三阶非线性脉冲时滞微分方程的振动性与渐进性

朱亚锟，王幼斌

（温州大学数学与信息科学学院，浙江温州　325035）

摘　要：讨论了一类三阶非线性脉冲时滞微分方程解的振动性与渐进性，解决了非振动解与其导数的符号关系，所给出的充分条件改进了一些已知结果，并且比相关文献中的条件要简洁且易验证．

关键词：脉冲时滞微分方程；振动性；渐进性

中图分类号：O175　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1674-3563(2009)05-0001-07

DOI：10.3875/j.issn.1674-3563.2009.05.001　　本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

脉冲微分方程在诸多领域都有广泛应用，对脉冲方程的研究已引起国内外学者的关注．目前，关于一阶和二阶脉冲微分方程的研究较为成熟[1-7]．例如，文献[2]研究了一阶非线性脉冲时滞微分方程的振动性及非振动解的渐进性，并给出了几个充分性判据，其中的引理 2 给出了分段连续函数的渐近性判据．文献[7]研究了一类二阶非线性脉冲微分方程的振动性，得到了若干关于所有解振动的充分性判据，并举例突出了脉冲在振动中所起的作用，其中的引理 1 解决了非振动解与其导数的符号关系．但是关于三阶及以上脉冲微分方程的振动性与渐进性的研究较少[8-10]．受文献[7]引理 1 的启发，本文使用文献[1]中的脉冲微分不等式，给出了新的引理，解决了三阶非线性脉冲时滞微分方程非振动解与其导数的符号关系，改进了文献[9]中相应的结论，进而利用文献[2]中的引理 2 得到了若干振动性和渐近性的充分性判据，并举例说明了判据的有效性，体现了对文献[9]的改进．

1 主要结果

考虑如下脉冲时滞微分方程：

$$\begin{cases} x'''(t)+f\left(t,x(t-\tau)\right)=0,\ t\ge t_0,\ t\ne t_k \\ x\left(t_k^+\right)=g_k\left(x(t_k)\right),\ x'\left(t_k^+\right)=h_k\left(x'(t_k)\right),\ x''\left(t_k^+\right)=l_k\left(x''(t_k)\right),\ k=1,2,\cdots, \\ x(t)=\phi(t),\ x\left(t_0^+\right)=x_0,\ x'\left(t_0^+\right)=x_0',\ x''\left(t_0^+\right)=x_0'',\ t\in[t_0-\tau,t_0] \end{cases} \tag{1}$$

其中，$0<t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$，$\lim\limits_{k\to\infty}t_k=+\infty$，且 $0<\tau<t_k-t_{k-1}$，$k=1,2,\cdots$．

在本文中总假设下面的条件是成立的：

收稿日期：2008-12-11

作者简介：朱亚锟（1984-），男，河南信阳人，硕士研究生，研究方向：微分方程的振动性与稳定性

I）$f\in C\left(R_+\times R,R\right)$，$x\cdot f\left(t,x\right)>0$，$x\neq 0$，$\dfrac{f\left(t,x\right)}{\varphi\left(x\right)}\geq p\left(t\right)$，$x\neq 0$，$\varphi'\left(x\right)\geq 0$，$x\cdot\varphi\left(x\right)>0$，$x\neq 0$，$p\left(t\right)\in C\left(R_+,\left[0,+\infty\right)\right)$；

II）$g_k\left(x\right),h_k\left(x\right),l_k\left(x\right)\in C\left(R,R\right)$且存在正常数$\underline{a}_k,\overline{a}_k,\underline{b}_k,\overline{b}_k,\underline{c}_k,\overline{c}_k$，使得$\underline{a}_k\leq\dfrac{g_k\left(x\right)}{x}\leq\overline{a}_k$，$\underline{b}_k\leq\dfrac{h_k\left(x\right)}{x}\leq\overline{b}_k$，$\underline{c}_k\leq\dfrac{l_k\left(x\right)}{x}\leq\overline{c}_k$.

