◎研究、探讨◎

泛逻辑学中 UB 代数系统的($\in$, $\in \vee q$)–fuzzy 滤子

刘春辉
LIU Chun-hui

赤峰学院 初等教育学院,内蒙古 赤峰 024001
Department of Elementary Education, Chifeng University, Chifeng, Inner Mongolia 024001, China
E-mail: chunhuiliu1982@163.com

LIU Chun-hui.($\in$, $\in \vee q$)-fuzzy filters of UB algebras in universal logic. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(34): 29-31.

Abstract: The formal deductive system β of universal logic in the ideal condition has been given and the reliability of this system has been proved by professor He. And UB algebras for universal logic in ideal condition are introduced and some properties of them are discussed by him. Based on the above mentioned results, the concepts of ($\in$, $\in \vee q$)-fuzzy filters and ($\in$, $\in \vee q$)-fuzzy implicative filters in UB algebras is introduced, some equivalent characterizations of them are obtained. The extension theorem of ($\in$, $\in \vee q$)-fuzzy implicative filters is proved.

Key words: universal logic; UB algebras systems; ($\in$, $\in \vee q$)-fuzzy filters; ($\in$, $\in \vee q$)-fuzzy implicative filters

摘 要: 何华灿教授给出了理想状态下的泛逻辑学的形式演绎系统 β,并证明了该系统的可靠性。并且提出了理想状态下的泛逻辑学对应的代数系统–UB 代数,并讨论了它们的性质。在以上这些结果的基础上,引入 UB 代数的($\in$, $\in \vee q$)–fuzzy 滤子和($\in$, $\in \vee q$)–fuzzy 关联滤子的概念,获得了它们的若干等价刻画,证明了($\in$, $\in \vee q$)–fuzzy 关联滤子的扩张定理。

关键词: 泛逻辑学;UB 代数系统;($\in$, $\in \vee q$)–fuzzy 滤子;($\in$, $\in \vee q$)–fuzzy 关联滤子

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2009.34.009 **文章编号:** 1002-8331(2009)34-0029-03 **文献标识码:** A **中图分类号:** O141.1;O153.1

1 引言与预备

自从 Zadeh 于 20 世纪 60 年代提出 fuzzy 集[1]的概念以来,关于模糊系统和模糊推理的研究已经得到了迅速的发展。目前,非经典数理逻辑已经被誉为是计算机科学与人工智能处理不确定信息和模糊信息的合适工具,并获得了很多研究成果[2-5]。为了探索逻辑的一般规律,何华灿教授提出了泛逻辑学理论[6],通过近几年的不断深入研究,该理论已经发展成为人工智能领域最具活力的研究方向之一。文献[7]以理想状态下的泛逻辑学的命题演算形式系统 β 为背景,提出了一种泛逻辑学代数系统–UB 代数,文献[8]和文献[9]分别在 UB 代数中引入了滤子和 fuzzy 滤子的概念,并对它们的性质进行了细致地研究。该文将 fuzzy 点和 fuzzy 集间的属于关系($\in$)和拟重合关系(q)应用于 UB 代数,引入了($\in$, $\in \vee q$)–fuzzy 滤子和($\in$, $\in \vee q$)–fuzzy 关联滤子概念,并进行详细研究,获得了一些有意义的结果。这些结果不仅丰富了非经典逻辑代数,尤其是 UB 代数滤子理论的内容,也为运用 fuzzy 集理论处理非经典逻辑问题搭建了一个桥梁。

定义 1[7] 设 M 是($\rightarrow$, $'$)型代数,其中 $'$ 为一元运算, $\rightarrow$ 为二元运算,如果 M 上有偏序 $\leqslant$ 使 (M, $\leqslant$) 是有界偏序集, $'$ 是关于 $\leqslant$ 的逆序对合对应,且满足以下条件,任意 $a,b,c\in M$

u-1 $a'\rightarrow b'=b\rightarrow a$

u-2 $1\rightarrow a=a$

u-3 $a\rightarrow b\leqslant(b\rightarrow c)\rightarrow(a\rightarrow c)$

u-4 $(a\rightarrow b)\rightarrow b\leqslant(b\rightarrow a)\rightarrow a$

其中 1 是 M 中最大元, $a\leqslant b$ 当且仅当 $a\rightarrow b=1$,则称 M 是 UB 代数。

为了叙述简洁起见,以下如无特别说明, M 均表示 UB 代数。

引理 1[7] 设 0 是 M 中最小元,1 是 M 中最大元,任意 $a,b,c\in M$,下列结论成立:

