双扰动多目标规划锥有效解集的闭性和半连续性

栗四海，周轩伟†，刘　鹏

（温州大学数学与信息科学学院，浙江温州　325035）

摘　要：研究了一般拓扑向量空间中约束锥和控制锥同时受扰动时，锥有效点集和锥弱有效点集的闭性和半连续性．在此基础上，得到了约束锥和控制锥双扰动多目标规划问题的锥有效解集和锥弱有效解集的闭性和半连续性．

关键词：多目标规划；锥有效点；锥有效解；半连续性；闭性

中图分类号：O221　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1674-3563(2009)05-0008-08

DOI：10.3875/j.issn.1674-3563.2009.05.002　　本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

扰动问题解的稳定性是多目标规划理论中的一个重要研究课题．文献[1]在 Euclid 空间中研究了向量目标函数和约束函数受扰动时，多目标规划的锥有效解和锥弱有效解分别在上半连续和下半连续意义下的稳定性．文献[2]讨论了多目标规划的可行集和目标空间的控制结构受扰动时，多目标规划的非受控解在半连续意义下的稳定性．文献[3]在 Banach 空间中研究了向量目标函数和控制结构同时受扰动时，双扰动多目标规划的锥有效解和锥弱有效解的稳定性．文献[4]研究了在拓扑向量空间中多目标规划的约束锥受扰动时，多目标规划的锥有效解和锥弱有效解在闭的和半连续意义下的稳定性．本文在文献[4]的基础上，研究了一般拓扑向量空间中当约束锥和控制锥同时扰动时，双扰动多目标规划的锥有效解和锥弱有效解的闭性和半连续性．

1 定义和引理

设 T 是拓扑空间，Y 是拓扑向量空间，$\varphi: T \to 2^{Y}$，$t \mapsto \varphi(t)$ 是集值映射，记 $\mathrm{dom}\varphi = \{t \in T : \varphi(t) \neq \phi\}$，$\mathrm{graph}\varphi = \{(t, y) \in T \times Y, y \in \varphi(t), t \in \mathrm{dom}\varphi\}$．

定义 1[4]　设集合 $T_1 \subset \mathrm{dom}\varphi$，$t_0 \in T_1 \subset T$．

1）若对 $\varphi(t_0)$ 的每个领域 $V \subset Y$，存在 t_0 的邻域 $U \subset T$，使得对任意的 $t \in U \cap \mathrm{dom}\varphi$ 都有 $\varphi(t) \subset V$，则称 φ 在点 t_0 处是上半连续的．若 φ 在 T_1 的每一点处都是上半连续的，则称 φ 在集合 T_1 上是上半连续的；

2）若对任意的 $y \in \varphi(t_0)$ 和 y 的任意领域 $V \subset Y$，存在 t_0 的邻域 $U \subset T$，使得对任意的

收稿日期：2009-02-20

作者简介：栗四海（1982- ），男，河南驻马店人，硕士研究生，研究方向：多目标优化．† 通讯作者，zhouxuanwei@mail.wzptt.zj.cn

$t \in U \cap \mathrm{dom}\varphi$ 都有 $\varphi(t) \cap V \neq \phi$，则称 φ 在点 t_0 处是下半连续的．若 φ 在 T_1 的每一点处都是下半连续的，则称 φ 在集合 T_1 上是下半连续的；

3）若 φ 在点 t_0 处既是上半连续的又是下半连续的，则称 φ 在点 t_0 处是连续的．

定义 2　设集合 $t_0 \in T_1 \subset T$，$\varphi(t)$ 是非空集合，若存在点 t_0 的邻域 $N(t_0)$ 使得 $\overline{\bigcup_{t \in N(t_0)} \varphi(t)}$ 是紧集，则称 φ 在点 t_0 附近是一致紧的．

定义 3　设 $t_0 \in T_1 \subset \mathrm{dom}\varphi$，若 $\{(t_\alpha, y_\alpha)\}$ 是集值映射 φ 的图形 $\mathrm{graph}\varphi$ 中的一个网且收敛于 $(t_0, y_0) \in T_1 \times Y$ 有 $y_0 \in \varphi(t_0)$，则称 φ 在点 t_0 处是闭的．若 φ 在 T_1 的每一点处都是闭的，则称 φ 在集合 T_1 上是闭的．

注 1　φ 在 $\mathrm{dom}\varphi$ 上是闭集值映射的充要条件是 φ 的图形 $\mathrm{graph}\varphi$ 是闭集．

定义 4[5]　设 $Y_1 \subset Y$ 是非空集合，$K \subset Y$ 是内部非空的尖闭凸锥．

1）若 $\tilde{y} \in Y_1$，并且不存在 $y \in Y_1$ 使得 $\tilde{y} - y \in K \setminus \{0\}$，则称 $\tilde{y}$ 是集合 Y_1 的 $K-$有效点，Y_1 的所有 $K-$有效点组成的集合记作 $\varepsilon(Y_1, K)$；