由于（1）式可以转化为一阶脉冲时滞微分方程组，所以关于（1）式的解的存在性、唯一性及解的整体存在性可以参考文[1]. 以下我们总假设（1）式的解是整体存在的.

定义 1　函数$x:\left[t_0-\tau,t_0+a\right]\to R$，$t_0\geq 0,a>0$称为（1）式的解，如果

1）$x\left(t_0^+\right)=x_0$，$x'\left(t_0^+\right)=x_0'$，$x''\left(t_0^+\right)=x_0''$，$x\left(t\right)=\phi\left(t\right)$，$t\in\left[t_0-\tau,t_0\right]$；

2）当$t\in\left[t_0,t_0+a\right],t\neq t_k,t\neq t_k+\tau,k=1,2,\cdots$时，$x\left(t\right)$满足

$$x'''\left(t\right)+f\left(t,x\left(t-\tau\right)\right)=0；$$

3）当$t\in\left[t_0,t_0+a\right]$且$t=t_k+\tau$时，$x\left(t\right),x'\left(t\right),x''\left(t\right)$连续，当$t=t_k$时，$x\left(t\right),x'\left(t\right),x''\left(t\right)$左连续并且存在右极限，且

$$x''\left(t_k\right)=x''\left(t_k^-\right)=\lim_{h\to 0^-}\frac{x'\left(t_k+h\right)-x'\left(t_k\right)}{h},$$

$$x'\left(t_k\right)=x'\left(t_k^-\right)=\lim_{h\to 0^-}\frac{x\left(t_k+h\right)-x\left(t_k\right)}{h},$$

$$x\left(t_k^+\right)=g_k\left(x\left(t_k\right)\right),\quad x'\left(t_k^+\right)=h_k\left(x'\left(t_k\right)\right),\quad x''\left(t_k^+\right)=l_k\left(x''\left(t_k\right)\right).$$

定义 2　方程（1）的解称为非振动的，如果这个解最终为正或最终为负；否则，称该解为振动的. 如果方程（1）的所有解均为振动的，则称方程（1）为振动的.

引理 1[1]　假设

1）序列$\left\{t_k\right\}$满足$0\leq t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$，且$\lim\limits_{k\to+\infty}t_k=+\infty$；

2）$m\in PC^1\left(R_+,R\right)$在$t_k,k=1,2,\cdots$左连续；

3）对于$k=1,2,\cdots$，$t\geq t_0$，有$m'\left(t\right)\leq p\left(t\right)m\left(t\right)+q\left(t\right)$，$t\neq t_k$，$m\left(t_k^+\right)\leq d_k m\left(t_k\right)+b_k$，其中，$p,q\in C\left[R_+,R\right]$，$d_k\geq 0$，$b_k$是实常数，则

$$\begin{aligned}m\left(t\right)\leq{}& m\left(t_0\right)\prod_{t_0<t_k<t}d_k\exp\left(\int_{t_0}^t p\left(s\right)ds\right)+\sum_{t_0<t_k<t}\left(\prod_{t_k<t_j<t}d_j\exp\left(\int_{t_k}^t p\left(s\right)ds\right)\right)b_k+\\&\int_{t_0}^t\prod_{s<t_k<t}d_k\exp\left(\int_s^t p\left(\sigma\right)d\sigma\right)q\left(s\right)ds,\ t\geq t_0\end{aligned}.$$

引理 2　设$x\left(t\right)$是方程（1）的解，若存在$T>0$，当$t>T$时，$x\left(t\right)>0$，$x\left(t-\tau\right)>0$，如果下列条件成立：

$$\int_{t_0}^{+\infty}\prod_{t_0<t_k<s}\frac{\underline{b}_k}{\overline{a}_k}ds=+\infty,\tag{2}$$

$$\int_{t_j}^{+\infty}\prod_{t_j<t_k<s}\frac{\underline{c}_k}{\overline{b}_k}ds=+\infty,\tag{3}$$

$$\int_{t_j}^{+\infty}\prod_{t_j<t_k<s}\frac{1}{\overline{c}_k}\cdot p(s)ds=+\infty.\tag{4}$$

则当$t_k>T,t\in(t_k,t_{k+1}]$，有$x''(t_k^+)\ge 0$, $x''(t)\ge 0$和$x'(t_k^+)\le 0$, $x'(t)\le 0$.