u-(1) $a'=a\rightarrow 0$, $a=a'\rightarrow 0$ u-(2) $(a\rightarrow 0)\rightarrow 0=a$

u-(3) $a\rightarrow a=1$ u-(4) $a\leqslant(a\rightarrow b)\rightarrow b$

u-(5) 若 $a\leqslant b$,则 $b\rightarrow c\leqslant a\rightarrow c$

u-(6) $a\rightarrow(b\rightarrow c)=b\rightarrow(a\rightarrow c)$

u-(7) $b\rightarrow c\leqslant(a\rightarrow b)\rightarrow(a\rightarrow c)$ u-(8) $a\leqslant b\rightarrow a$

u-(9) $((a\rightarrow b)\rightarrow b)\rightarrow b=a\rightarrow b$

定义 2[8] 设 F 是 M 的一个非空子集。

(1)如果①$1\in F$ 且② $\forall x,y\in M$, x, $x\rightarrow y\in F\Rightarrow y\in F$,则称 F 是 M 的滤子;

基金项目: 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10371106)。
作者简介: 刘春辉(1982–),男,讲师,主要研究领域为 Domain 理论、非经典数理逻辑和拓扑学。
收稿日期: 2009-07-09 **修回日期:** 2009-10-10

(2)如果①$1\in F$ 且② $\forall x,y,z\in M$, $x\to(y\to z)$, $x\to y\in F\Rightarrow x\to z\in F$,则称 F 是 M 的关联滤子。

2 UB 代数的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy 滤子

M 上的一个 fuzzy 集是指映射 $\mu:M\to[0,1]$。如果 M 上的 fuzzy 集 μ 满足

$$\mu(y)=\begin{cases}\alpha(\neq 0), & y=x\\ 0, & y\neq x\end{cases}$$

则称 μ 为以 x 为承载 α 为值的 fuzzy 点,记为 $U(x;\alpha)$。

设 $U(x;\alpha)$是以为 x 承载 α 为值的 fuzzy 点,μ 为 M 上 fuzzy 集。

(1)如果 $\forall x\in M$,$\mu(x)\geqslant\alpha$,则称 $U(x;\alpha)$属于 μ,记为 $U(x;\alpha)\in\mu$;

(2)如果 $\forall x\in M$,$\mu(x)+\alpha>1$,则称 $U(x;\alpha)$拟重合于 μ,记为 $U(x;\alpha)q\mu$;

(3)符号 $U(x;\alpha)\in\vee q\mu$ 表示 $U(x;\alpha)\in\mu$ 或 $U(x;\alpha)q\mu$。

定义 3 设 μ 是 M 上的 fuzzy 集,如果 $\forall x,y\in M$ 和 $\alpha,\beta\in(0,1]$,满足

(FF1)$U(x;\alpha)\in\mu$ 蕴涵 $U(1;\alpha)\in\vee q\mu$;

(FF2)$U(x;\alpha)\in\mu$ 且 $U(x\to y;\beta)\in\mu$ 蕴涵 $U(y;\min\{\alpha,\beta\})\in\vee q\mu$。

则称 μ 是 M 的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy 滤子。

定理 1 设 μ 是 M 上的 fuzzy 集,则 $\forall x\in M$,条件(FF1)成立当且仅当

(FF3)$\mu(1)\geqslant\min\{\mu(x),0.5\}$。

证明 $\Rightarrow$:设(FF1)成立。假设(FF3)不成立,则 $\exists x\in M$ 使 $\mu(1)<\min\{\mu(x),0.5\}$。如果 $\mu(x)<0.5$,则 $\mu(1)<\mu(x)$。取 $\alpha\in(0,1]$使 $\mu(1)<\alpha<\mu(x)$便得 $U(x;\alpha)\in\mu$。但由 $\mu(1)<\alpha$ 知 $U(1;\alpha)\notin\mu$,同时结合 $\mu(x)<0.5$ 又有 $\mu(1)+\alpha<\alpha+\alpha<0.5+0.5=1$,故 $U(1;\alpha)q\mu$ 也不成立,进而 $U(1;\alpha)\in\vee q\mu$ 不成立,这与(FF1)矛盾! 如果 $\mu(x)\geqslant 0.5$,则 $U(x;0.5)\in\mu$ 且 $\mu(1)<0.5$,于是 $U(1;0.5)\notin\mu$ 且 $\mu(1)+0.5<1$,故 $U(1;0.5)\in\vee q\mu$ 不成立,这亦与(FF1)矛盾! 因此(FF3)成立。