2）若 $\tilde{y} \in Y_1$，并且不存在 $y \in Y_1$ 使得 $\tilde{y} - y \in \mathrm{int}\,K$，则称 $\tilde{y}$ 是集合 Y_1 的 $K-$弱有效点，Y_1 的所有 $K-$弱有效点组成的集合记作 $\varepsilon_w(Y_1, K)$．

设 T、X 和 S 是拓扑空间，Y 和 Z 是拓扑向量空间，考虑扰动多目标规划问题 (VP)：

$$\begin{aligned} &VP - \min f(x,t) \\ &s.t - g(x) \in D(t) \end{aligned}, \tag{1}$$

其中，$t \in T_1 \subset T$，$x \in X_1 \subset X$，$v \in S_1 \subset S$，$f : X \times T_1 \to Y$，$g : X \to Z$，X_1 是非空集合，$D(t) \subset Z$ 是受扰动的内部非空的尖闭凸锥．$K(v) \subset Y$　$v \in S_1$ 是受扰动的内部非空的尖闭凸锥．设 $\mathrm{dom}f = X, \mathrm{dom}g = X$，记

$$\tilde{X}(t) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X}_1 \mid -g(x) \in D(t)\}, t \in T_1, \tag{2}$$

$$\tilde{Y}(t) = f(\tilde{X}(t), t) = \bigcup_{x \in \tilde{X}(t)} f(x,t), t \in T_1, \tag{3}$$

并且记集值映射 $\tilde{X} : T_1 \to 2^X, t \to \tilde{X}(t)$；$\tilde{Y} : T_1 \to 2^Y, t \to \tilde{Y}(t)$；$K^v : S_1 \to 2^Y, v \to K(v)$．对每一个 $t \in T_1$，记 $\tilde{X}(t)$ 的强内部为：

$$S - \mathrm{int}\,\tilde{X}(t) = \{x \in X_1 \mid -g(x) \in \mathrm{int}\,D(t)\}. \tag{4}$$

记 $\tilde{Y}(t)$ 的 $K(v)-$有效点集和 $K(v)-$弱有效点集分别为 $\varepsilon(\tilde{Y}(t), K(v))$ 和 $\varepsilon_w(\tilde{Y}(t), K(v))w$，$t \in T_1, v \in S_1$，并且记集值映射为：

$$\varepsilon^{tv} : T_1 \times S_1 \to Y \times Y, (t,v) \to \varepsilon(\tilde{Y}(t), K(v));$$

$$\varepsilon_w^{tv} : T_1 \times S_1 \to Y \times Y, (t,v) \to \varepsilon_w(\tilde{Y}(t), K(v)).$$

关于集值映射 $D : T_1 \to 2^Z, t \to D(t)$ 假设满足条件：

（I）对每一个 $t \in T_1$，若 $d \in \mathrm{int}\,D(t)$，则存在 d 的邻域 $V \subset Z$ 和 t 的邻域 $U \subset T$，使得

$V \subset \operatorname{int} D(t'), \forall t' \in U$；

（II）对每一个 $v \in S_1$，若 $d \in \operatorname{int} K(v)$，则存在 d 的邻域 $V \subset Z$ 和 v 的邻域 $U \subset S$，使得 $V \subset \operatorname{int} K(v'), \forall v' \in U$．

引理 1　设 $T_1 \subset T, X_1 \subset X$，$S_1 \subset S$ 是紧集，$\widetilde{X}(t) \subset X_1 (t \in T)$ 是非空集合．f 在 $X_1 \times T_1$ 上是连续的，$K(v) \subset \mathrm{Y}$ 是内部非空的尖闭凸锥，若集值映射 D 是闭的和下半连续的，g 在 X 上是连续的，且对每一个 $t \in T_1$ 有 $cl(S - \operatorname{int} \widetilde{X}(t)) = \widetilde{X}(t)$．则有 $\widetilde{Y}$ 在 T_1 上是下半连续的．

证明：见参考文献[4]中定理 3.1 的证明．

引理 2　设 $T_1 \subset T, X_1 \subset X$，$S_1 \subset S$ 是紧集，$\widetilde{X}(t) \subset X_1 (t \in T)$ 是非空集合．f 在 $X_1 \times T_1$ 上是连续的，集值映射 $\widetilde{Y}$ 在点 $t_0 \in T_1$ 附近是一致紧的．$K(v) \subset \mathrm{Y}$ $(v \in S_1)$ 是内部非空的尖闭凸锥．若集值映射 D 在点 t_0 处是连续的且满足假设（I），g 在 X 上是连续的，且对每一个 $t \in T_1$ 有 $cl(S - \operatorname{int} \widetilde{X}(t)) = \widetilde{X}(t)$．则有 $\widetilde{Y}$ 在 t_0 是连续的．