证明：1）先证对一切自然数k，有$x''(t_k^+)\ge 0$．否则，存在某个 j, $t_j\ge T$，使得$x''(t_j^+)=-\alpha<0\,(\alpha>0)$.

由方程（1）得$x'''(t)=-f(t,x(t-\tau))\le -p(t)\varphi(x(t-\tau))\le 0$，$t\in\bigcup_{i=1}^{+\infty}(t_{j+i-1},t_{j+i})$，故在$t\in(t_i,t_{i+1}],i=j,j+1,\cdots$，$x''(t)$是单调不增的，所以有$x''(t)\le x''(t_j^+)=-\alpha<0,t\in(t_j,t_{j+1}]$，$x''(t_{j+1})\le-\alpha<0$.

同理可得$x''(t)\le-\underline{c}_{j+1}\alpha<0$, $t\in(t_{j+1},t_{j+2}]$，$x''(t_{j+2})\le-\underline{c}_{j+1}\alpha<0$.

利用数学归纳法，可得对任意自然数n，有$x''(t)\le-\underline{c}_{j+n-1}\,\underline{c}_{j+n-2}\cdots\underline{c}_{j+1}\alpha<0$，$t\in(t_{j+n-1},t_{j+n}]$，$x''(t_{j+n})\le-\underline{c}_{j+n-1}\underline{c}_{j+n-2}\cdots\underline{c}_{j+1}\alpha<0$，所以有：

$$x''(t)\le x''(t_j^+)\prod_{t_j<t_k<t}\underline{c}_k=-\alpha\prod_{t_j<t_k<t}\underline{c}_k<0,\ t\in(t_j,\infty).\tag{5}$$

若存在某个$m>j$，使得$x'(t_m)\le 0$．由（5）式知，$x'(t)$在$(t_m,t_{m+1}]$上单调递减，故当$t\in(t_m,t_{m+1}]$时，$x'(t)<x'(t_m^+)\le\underline{b}_m x'(t_m)\le 0$，$x'(t_{m+1})<\underline{b}_m x'(t_m)\le 0$，则$x'(t_{m+1}^+)<0$，令$x'(t_{m+1}^+)=-\beta$（$\beta>0$）．当$t\in(t_{m+1},t_{m+2}]$时，$x'(t)\le-\beta$，$x'(t_{m+2})\le-\beta$．同理，当$t\in(t_{m+2},t_{m+3}]$时，$x'(t)\le-\underline{b}_{m+2}\beta<0$，$x'(t_{m+3})\le-\underline{b}_{m+2}\beta<0$. 利用数学归纳法，可得，$x'(t)\le-\underline{b}_{m+n}\cdots\underline{b}_{m+2}\beta<0$，$t\in(t_{m+n},t_{m+n+1}]$，$x'(t_{m+n})\le-\underline{b}_{m+n}\cdots\underline{b}_{m+2}\beta<0$（$n\ge 2$），即

$$x'(t)\le-\beta\prod_{t_{m+1}<t_k<t}\underline{b}_k<0,\quad t\in(t_{m+1},\infty).\tag{6}$$

又因为 $x(t_k^+)\le\overline{a}_k x(t_k)$, (7)

联立（6）和（7），由引理 1 得

$$\begin{aligned}x(t)&\le x(t_{m+1}^+)\prod_{t_{m+1}<t_k<t}\overline{a}_k+\int_{t_{m+1}}^{t}\prod_{s<t_k<t}\overline{a}_k\left(-\beta\prod_{t_{m+1}<t_k<s}\underline{b}_k\right)ds\\&=\left(\prod_{t_{m+1}<t_k<t}\overline{a}_k\right)\left(x(t_{m+1}^+)-\beta\int_{t_{m+1}}^{t}\prod_{t_{m+1}<t_k<s}\frac{\underline{b}_k}{\overline{a}_k}ds\right)\end{aligned}.\tag{8}$$

由条件（2）可知，当（8）式两端$t\to+\infty$时，$x(t)\to-\infty$，这与$x(t)>0$，$t>T$矛盾.