$\Leftarrow$:设(FF3)成立且 $\alpha\in(0,1]$有 $U(x;\alpha)\in\mu$,则 $\mu(x)\geqslant\alpha$,从而 $\mu(1)\geqslant\min\{\alpha,0.5\}$。如果 $\alpha\leqslant 0.5$,则 $\mu(1)\geqslant\alpha$,因此 $U(1;\alpha)\in\mu$。如果 $\alpha>0.5$,则 $\mu(1)\geqslant 0.5$,从而 $\mu(1)+\alpha>1$,因此 $U(1;\alpha)q\mu$。所以总有 $U(1;\alpha)\in\vee q\mu$,即(FF1)成立。

定理 2 设 μ 是 M 上的 fuzzy 集,则 $\forall x,y\in M$,条件(FF2)成立当且仅当

(FF4)$\mu(y)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(x\to y),0.5\}$。

证明 $\Rightarrow$:假设(FF4)不成立,则 $\exists x,y\in M$ 使 $\mu(y)<\min\{\mu(x),\mu(x\to y),0.5\}$。一方面,如果 $\min\{\mu(x),\mu(x\to y)\}<0.5$,则可得 $\mu(y)<\min\{\mu(x),\mu(x\to y)\}$。取 $\alpha,\beta\in(0,1]$使得 $\mu(y)<\alpha<\beta<\min\{\mu(x),\mu(x\to y)\}$,则有 $U(x;\alpha)\in\mu$ 且 $U(x\to y;\beta)\in\mu$,但由 $\mu(y)<\alpha=\min\{\alpha,\beta\}<0.5$ 和 $\mu(y)+\min\{\alpha,\beta\}=\mu(y)+\alpha<1$ 知 $U(y;\min\{\alpha,\beta\})\in\vee q\mu$ 不成立,这与(FF2)矛盾! 另一方面,如果 $\min\{\mu(x),\mu(x\to y)\}\geqslant 0.5$,则 $U(x;0.5)\in\mu$ 且 $U(x\to y;0.5)\in\mu$,但注意到此时有 $\mu(y)<0.5$ 且 $\mu(y)+0.5<1$,故 $U(y;0.5)\in\vee q\mu$ 不成立,这亦与(FF2)矛盾!上述两方面的矛盾说明(FF4)成立。

$\Leftarrow$:设(FF4)成立且 $\forall\alpha,\beta\in(0,1]$有 $U(x;\alpha)\in\mu$ 且 $U(x\to y;\beta)\in\mu$,则 $\mu(x)\geqslant\alpha$ 且 $\mu(x\to y)\geqslant\beta$。故由(FF4)得 $\mu(y)\geqslant\min\{\alpha,\beta,0.5\}$。如果 $\min\{\alpha,\beta\}>0.5$,则 $\mu(y)\geqslant 0.5$,从而 $\mu(y)+\min\{\alpha,\beta\}>1$,即 $U(y;\min\{\alpha,\beta\})q\mu$,进而 $U(y;\min\{\alpha,\beta\})\in\vee q\mu$。如果 $\min\{\alpha,\beta\}\leqslant 0.5$,则 $\mu(y)\geqslant\min\{\alpha,\beta\}$,即 $U(y;\min\{\alpha,\beta\})\in\mu$。进而有 $U(y;\min\{\alpha,\beta\})\in\vee q\mu$。所以总有 $U(y;\min\{\alpha,\beta\})\in\vee q\mu$ 成立,即(FF2)成立。

注 1 由定理 1 和定理 2 可知,M 上的 fuzzy 集 μ 是 M 的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy 滤子当且仅当(FF3)和(FF4)成立。

命题 1 设 μ 是 M 的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy 滤子,$x,y\in M$。则 $x\leqslant y\Rightarrow\mu(y)\geqslant\min\{\mu(x),0.5\}$。

证明 设 $x,y\in M$,如果 $x\leqslant y$,则 $x\to y=1$。因此由 μ 是 M 的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy 滤子和注 1 得 $\mu(y)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(x\to y),0.5\}=\min\{\mu(x),\mu(1),0.5\}=\min\{\mu(x),0.5\}$。

定理 3 设 μ 是 M 上的 fuzzy 集,则 μ 是 M 的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy 滤子当且仅当 $x,y,z\in M$

(FF5)$x\leqslant y\to z$ 蕴涵 $\mu(z)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(y),0.5\}$。