证明：见参考文献[4]中定理 3.2 的证明．

引理 3　设 $T_1 \subset T$ 和 $\widetilde{Y}(t)$ 是非空集合，$K(v) \subset \mathrm{Y}$ $(v \in S_1)$ 是内部非空的尖闭凸锥，若集值映射 $\widetilde{Y}$ 在 T_1 上是闭的和下半连续的，K^v 在点 v_0 处是下半连续的且在点 v_0 处满足假设(II)，则 $\varepsilon_{\mathrm{w}}^{\mathrm{tv}}$ 在 $T_1 \times V$ 上是闭集值映射．

证明：设 $\{(t_\alpha, v_\alpha)\}$ 是 $\varepsilon_{\mathrm{w}}^{\mathrm{tv}}$ 中的一个网且收敛于点 (t_0, v_0)，有 $y_\alpha \in \varepsilon_w(\tilde{Y}(t_\alpha), K(v_\alpha))$ 且 $y_\alpha \to y_0$，我们要证明 $y_0 \in \varepsilon_w(\tilde{Y}(t_0), K(v_0))$．

反证法：假设 $y_0 \notin \varepsilon_w(\tilde{Y}(t_0), K(v_0))$，由于 $\widetilde{Y}$ 在 T_1 上是闭的，故 $y_0 \in \widetilde{Y}(t_0)$．由假设 $y_0 \notin \varepsilon_w(\tilde{Y}(t_0), K(v_0))$ 知存在 $\bar{y} \in \widetilde{Y}(t_0)$ 使得 $y_0 - \bar{y} \in \operatorname{int} K(v_0)$，又因为 $\widetilde{Y}$ 在 T_1 上是下半连续的，则对 $\bar{y} \in \widetilde{Y}(t_0)$ 存在网 $\{\bar{y}_\alpha\}$ 使得 $\mathrm{Lim} \bar{y}_\alpha = \bar{y}$，再由 $y_\alpha \to y_0$ 得 $\mathrm{Lim}(y_\alpha - \bar{y}_\alpha) = y_0 - \bar{y} \in \operatorname{int} K(v_0)$，又 K^v 在点 v_0 处是下半连续的且在点 v_0 处满足假设（II），．故存在 α_0，当 $\alpha \succ \alpha_0$ 时有 $(y_\alpha - \bar{y}_\alpha) \in \operatorname{int} K(v_\alpha)$，这导致 $y_\alpha \notin \varepsilon_w(\tilde{Y}(t_\alpha), K(v_\alpha))$ 与已设矛盾．

引理 4　设 $T_1 \subset T$ 和 $\widetilde{Y}(t)$ 是非空闭集，$K(v) \subset \mathrm{Y}$ $(v \in S_1)$ 是内部非空的尖闭凸锥，若集值映射 $\widetilde{Y}$ 在 $t_0 \in T_1$ 处是连续的，并且在 $t_0 \in T_1$ 附近是一致紧的．

1）若 K^v 在点 v_0 处是下半连续的且在点 v_0 处满足假设（II），则 $\varepsilon_{\mathrm{w}}^{\mathrm{tv}}$ 在点 (t_0, v_0) 处是上半连续的．

2）若 K^v 在点 v_0 处是下半连续的且在点 v_0 处满足假设（II），且 $\widetilde{Y}(t_0)$ 关于 $K(v_0)-$ 是严格凸的．则 ε^{tv} 在点 (t_0, v_0) 处是上半连续的．

证明：1）反证法：假设 $\varepsilon_{\mathrm{w}}^{\mathrm{tv}}$ 在点 (t_0, v_0) 处上不是上半连续的．那么存在 $\varepsilon_w(\tilde{Y}(t_0), K(v_0))$ 的一个邻域 $V \subset Y$ 和网 $\{(t_\alpha, v_\alpha)\}$、$\{y_\alpha\}$ 使得

$$(t_\alpha, v_\alpha) \to (t_0, v_0)\,,\ y_\alpha \in \varepsilon_w(\tilde{Y}(t_\alpha), K(v_\alpha)) \not\subset V\,, \tag{5}$$

