散而向原点折回的运动。

(3) 系统状态在这两个模态之间的不同时或不同幅度的转换, 形成了混沌吸引子。

Rössler 系统作混沌运动时, 对初值有敏感依赖性的原因, 和 Lorenz 系统一样: 任意接近的两个初始状态 \rightarrow 螺旋发散运动使状态间距离增大 \rightarrow 模态转换 \rightarrow 相邻轨道发生分离 \rightarrow 对初值敏感。

4 结论

仅分析了 Lorenz 系统、Chen、Lü 系统、Rössler 系统混沌系统混沌吸引子的形成机理。通过对 Newton-Leipnik 系统、Liu 系统等多个能产生混沌运动的连续非线性系统进行分析, 发现这些系统都有下列特征:

(1) 要产生混沌, 至少要存在两种非线性运动模态(或称收

敛与发散运动机制)。单一的运动模态不会产生混沌。非线性运动模态与在各平衡点处线性化方程的稳定性有关。

(2) 系统要存在稳定的混沌吸引子, 每个形成混沌吸引子的平衡点处线性化方程要有负的特征根, 以保证平衡点在某些方向上有吸引力, 使轨线收敛; 同时也要有正(实部)的特征根, 以保证平衡点在某些方向(如沿某个近似平面)上有排斥性, 使轨线螺旋发散(这正是混沌吸引子的 Lyapunov 指数有一个必为正的原因)。

(3) 混沌的产生是系统状态在至少两种非线性运动模态之间来回转换, 且非严格周期运动的结果。

(4) 相邻状态在同一运动模态中运动的逐渐分离, 和在不同运动模态之间的不同时(或不同幅度)转换, 导致了对初值的敏感依赖。这就是混沌的本质。

(5) 单个奇点的有限邻域内也可存在两种非线性运动模态, 从而形成单核混沌吸引子。

基于以上认识, 可以解释很多混沌现象^[6-7], 可以判断某些多螺旋运动是否是混沌运动, 可以设计理想的混沌运动轨道^[6,8-12](及实现混沌反控制), 可以为从根本上控制混沌提供更宽的思路。

参考文献:

- [1] Tong X, Tabarrok B. Melnikov's method for rigid bodies subject to small perturbation torques[J]. Arch Appl Mech, 1996, 66: 215-230.
- [2] Kuang J L, Tan S H, Leung A Y T. On Melnikov's method in study of chaotic motion of gyostat[J]. Int J Contr, 2002, 75: 328-351.
- [3] Gilmore R. Topological analysis of chaotic dynamical systems[J]. Rev Modern Phys, 1998, 70(4): 1455-529.
- [4] 丘水生. 混沌吸引子周期轨道理论研究[J]. 电路与系统学报, 2003, 8(6): 133-137.
- [5] 陈关荣, 吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析控制与同步[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [6] 孔令云, 周凤岐. 用三轴气浮台进行混沌控制与反控制研究[J]. 宇航学报, 2007, 26(1): 99-102.
- [7] 周凤岐, 孔令云. 欧拉动力学方程中的新混沌吸引子及其分析[J]. 宇航学报, 2007, 26(6): 1515-1519.
- [8] 孔令云, 周凤岐. 一类非线性系统的混沌控制[J]. 航空学报, 2007, 28(6): 1443-1448.
- [9] 周凤岐, 孔令云. 一类混沌系统的自适应滑模变结构控制[J]. 空军工程大学学报, 2007, 8(3): 19-22.
- [10] 刘洋, 彭良玉, 董胡. 统一混沌系统同步及其保密通信[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(3): 137-139.
- [11] 韩凤英. 一种基于统一混沌系统的图像加密新算法[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(4): 129-130.
- [12] 瞿少成, 王永骥. 基于主动滑模控制的一类不确定混沌系统的同步[J]. 计算机工程与应用, 2006, 42(1): 184-186.