证明 设 μ 是 M 的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy 滤子且 $x\leqslant y\to z$,$x,y,z\in M$,则由命题 1 可知 $\mu(y\to z)\geqslant\min\{\mu(x),0.5\}$。因此利用(FF4)便得

$$\mu(z)\geqslant\min\{\mu(y),\mu(y\to z),0.5\}\geqslant\min\{\mu(x),\mu(y),0.5\}$$

即(FF5)成立。反之,设(FF5)成立,因为 $\forall x\in M$ 有 $x\leqslant 1$,因此 $x\to 1=1$,进而 $x\leqslant x\to 1$,故由(FF5)得 $\mu(1)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(x),0.5\}=\min\{\mu(x),0.5\}$,(FF3)成立。又因为由 u-(3)知 $x\to y\leqslant x\to y$,故由(FF5)又得 $\mu(y)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(x\to y),0.5\}$,即(FF4)成立。所以由注 1 便得 μ 是 M 的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy 滤子。

定理 4 设 μ 是 M 上的 fuzzy 集,则 μ 是 M 的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy 滤子当且仅当 $x,y,z\in M$,μ 满足(FF3)和如下的条件:

(FF6)$\mu(x\to z)\geqslant\min\{\mu(x\to y),\mu(y\to z),0.5\}$

证明 设 μ 是 M 的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy 滤子,则(FF3)成立。又 $x\to y\leqslant(y\to z)\to(x\to z)$,故由定理 3 知 $\mu(x\to z)\geqslant\min\{\mu(x\to y),\mu(y\to z),0.5\}$,即(FF6)成立。

反过来,设 μ 满足(FF3)和(FF6)。则由(FF6)知,$\forall x,y\in M$ 有

$$\mu(1\to y)\geqslant\min\{\mu(1\to x),\mu(x\to y),0.5\}$$

故由 u-2 得 $\mu(y)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(x\to y),0.5\}$,即(FF4)成立。故 μ 是$(\in,\in\vee q)$-fuzzy 滤子。

定理 5 设 μ 是 M 上 fuzzy 集,则 μ 是 M 的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy 滤子当且仅当 $\forall\alpha\in(0,0.5]$,若 $\mu_\alpha=\{x\in M|\mu(x)\geqslant\alpha\}\neq\varnothing$,则 μ_α 是 M 的滤子。

证明 $\Rightarrow$:设 μ 是 M 的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy 滤子且 $\forall\alpha\in(0,0.5]$,$\mu_\alpha\neq\varnothing$。则 $\exists x_0\in M$ 使得 $x_0\in\mu_\alpha$,即 $\mu(x_0)\geqslant\alpha$。故由(FF3)可知 $\mu(1)\geqslant\min\{\mu(x_0),0.5\}\geqslant\min\{\alpha,0.5\}=\alpha$,因此 $1\in\mu_\alpha$。现设 $x,x\to y\in\mu_\alpha$,则 $\mu(x)\geqslant\alpha$ 且 $\mu(x\to y)\geqslant\alpha$,从而有(FF4)得

$$\mu(y)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(x\to y),0.5\}\geqslant\min\{\alpha,\alpha,0.5\}=\alpha$$

因此 $y\in\mu_\alpha$。所以由定义 2(1)便得 μ_α 是 M 的滤子。

$\Leftarrow$:设 $\forall\alpha\in(0,0.5]$,若 $\mu_\alpha\neq\varnothing$,就有 μ_α 是 M 的滤子。如果存在 $x_0\in\mu_\alpha$ 使得 $\mu(1)<\min\{\mu(x_0),0.5\}$,则 $\exists\alpha_0\in(0,0.5)$使 $\mu(1)<\alpha_0<\min\{\mu(x_0),0.5\}$,从而 $x_0\in\mu_{\alpha_0}$,故由假设知 μ_{α_0} 是 M 的滤子,但由 $\mu(1)<\alpha_0$ 知 $1\notin\mu_{\alpha_0}$,矛盾! 故总有 $\mu(1)\geqslant\min\{\mu(x),0.5\}$即(FF3)成立。若 $\exists x_0,y_0\in M$ 使得 $\mu(y_0)<\min\{\mu(x_0),\mu(x_0\to y_0),0.5\}$,令 $\alpha_1=\frac{1}{2}(\mu(y_0)+\min\{\mu(x_0),\mu(x_0\to y_0),0.5\})$,则 $\alpha_1\in(0,0.5)$且 $\mu(y_0)<\alpha_1<\min\{\mu(x_0),\mu(x_0\to y_0),0.5\}$,从而则 $x_0,x_0\to y_0\in\mu_{\alpha_1}\neq\varnothing$ 故由假设又知 μ_{α_1} 是 M 的滤子,所以由定