于是，不存在$m>j$，使得$x'(t_m)\le 0$，即：对于一切$k\ge j$，都有$x'(t_k)>0$．所以，有$x'(t)>0\,(t\ge t_j)$．事实上，由条件II)知，$x'(t_i)>0$，$x'(t_i^+)>0$，$i=j,\ j+1,\cdots$．由于$x''(t)<0$，$t\in(t_j,\infty)$，所以$x'(t)$在$(t_i,t_{i+1}]$，$i=j,\ j+1,\cdots$上单调递减，于是$x'(t)>x'(t_{i+1})>0$，$t\in(t_i,t_{i+1}]$，$i=j,\ j+1,\cdots$，因此，$x'(t)>0\,(t\ge t_j)$．由（5）式，有：

$$x''(t)\le-\alpha\prod_{t_j<t_k<t}\underline{c}_k\qquad t>t_j,$$

由条件II）有：

$$x'(t_k^+)\le\overline{b}_k x'(t_k)\qquad k=j+1,\ j+2,\cdots,$$

联立以上两式，取$m(t)=x'(t)$，由引理1得：

$$\begin{aligned}x'(t)&\le x'(t_j^+)\prod_{t_j<t_k<t}\overline{b}_k+\int_{t_j}^{t}\prod_{s<t_k<t}\overline{b}_k\left(-\alpha\prod_{t_j<t_k<s}\underline{c}_k\right)ds\\&=\left(\prod_{t_j<t_k<t}\overline{b}_k\right)\left(x'(t_j^+)-\alpha\int_{t_j}^{t}\prod_{t_j<t_k<s}\frac{\underline{c}_k}{\overline{b}_k}ds\right)\end{aligned}.\tag{9}$$

由条件（3）可知，当（9）式两端$t\to+\infty$时，$x'(t)\to-\infty$，这与$x'(t)>0\,(t\ge t_j)$矛盾.

综合以上可知，存在某个$x''(t_j^+)<0$是不能成立的.因此，对一切自然数k，有$x''(t_k^+)\ge 0$．又因为$x'''(t)\le 0$，$t\in(t_k,t_{k+1}]$，$x''(t)$在$t\in(t_k,t_{k+1}]$上单调不增，所以有$x''(t)\ge x''(t_{k+1})\ge 0$，$t\in(t_k,t_{k+1}]$，从而对一切$t_k>T$，有$x''(t)\ge 0$.

2）再来证明$x'(t_k)\le 0,\ t_k>T$．否则，存在某个$t_j>T,\ x'(t_j)>0$.

由$x''(t)\ge 0$知，当$t\in(t_j,t_{j+1}]$时，$x'(t)\ge x'(t_j^+)\ge\underline{b}_j x'(t_j)>0$．同理，当$t\in(t_{j+1},t_{j+2}]$时，$x'(t)\ge\underline{b}_{j+1}x'(t_{j+1})>0$．由数学归纳法知，对任意自然数$n$，有$t\in(t_{j+n},t_{j+n+1}]$时，$x'(t)>0$，即当$t\ge t_j$时，有$x'(t)>0$.