而 $y_\alpha \in \varepsilon_w(\tilde{Y}(t_\alpha), K(v_\alpha)) \subset \tilde{Y}(t_\alpha)$ 且 $\tilde{Y}$ 在点 $t_0 \in T_1$ 附近是一致紧的，不妨设 $y_\alpha \to y_0$，又 $\tilde{Y}$ 在 $t_0 \in T_1$ 处是连续的，从而在 t_0 是上半连续的. 由上半连续的定义和 $\tilde{Y}(t)$ 是非空闭集可知，$\tilde{Y}$ 在 t_0 处是闭的. 即 $y_0 \in \tilde{Y}(t_0)$. 若 $y_0 \notin \varepsilon_w(\tilde{Y}(t_0), K(v_0))$，则由锥有效点的定义可知存在 $y' \in \tilde{Y}(t_0)$ 使得

$$y_0 - y' \in \operatorname{int} K(v_0)\,, \tag{6}$$

又 $\tilde{Y}$ 在 t_0 处是下半连续，所以存在网 $\{\bar{y}_\alpha\} \subset Y$ 使得 $\bar{y}_\alpha \in \tilde{Y}(t_\alpha)$，且 $\bar{y}_\alpha \to y'$，由此据 $y_\alpha \to y_0$ 和（6）式知

$$y_\alpha - \bar{y}_\alpha \to y_0 - \bar{y} \in \operatorname{int} K(v_0)\,, \tag{7}$$

于是存在 α_1，当 $\alpha \succ \alpha_1$ 时有

$$y_\alpha - \bar{y}_\alpha \in \operatorname{int} K(v_0)\,. \tag{8}$$

由已知 K^v 在点 v_0 处是下半连续的且在点 v_0 处满足假设(II)，由 $v_\alpha \to v_0$ 和(7)式知存在 α_2，当 $\alpha \succ \alpha_2$ 时有 $y_\alpha - \bar{y}_\alpha \in K(v_\alpha)$，由此当 $\alpha' \succ \alpha_1$ 且 $\alpha' \succ \alpha_2$ 时有 $y_{\alpha'} - \bar{y}_{\alpha'} \in K(v_{\alpha'})$，并且 $y_{\alpha'} \neq \bar{y}_{\alpha'}$（否则将 $y_{\alpha'} = \bar{y}_{\alpha'}$ 代入（8）式得 $0 \in \operatorname{int} K(v_0)$，矛盾），即对这个 α' 有

$$y_{\alpha'} - \bar{y}_{\alpha'} \in K(v_{\alpha'}) \setminus \{0\} \tag{9}$$

故对 $y_{\alpha'} \in \tilde{Y}(t_{\alpha'})$ 存在 $\bar{y}_{\alpha'} \in \tilde{Y}(t_{\alpha'})$ 使得（9）式成立. 故由锥有效点的定义知存在 α 使 $y_\alpha \notin \varepsilon_w(\tilde{Y}(t_\alpha), K(v_\alpha))$ 成立，这与已设矛盾. 若 $y_0 \in \varepsilon_w(\tilde{Y}(t_0), K(v_0))$，则由 $y_\alpha \to y_0$ 知必然存在 α''，有 $y_{\alpha''} \in \varepsilon_w(\tilde{Y}(t_0), K(v_0)) \subset V$，与 $y_\alpha \not\subset V$ 矛盾. 即证.

2）由已知 $\tilde{Y}(t_0)$ 关于 $K(v_0)-$ 是严格凸的，可得（6）式成立，其它的类似 1）的证明.

记锥 $K'(v) = \operatorname{int} K(v) \cup \{0\}$，点集映射 $K' : V \to 2^Y, v \to K'(v)$.

引理 5　设 $T_1 \subset T$ 和 $\tilde{Y}(t)$ 是非空闭集，$K(v) \subset \mathrm{Y}$ $(v \in S_1)$ 是内部非空的尖闭凸锥，若集值映射 $\tilde{Y}$ 在 $t_0 \in T_1$ 处是连续的，并且在 $t_0 \in T_1$ 附近是一致紧的，K^v 在点 v_0 处是上半连续的且在点 v_0 处满足假设（II）.

1）若对于 (t_0, v_0) 附近的任一 (t, v)，$\varepsilon(\tilde{Y}(t), K(v))$ 关于 $\tilde{Y}(t)$ 是 $K(v)-$ 外稳定的，即有 $\tilde{Y}(t) \subset \varepsilon(\tilde{Y}(t), K(v)) + K(v)$，则 ε^{tv} 在点 (t_0, v_0) 处是下半连续的.

2）若对于 (t_0, v_0) 附近的任一 (t, v)，$\varepsilon_w(\tilde{Y}(t), K(v))$ 关于 $\tilde{Y}(t)$ 是 $K'(v)-$ 外稳定的，则 ε^{tv} 在点 (t_0, v_0) 处是下半连续的.