义2(1)知$y_0\in\mu_{\alpha_1}$，这与$\mu(y_0)<\alpha_1$矛盾！故总有$\mu(y)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(x\to y),0.5\}$，即(FF4)也成立。因此由注1便知$\mu$是$M$的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy滤子。

定理6 设μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy滤子且$\forall a\in M$。则$\mu[[a]]=\{x\in M|\mu(x)\geqslant\min\{\mu(\alpha),0.5\}\}$是$M$的滤子。

证明 因μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy滤子且$a\in M$，故由(FF3)知$\mu(1)\geqslant\min\{\mu(a),0.5\}$，因此$1\in\mu[[a]]$。设$x,x\to y\in\mu[[a]]$，则$\mu(x)\geqslant\min\{\mu(a),0.5\}$且$\mu(x\to y)\geqslant\min\{\mu(a),0.5\}$，所以结合(FF4)可得

$$\begin{aligned}\mu(y)&\geqslant\min\{\mu(x),\mu(x\to y),0.5\}\geqslant\\&\min\{\min\{\mu(a),0.5\},\min\{\mu(a),0.5\},0.5\}=\\&\min\{\mu(a),0.5\}\end{aligned}$$

故$y\in\mu[[a]]$。因此由定义2(1)知$\mu[[a]]$是M的滤子。

3　UB代数的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy关联滤子

定义4 设μ是M上的fuzzy集，如果$\forall x,y,z\in M$和$\alpha,\beta\in(0,1]$满足(FF1)和条件

(FF8)$U(x\to(y\to z);\alpha)\in\mu$且$U(x\to y);\beta)\in\mu$蕴涵$U(x\to z;\min\{\alpha,\beta\})\in\vee q\mu$

则称μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy关联滤子。

定理7 设μ是M上的fuzzy集，则$\forall x,y,z\in M$，条件(FF8)成立当且仅当

(FF9)$\mu(x\to z)\geqslant\min\{\mu(x\to(y\to z)),\mu(x\to y),0.5\}$

证明 类似于定理2的证明过程，这里从略。

注2 由定理1和定理7可知，M上的fuzzy集μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy关联滤子当且仅当(FF3)和(FF9)成立。

定理8 M上的每个$(\in,\in\vee q)$-fuzzy关联滤子都是$(\in,\in\vee q)$-fuzzy滤子。

证明 设μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy关联滤子，则由注2知(FF3)和(FF9)成立。在(FF9)中令$x=1$并利用u-2便得$\forall y,z\in M$

$$\begin{aligned}\mu(z)&=\mu(1\to z)\geqslant\min\{\mu(1\to(y\to z)),\mu(1\to y),0.5\}=\\&\min\{\mu(y),\mu(y\to z),0.5\}\end{aligned}$$

即(FF4)成立。因此据注1知μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy滤子。

注3 定理8的逆命题一般不真。例如，设$M=\{0,a,b,c,1\}$且$0<a<b<c<1$。运算$'$和$\to$分别由表1和表2给出。

表1　运算$'$的定义

x	x'
0	1
a	c
b	b
c	a
1	0

表2　运算$\to$的定义

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	c	1	1	1	1
b	b	c	1	1	1
c	a	b	c	1	1
1	0	a	b	c	1

则容易验证M是一个UB代数。在M上定义fuzzy集μ使$\mu(0)=\mu(a)=\mu(b)=\mu(c)=0.4$，$\mu(1)=0.7$，显然$\mu$是$M$的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy滤子。但$\mu$不是$M$的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy关联滤子，因为$\mu(b\to a)=\mu(c)=0.4<0.5=\min\{\mu(b\to(b\to a)),\mu(b\to b),0.5\}=\min\{0.7,0.5\}$。

定理9 设μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy滤子且$\forall x,y,z\in M$。则下列陈述等价：

(1)μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy关联滤子；

(2)$\mu(x\to y)\geqslant\min\{\mu(x\to(x\to y)),0.5\}$；

(3)$\mu((x\to y)\to(x\to z))\geqslant\min\{\mu((x\to(y\to z)),0.5\}$。

证明 (1)⇒(2)：设μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy关联滤子，则由注2和u-(3)可得

$$\begin{aligned}\mu(x\to y)&\geqslant\min\{\mu(x\to(x\to y)),\mu(x\to x),0.5\}=\\&\min\{\mu(x\to(x\to y)),\mu(1),0.5\}=\\&\min\{\mu(x\to(x\to y)),0.5\}\end{aligned}$$