设$u(t)=x''(t)/\varphi(x(t-\tau))$，则$u(t)\ge 0$．当$t\ge t_j$时，有

$$\begin{aligned}u'(t)&=\frac{x'''(t)}{\varphi(x(t-\tau))}-\frac{x''(t)\varphi'(x(t-\tau))x'(t-\tau)}{\varphi^2(x(t-\tau))}\le-p(t)\\u(t_k^+)&=\frac{x''(t_k^+)}{\varphi(x(t_k-\tau))}\le\frac{\overline{c}_k x''(t_k)}{\varphi(x(t_k-\tau))}=\overline{c}_k u(t_k)\end{aligned},$$

由引理1得：

$$u(t)\le u(t_j^+)\prod_{t_j<t_k<t}\overline{c}_k-\int_{t_j}^{t}\prod_{s<t_k<t}\overline{c}_k p(s)ds=\left(\prod_{t_j<t_k<t}\overline{c}_k\right)\left(u(t_j^+)-\int_{t_j}^{t}\prod_{t_j<t_k<s}\frac{1}{\overline{c}_k}p(s)ds\right).\tag{10}$$

由引理 2 中（4）式知，当（10）式两端$t \to +\infty$时，$u(t) \to -\infty$，这与$u(t) \ge 0$矛盾．因此，$x'(t_k) \le 0$，$t_k > T$．又因为$x'(t)$单调不减，所以$x'(t) \le x'(t_{k+1}) \le 0$，$t \in (t_k, t_{k+1}]$．证毕．

引理 3　设$x(t)$是方程（1）的解，若存在$T>0$，当$t_k > T$时，$x(t)<0$，$x(t-\tau)<0$，引理 2 中(2),(3),(4)成立,则当$t_k > T$，$t \in (t_k, t_{k+1}]$时,有$x''(t_k^+) \le 0$，$x''(t) \le 0$和$x'(t_k^+) \ge 0$，$x'(t) \ge 0$．

引理 4[2]　设$x(t)$为分段连续函数,当$t \in R_+$，$t \ne t_k$连续,在每个t_k左连续,存在右极限．若还满足下列条件：

（i）存在$T \in R_+$，使$x(t) \ge 0$ (≤ 0)，$t \ge T$；

（ii）存在$m \in N$，使$x(t)$在每个区间$(t_k, t_{k+1}]$ $(k \ge m)$上单调不增（不减）;

（iii）级数$\sum_{k=1}^{\infty}\left[x(t_k^+) - x(t_k)\right]$收敛．

则$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \alpha$存在，且$\alpha \ge 0$ (≤ 0)．

定理 1　假设引理 2 的条件成立,$\prod_{i=1}^{\infty}\overline{a}_i, \prod_{i=1}^{\infty}\overline{c}_i$有界,$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\overline{a}_i - 1\right|, \sum_{i=1}^{\infty}\left|\overline{c}_i - 1\right|$收敛,$\int_{t_j}^{+\infty} p(s)\,ds = +\infty$，则方程（1）的所有解或者振动，或者单调趋于零．

证明：假设$x(t)$为一非振动解，不妨设$x(t)$为最终正解，即存在$T>0$，当$t>T$时，$x(t)>0$．

首先证明$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \alpha$存在．为此只需证明满足引理 4 的条件．显然，引理 4 的条件（i）满足．由引理 2 知，对任意的$t_k > T$，有$x'(t) \le 0$，$t \in (t_k, t_{k+1}]$．故$x(t)$在$(t_k, t_{k+1}]$上单调不增，从而引理 4 的条件（ii）满足

下面证明条件（iii）满足，即$\sum_{i=1}^{\infty}\left(x(t_i^+) - x(t_i)\right) \le \sum_{i=1}^{\infty}(\overline{a}_i - 1)x(t_i)$收敛．先证序列$\{x(t_i)\}$有界．对某个$t_j > T$，由$x(t)$在$(t_{j+i-1}, t_{j+i}], i = 1, 2, \cdots$上单调不增，可知$x(t_{j+1}) \le x(t_j^+)$，进而有 $x(t_{j+1}^+) \le \overline{a}_{j+1}x(t_{j+1}) \le \overline{a}_{j+1}x(t_j^+)$，$x(t_{j+2}) \le x(t_{j+1}^+) \le \overline{a}_{j+1}x(t_{j+1}) \le \overline{a}_{j+1}x(t_j^+)$，$x(t_{j+2}^+) \le \overline{a}_{j+2}x(t_{j+2}) \le \overline{a}_{j+2}\overline{a}_{j+1}x(t_j^+)$．由数学归纳法可得,对任意自然数$n$，有$x(t_{j+n}) \le \overline{a}_{j+n-1}\cdots\overline{a}_{j+1}x(t_j^+)$，$x(t_{j+n}^+) \le \overline{a}_{j+n}\overline{a}_{j+n-1}\cdots\overline{a}_{j+1}x(t_j^+)$．