证明：1）由于 $\tilde{Y}$ 在 $t_0 \in T_1$ 附近是一致紧的，且 $\varepsilon(\tilde{Y}(t), K(v))$ 关于 $\tilde{Y}(t)$ 是 $K(v)-$ 外稳定的，即存在 (t_0, v_0) 的邻域 $N(t_0, v_0)$ 使得对每一个 $(t, v) \in N(t_0, v_0)$ 有 $\tilde{Y}(t) \subset \varepsilon(\tilde{Y}(t), K(v)) + K(v)$.

设 ε^{tv} 在点 (t_0, v_0) 处不是下半连续的，则存在 $y_0 \in \varepsilon(\tilde{Y}(t_0), K(v_0))$ 和 y_0 的一个邻域 $V \subset Y$ 以及网 $(t_\alpha, v_\alpha) \to (t_0, v_0)$ 使得

$$V \cap \varepsilon(\tilde{Y}(t_0), K(v_0)) = \varphi\ . \tag{10}$$

由 $\tilde{Y}$ 在 $t_0 \in T_1$ 处是连续的，从而是下半连续的．所以存在一个网 $y_\alpha \in \tilde{Y}(t_\alpha) \subset Y$，使得 $y_\alpha \in V$ 且 $y_\alpha \to y_0$，由 $\tilde{Y}(t) \subset \varepsilon(\tilde{Y}(t), K(v)) + K(v)$ 知有 $z_\alpha \in \varepsilon(\tilde{Y}(t_\alpha), K(v_\alpha))$ 使 $y_\alpha - z_\alpha \in K(v_\alpha)$．由 $\tilde{Y}$ 在 $t_0 \in T_1$ 附近是一致紧的，知 z_α 有收敛的子网，设其收敛到 z_0，又由 $\tilde{Y}$ 在 $t_0 \in T_1$ 处是上半连续的，因而有 $z_0 \in \tilde{Y}(t_0)$，据此得知 $\{y_\alpha - z_\alpha\}$ 有收敛到 $y_0 - z_0$ 的子网．又由 K^v 在点 v_0 处是上半连续的，推知 $y_0 - z_0 \in K(v_0)$，另外由 $y_0 \in \varepsilon(\tilde{Y}(t_0), K(v_0))$ 和 $z_0 \in \tilde{Y}(t_0)$ 知 $y_0 - z_0 \in K(v_0) \setminus \{0\}$，故 $y_0 = z_0$．于是 y_0 是 $\{z_\alpha\}$ 的唯一聚点，即 $\lim z_\alpha = y_0$，即存在 α_0，当 $\alpha \succ \alpha_0$ 时有 $z_\alpha \subset V$，与（10）矛盾．

2）与 1）的证明类似．

2 锥有效点集和锥弱有效点集的稳定性

考虑多目标规划问题（1），记由 $K(v)$ 确定的点集映射为 K^v，由 $\varepsilon(\tilde{Y}(t), K(v))$ 和 $\varepsilon_w(\tilde{Y}(t), K(v))$ 确定的映射为 ε^{tv} 和 ε_w^{tv}．

定理 1　设 $T_1 \subset T$，$X_1 \subset X$，$S_1 \subset S$ 是紧集，$\tilde{X}(t) \subset X_1 (t \in T)$ 是非空集合．f 在 $X_1 \times T_1$ 上是连续的，$K(v) \subset \mathrm{Y}\ (v \in S_1)$ 是内部非空的尖闭凸锥，K^v 在点 v_0 处是下半连续的且在点 v_0 处满足假设（II）．若集值映射 D 是闭的和下半连续的，g 在 X 上是连续的，且对每一个 $t \in T$ 有 $cl(S - \mathrm{int}\, \tilde{X}(t)) = \tilde{X}(t)$，则 ε_w^{tv} 在 $T_1 \times V$ 上是闭的．

证明：由引理 1 知 $\tilde{Y}$ 在 T_1 上是闭的和下半连续的，又 K^v 在点 v_0 处是下半连续的，由引理 3 知 ε_w^{tv} 在 $T_1 \times V$ 上是闭的．

定理 2　设 $T_1 \subset T, X_1 \subset X$，$S_1 \subset S$ 是紧集，$\tilde{X}(t) \subset X_1 (t \in T)$ 是非空集合．f 在 $X_1 \times T_1$ 上是连续的，集值映射 $\tilde{Y}$ 在点 $t_0 \in T_1$ 附近是一致紧的，$K(v) \subset \mathrm{Y}\ (v \in S_1)$ 是内部非空的尖闭凸锥，K^v 在点 v_0 处满足假设（II）．若集值映射 D 在点 t_0 处是连续的且满足假设（I），g 在 X 上是连续的，且对每一个 $t \in T$ 有 $cl(S - \mathrm{int}\, \tilde{X}(t)) = \tilde{X}(t)$．