(2)⇒(3)：设(2)成立。因由u-(6)，u-(7)知$x\to(y\to z)\leqslant x\to((x\to y)\to(x\to z))$，故由(2)和u-(6)以及命题1可得

$$\begin{aligned}\mu((x\to y)\to(x\to z))&=\mu(x\to((x\to y)\to z))\geqslant\\&\min\{\mu(x\to(x\to((x\to y)\to z))),0.5\}=\\&\min\{\mu(x\to((x\to y)\to(x\to z)),0.5\}\geqslant\\&\min\{\min\{\mu(x\to(y\to z)),0.5\},0.5\}=\\&\min\{\mu(x\to(y\to z)),0.5\}\end{aligned}$$

(3)⇒(1)：设(3)成立。因为由u-3知$(x\to y)\to(x\to z)\leqslant(x\to y)\to(x\to z)$，所以由定理3可得$\mu(x\to z)\geqslant\min\{\mu((x\to y)\to(x\to z)),\mu(x\to y),0.5\}$，因此结合(3)便得$\mu(x\to z)\geqslant\min\{\mu(x\to(y\to z)),\mu(x\to y),0.5\}$，即(FF9)成立。从而定理得证。

定理10 设μ是M的一个fuzzy集。则μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy关联滤子当且仅当$\forall x,y,z\in M$，μ满足(FF3)和如下的条件：

(FF10)$\mu((y\to z)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(x)\to(y\to(y\to z))),0.5\}$

证明 ⇒：设μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy关联滤子，则由定理8知μ是$(\in,\in\vee q)$-fuzzy滤子。因此在(FF9)中令$x=y$并利用(FF3)和(FF4)可得

$$\begin{aligned}\mu(y\to z)&\geqslant\min\{\mu(y\to(y\to z)),\mu(y\to y),0.5\}=\\&\min\{\mu(y\to(y\to z)),\mu(1),0.5\}=\\&\min\{\mu(y\to(y\to z)),0.5\}\geqslant\\&\min\{\mu(x),\mu(x\to(y\to(y\to z))),0.5\}\end{aligned}$$

⇐：设M的fuzzy集μ满足(FF3)和(FF10)。一方面，由u-2和(FF10)可得：

$$\begin{aligned}\mu(y)&=\mu(1\to y)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(x\to(1\to(1\to y))),0.5\}=\\&\min\{\mu(x),\mu(x\to y),0.5\}\end{aligned}$$

即(FF4)成立，从而μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy滤子。另一方面，再次利用(FF10)又得

$$\begin{aligned}\mu(x\to y)&\geqslant\min\{\mu(1),\mu(1\to(x\to(x\to y))),0.5\}=\\&\min\{\mu(x\to(x\to y)),0.5\}\end{aligned}$$

因此由定理9(2)便得μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy关联滤子。

定理11 设μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy关联滤子且$\forall a\in M$。则$\mu[[a]]=\{x\in M|\mu(x)\geqslant\min\{\mu(a),0.5\}\}$是$M$的关联滤子。

证明 因μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy关联滤子，所以μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy滤子，从而由定理6知$\mu[[a]]$是M的滤子，进而$1\in\mu[[a]]$。设$x\to(y\to z),x\to y\in\mu[[a]]$，则

$\mu(x\to(y\to z))\geqslant\min\{\mu(a),0.5\}$且$\mu(x\to y)\geqslant\min\{\mu(a),0.5\}$

所以结合(FF9)可得

$$\begin{aligned}\mu(x\to z)&\geqslant\min\{\mu(x\to(y\to z)),\mu(x\to y),0.5\}\geqslant\\&\min\{\min\{\mu(a),0.5\},\min\{\mu(a),0.5\},0.5\}=\\&\min\{\mu(a),0.5\}\end{aligned}$$

故$x\to z\in\mu[[a]]$。因此有定义2(2)知$\mu[[a]]$是M的关联滤子。

定理12 设μ是M上的fuzzy集，则μ是M的$(\in,\in\vee q)$-fuzzy关联滤子当且仅当$\forall\alpha\in(0,0.5]$，若$\mu_\alpha=\{x\in M|\mu(x)\geqslant\alpha\}\neq\emptyset$，则$\mu_\alpha$是$M$的关联滤子。

证明 类似于定理5的证明过程，这里从略。

(下转43页)