由$\prod_{i=1}^{\infty}\overline{a}_i$有界，$x(t_j^+)$为一固定数，可知$\{x(t_i)\}, t_i > T$为有界序列，不妨设存在$M>0$，使$x(t_k) < M$．又由$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\overline{a}_i - 1\right|$收敛，知$\sum_{i=1}^{\infty}\left|(\overline{a}_i - 1)x(t_i)\right|$收敛，进而$\sum_{i=1}^{\infty}(\overline{a}_i - 1)x(t_i)$收敛，因此

$\sum_{i=1}^{\infty}\left(x\left(t_i^+\right)-x\left(t_i\right)\right)$收敛．即引理 4 条件（iii）满足，所以$\lim_{t\to+\infty}x(t)=\alpha\ge 0$．

再来证明$\alpha=0$．否则$\alpha>0$，从而$\varphi(\alpha)>0,\ \lim_{t\to+\infty}\varphi\left(x(t-\tau)\right)=\varphi(\alpha)$．所以存在足够小的$\varepsilon>0$，使得$\varphi\left(x(t-\tau)\right)>\varphi(\alpha)-\varepsilon>0$．

从t_j到t积分$x'''(t)=-f\left(t,x(t-\tau)\right)\le -p(t)\varphi\left(x(t-\tau)\right)$，得

$$\begin{aligned}x''(t)-x''\left(t_j^+\right)&\le-\int_{t_j}^{t}p(s)\varphi\left(x(s-\tau)\right)ds+\sum_{t_j<t_i\le t}\left(x''\left(t_i^+\right)-x''\left(t_i\right)\right)\\&\le-\left(\varphi(\alpha)-\varepsilon\right)\int_{t_j}^{t}p(s)ds+\sum_{t_j<t_i\le t}\left(\overline{c}_i-1\right)x''\left(t_i\right)\end{aligned}\tag{11}$$

由$\prod_{i=1}^{\infty}\overline{c}_i$有界，$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\overline{c}_i-1\right|$收敛，利用证明$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\overline{a}_i-1\right)x\left(t_i\right)$收敛的方法，同理可证$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\overline{c}_i-1\right)x''\left(t_i\right)$收敛. 令(11)式两端$t\to+\infty$得，$x''(t)\to-\infty$，这与$x''(t)\ge 0$矛盾. 从而$\alpha=0$，即$\lim_{t\to+\infty}x(t)=0$．如果$x(t)$为最终负解，同理可证$\lim_{t\to+\infty}x(t)=0$．证毕.

推论 假设引理 2 的条件成立，$\prod_{i=1}^{\infty}\overline{c}_i$有界，$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\overline{a}_i-1\right|$，$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\overline{c}_i-1\right|$收敛，$\int_{t_j}^{+\infty}p(s)ds=+\infty$，则（1）的任意有界解或者振动，或者单调趋于零.

定理 2 假设引理 2 的条件(2)，(3)成立，且$\overline{a}_k\le 1$，$\overline{c}_k\le 1$，$k=1,2,\cdots$，$\int_{t_j}^{+\infty}p(s)ds=+\infty$，则方程（1）的解或者振动，或者单调趋于零.