1）若 K^v 在点 v_0 处是下半连续的，则 $\varepsilon_{\mathrm{w}}^{\mathrm{tv}}$ 在点 (t_0, v_0) 处是上半连续的．

2）若 K^v 在点 v_0 处是下半连续的，且 $\tilde{Y}(t_0)$ 关于 $K(v_0)-$ 是严格凸的，则 ε^{tv} 在点 (t_0, v_0) 处是上半连续的．

证明：1）由引理 2 知 $\tilde{Y}$ 在 t_0 处是连续的．由引理 4 的 1）知结论成立．

2）由引理 2 知 $\tilde{Y}$ 在 t_0 处是连续的．由引理 4 的 2）知结论成立．

定理 3　设 $T_1 \subset T, X_1 \subset X$，$S_1 \subset S$ 是紧集，$\tilde{X}(t) \subset X_1 (t \in T)$ 是非空集合．f 在 $X_1 \times T_1$ 上是连续的，集值映射 $\tilde{Y}$ 在点 $t_0 \in T_1$ 附近是一致紧的．$K(v) \subset \mathrm{Y}\ (v \in S_1)$ 是内部非空的尖闭凸锥，K^v 在点 v_0 处是上半连续的且在点 v_0 处满足假设（II）．若集值映射 D 在点 t_0 处是连续的且满

足假设（I），g 在 X 上是连续的，且对每一个 $t\in T$ 有 $cl(S-\operatorname{int}\tilde{X}(t))=\tilde{X}(t)$．$K^{v}$ 在点 v_0 处是下半连续的．

1）若对于 (t_0,v_0) 附近的任一 (t,v)，$\varepsilon(\tilde{Y}(t),K(v))$ 关于 $\tilde{Y}(t)$ 是 $K(v)-$外稳定的．即有 $\tilde{Y}(t)\subset\varepsilon(\tilde{Y}(t),K(v))+K(v)$，则 ε^{tv} 在点 (t_0,v_0) 处是下半连续的．

2）若对于 (t_0,v_0) 附近的任一 (t,v)，$\varepsilon_w(\tilde{Y}(t),K(v))$ 关于 $\tilde{Y}(t)$ 是 $K'(v)-$外稳定的．则 ε_w^{tv} 在点 (t_0,v_0) 处是下半连续的．

证明：1）由引理 2 知 $\tilde{Y}$ 在 t_0 处是连续的，再由引理 5 的 1）即得结论．

2）由引理 2 知 $\tilde{Y}$ 在 t_0 处是连续的，再由引理 5 的 2）即得结论．

3 锥有效解集和锥弱有效解集的半连续性

记 (VP) 的 $K(v)$ 有效解集和 $K(v)$ 弱有效解集分别为：

$$E(t,v)=\{x\in X_1\mid f(x,t)\cap\varepsilon(\tilde{Y}(t),K(v)\neq\phi\},t\in T_1,v\in S_1\text{；}\tag{10}$$

$$E_w(t,v)=\{x\in X_1\mid f(x,t)\cap\varepsilon_w(\tilde{Y}(t),K(v)\neq\phi\},t\in T_1,v\in S_1\text{．}\tag{11}$$

由 $E(t,v)$ 和 $E_w(t,v)$ 确定的点集映射分别为 $E:T_1\times S_1\to X\times Y,(t,v)\to E(t,v)$ 和 $E_w:T_1\times S_1\to X\times Y,(t,v)\to E_w(t,v)$．

引理 6　设 $T_1\subset T,X_1\subset X$，$S_1\subset S$ 是紧集，$\tilde{X}(t)\subset X_1(t\in T_1)$ 是非空集合．f 在 $X_1\times T_1$ 上是连续的，若 ε_w^{tv} 在 $T_1\times V$ 上是闭的．则 E_w 在 $T_1\times V$ 上是闭的．

证明：设 $\{x_\alpha\}$ 是 E_w 中的一个网，$x_\alpha\to x_0$．因为 $\tilde{X}(t)\subset X_1$ 是紧集，故 $\tilde{X}$ 在 T_1 上是闭集值映射，所以 $x_0\in\tilde{X}(t_0)$．由 $x_\alpha\in E_w(t_\alpha,v_\alpha)$ 知 $f(x_\alpha,t_\alpha)\in\varepsilon_w(t_\alpha,v_\alpha)$，又由 f 在 $X_1\times T_1$ 上是连续的知 $f(x_\alpha,t_\alpha)\to f(x_0,t_0)$，因为 ε_w^{tv} 在 $T_1\times V$ 上是闭的，故 $f(x_0,t_0)\in\varepsilon_w(t_0,v_0)$，即 $x_0\in E_w(t_0,v_0)$．因此 E_w 在 $T_1\times V$ 上是闭的．