证明：设$x(t)$为方程（1）的非振动解，不妨设$x(t)$为最终正解，即存在$T>0$，当$t>T$时，$x(t)>0$．由引理 2 知，对任意$t_j>T$，当$t\in\left(t_{j+i-1},t_{j+i}\right]$，$i=1,2,\cdots$时，$x'(t)\le 0$，从而$x(t)$在$\left(t_{j+i-1},t_{j+i}\right]$，$i=1,2,\cdots$上单调减．因为$\overline{a}_i\le 1$，$i=1,2,\cdots$，所以$x\left(t_{j+i-1}^+\right)\le\overline{a}_{j+i-1}x\left(t_{j+i-1}\right)\le x\left(t_{j+i-1}\right)$，$i=1,2,\cdots$，从而$x(t)$在$\left(t_j,+\infty\right)$上是单调递减的．又因为$t>T$时，$x(t)>0$，所以存在$\alpha\ge 0$，使得$\lim_{t\to+\infty}x(t)=\alpha$．用定理 1 的证明方法可证$\alpha=0$，即$\lim_{t\to+\infty}x(t)=0$．同理，可以证明$x(t)$为最终负解的情形．证毕.

2 例 子

考虑如下的三阶脉冲时滞微分方程：

$$x'''(t)+e^{t}x\left(t-\frac{1}{2}\right)=0,\quad t\ne t_k,\quad t_k=k,\quad k=1,2,\cdots,$$

$$x\left(t_k^+\right)=\left(1-\frac{1}{k}\right)x\left(t_k\right),\quad x'\left(t_k^+\right)=\left(1-\frac{1}{k^2}\right)x'\left(t_k\right),$$

$$x''\left(t_k^+\right)=\left(1-\frac{1}{k^2}\right)x''\left(t_k\right),\quad t=t_k=k\ .$$

易证上式满足定理 1 的条件．由定理 1 可知，上式的解或者振动，或者单调趋于零．同时，上式也满足定理 2 的条件，由定理 2 也有同样的结论．并注意到，上式不满足文[9]中的引理 2 的条件（ii），故文[9]中的定理 1 是不能判断的．

参考文献

[1] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simieonov P S. Theory of impulsive differential equations [M]. Singapore: World Scientific, 1989: 32-33.

[2] 申建华, 庾建设. 具有脉冲扰动的非线性时滞微分方程[J]. 应用数学, 1996, 9(3): 272-277.

[3] Yan J R, Zhao A M, Zhang Q X. Oscillation properties of nonlinear impulsive delay differential equations and applications to population models [J]. J Math Anal Appl, 2006, 322(1): 359-370.

[4] Zhao A M., Yan J R. Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses [J]. J Math Anal Appl, 1997, 210(2): 667-678.

[5] Shen J H. Qualitative properties of solutions of second-order linear ODE with impulses [J]. Math Comp Model, 2004, 40(3-4): 337-344.

[6] Luo J W. Second-order quasilinear oscillation with impulses [J]. Computers Math Applic, 2003, 46(2-3): 279-291.

[7] Zhang W P, Bi P, Zhu D M. Oscillations of certain second-order nonlinear differential equations with impulses [J]. J East China Normal University: natural science, 2007, 32(3): 39-48.

[8] 许文杰. 三阶脉冲微分方程的振动性与渐进性[J]. 华南师范大学学报：自然科学版, 2001, 28(2): 59-64.

[9] 张超龙，陈永邵．三阶非线性脉冲时滞微分方程解的振动性与渐进性[J]. 华南师范大学学报：自然科学版, 2004, 31(2): 37-42.

[10] Zhang C L, Feng W Z, Yang F J. Oscillations of higher order nonlinear functional differential equations with impulses [J]. Appl Math Comp, 2007, 190(1): 370-381.

Oscillatory and Asymptotic Behaviors of Third Order Nonlinear Delay Differential Equation with Impulse

ZHU Yakun, WANG Youbin

(College of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: The oscillatory and asymptotic behaviors of third order nonlinear delay differential equation with impulse were investigated. And the problem of the symbol relationships between the nonoscillation solutions and their derivatives was solved. The obtained sufficient conditions perfect some known results. And these conditions are more succinct and easier to be verified.

Key words: Delay Differential Equation with Impulse; Oscillatory Behavior; Asymptotic Behavior

（编辑：王一芳）