定理 4　设 $T_1\subset T,X_1\subset X$，$S_1\subset S$ 是紧集，$\tilde{X}(t)\subset X_1(t\in T)$ 是非空集合．f 在 $X_1\times T_1$ 上是连续的，$K(v)\subset \mathrm{Y}\ (v\in S_1)$ 是内部非空的尖闭凸锥，若集值映射 D 是闭的和下半连续的，g 在 X 上是连续的，且对每一个 $t\in T$ 有 $cl(S-\operatorname{int}\tilde{X}(t))=\tilde{X}(t)$，且 K^{v} 在点 v_0 处是下半连续的且在点 v_0 处满足假设 (H_2)．则 E_w 在 $T_1\times V$ 上是闭的．

证明：由定理 1 知 ε_w^{tv} 在 $T_1\times V$ 上是闭的，再由引理 6 知 E_w 在 $T_1\times V$ 上是闭的．

引理 7　$T_1\subset T,X_1\subset X$，$S_1\subset S$ 是紧集，$\tilde{X}(t)\subset X_1(t\in T)$ 是非空集合．$\tilde{X}$ 在 $t_0\in T_1$ 处是连续的，f 在 $X_1\times T_1$ 上是连续的，集值映射 $\tilde{Y}$ 在点 $t_0\in T_1$ 附近是一致紧的．

1）若点集映射 ε^{tv}（ε_w^{tv}）在点 (t_0,v_0) 处是上半连续的，则 E（E_w）在点 (t_0,v_0) 处是上半连续的．

2）若点集映射 ε^{tv}（ε_w^{tv}）在点 (t_0,v_0) 处是下半连续的，$\tilde{X}$ 在点 $t_0\in T_1$ 附近是一致紧的，

$f(\cdot,t)$ 在 $\tilde{X}(t)$ 上是一对一的．则 E（E_w）在点 (t_0,v_0) 处是下半连续的．

证明：1）由 ε_w^{tv} 在点 (t_0,v_0) 处是上半连续的，$\tilde{X}(t)$ 是紧集，f 在 $X_1\times T_1$ 上是连续的，$\tilde{Y}(t_0)\subset Y$ 是紧集，推知 E_w 在点 (t_0,v_0) 是闭集．

反证法：假设 E_w 在点 (t_0,v_0) 处不是上半连续的，那么存在 $E_w(t_0,v_0)$ 的开邻域 V 和网 $\{(t_\alpha,v_\alpha)\}$ 收敛到 (t_0,v_0) 使得 $x_\alpha\in E_w(t_\alpha,v_\alpha)$ 但 $x_\alpha\not\subset V$．由于 X_1 是非空紧集，设 x_α 收敛到 x_0，由于 V 是开集，故 $x_0\not\subset V$．由 f 在 $X_1\times T_1$ 上是连续的知 $f(x_\alpha,t_\alpha)\to f(x_0,t_0)$，由 $f(x_\alpha,t_\alpha)\in\varepsilon_w(t_\alpha,v_\alpha)$ 和 E_w 在点 (t_0,v_0) 是闭集得 $f(x_0,t_0)\in\varepsilon_w(t_0,v_0)$，即 $x_0\in E_w(t_0,v_0)$，与 $x_0\not\subset V$ 矛盾．

2）任取 $x_0\in E(t_0,v_0)$，根据下半连续的定义，我们要证明 $T_1\times V$ 中任意收敛到 (t_0,v_0) 的网 $\{(t_\alpha,v_\alpha)\}$，存在 $x_\alpha\in E(t_\alpha,v_\alpha)$ 使得 $x_\alpha\to x_0$，由 $\varepsilon(\tilde{Y}(t),K(v))$ 和 $E(t,v)$ 的定义知 $y_0=f(x_0,t_0)\in E(t_0,v_0)$，由于 ε^{tv} 在点 (t_0,v_0) 处是下半连续的，从而存在 $y_\alpha\in\varepsilon(\tilde{Y}(t_\alpha),K(v_\alpha))$ 使得 $\{y_\alpha\}$ 收敛于 y_0，再由 $E(t,v)$ 的定义知存在 $x_\alpha\in E(t_\alpha,v_\alpha)$ 使得 $y_\alpha=f(x_\alpha,t_\alpha)$，因 $\tilde{X}(t)$ 是非空闭集，$X_1\subset X$ 是紧集，则 $\{x_\alpha\}$ 有聚点 $\bar{x}$，由 $\tilde{X}(t)$ 在 t_0 处上半连续和 X_1 是闭集知 $\bar{x}\in\tilde{X}(t_0)$，由于 f 在 $\tilde{X}(t_0)\times T_1$ 上连续，故 $f(x_0,t)=f(\bar{x},t)$，又 $f(\cdot,t)$ 在 $\tilde{X}(t)$ 上是一对一的，所以 $x_0=\bar{x}$，于是 $\bar{x}$ 是 $\{x_\alpha\}$ 的唯一聚点，因而 $\{x_\alpha\}$ 收敛到 x_0．即 E 在点 (t_0,v_0) 处是下半连续的．

定理 5　设 $T_1\subset T,X_1\subset X$，$S_1\subset S$ 是紧集，$\tilde{X}(t)\subset X_1(t\in T)$ 是非空集合．f 在 $X_1\times T_1$ 上是连续的，集值映射 $\tilde{Y}$ 在点 $t_0\in T_1$ 附近是一致紧的．$K(v)\subset \mathrm{Y}\ (v\in S_1)$ 是内部非空的尖闭凸锥，K^v 在点 v_0 处满足假设（II）．若集值映射 D 在点 t_0 处是连续的且满足假设（I），g 在 X 上是连续的，且对每一个 $t\in T_1$ 有 $cl(S-\operatorname{int}\tilde{X}(t))=\tilde{X}(t)$．

1）若 K^v 在点 v_0 处是下半连续的，则 E_w 在点 (t_0,v_0) 处是上半连续的．

2）若 K^v 在点 v_0 处是下半连续的，且 $\tilde{Y}(t_0)$ 关于 $K(v_0)-$ 严格凸的．则 E 在点 (t_0,v_0) 处是上半连续的．

证明：1）由所给条件，由定理 2 的 1）知 $\varepsilon_{\mathrm{w}}^{\mathrm{tv}}$ 在点 (t_0,v_0) 处是上半连续的，再由引理 7 的 1）知 E_w 在点 (t_0,v_0) 处是上半连续的．

（2）由所给条件，由定理 2 的 2）知 ε^{tv} 在点 (t_0,v_0) 处是上半连续的，再由引理 7 的 2）知 E 在点 (t_0,v_0) 处是上半连续的．

定理 6　$T_1\subset T,X_1\subset X$，$S_1\subset S$ 是紧集，$\tilde{X}(t)\subset X_1(t\in T_1)$ 是非空集合．$\tilde{X}$ 在点 $t_0\in T_1$ 附近是一致紧的，f 在 $X_1\times T_1$ 上是连续的，集值映射 $\tilde{Y}$ 在点 $t_0\in T_1$ 附近是一致紧的．$K(v)\subset \mathrm{Y}\ (v\in S_1)$ 是内部非空的尖闭凸锥，K^v 在点 v_0 处是下半连续的且在点 v_0 处满足假设（II）．若集值映射 D 在点 t_0 处是连续的且满足假设（I），g 在 X 上是连续的且对每一个 $t\in T_1$

有 $cl(S-\operatorname{int}\tilde{X}(t))=\tilde{X}(t)$， $f(\cdot,t)$ 在 $\tilde{X}(t)$ 上是一对一的.

1）若对于 (t_0,v_0) 附近的任一 (t,v)， $\varepsilon(\tilde{Y}(t),K(v))$ 关于 $\tilde{Y}(t)$ 是 $K(v)-$外稳定的，即有 $\tilde{Y}(t)\subset\varepsilon^{tv}(\tilde{Y}(t),K(v))+K(v)$. 则 E 在点 (t_0,v_0) 处是下半连续的.

2）若对于 (t_0,v_0) 附近的任一 (t,v)，$\varepsilon_w(\tilde{Y}(t),K(v))$ 关于 $\tilde{Y}(t)$ 是 $K'(v)-$外稳定的. 则 E_w 在点 (t_0,v_0) 处是下半连续的.

证明：1）由题中所给条件，由定理 3 的 1）知 ε^{tv} 在点 (t_0,v_0) 处是下半连续的. 又 $\tilde{X}$ 在点 $t_0\in T_1$ 附近是一致紧的， $f(\cdot,t)$ 在 $\tilde{X}(t)$ 上是一对一的，由引理 7 的 2）知 E 在点 (t_0,v_0) 处是下半连续的.

2）由题中所给条件，由定理 3 的 2）知 ε_w^{tv} 在点 (t_0,v_0) 处是下半连续的. 又 $\tilde{X}$ 在点 $t_0\in T_1$ 附近是一致紧的，$f(\cdot,t)$ 在 $\tilde{X}(t)$ 上是一对一的，由引理 7 的 2）知 E_w 在点 (t_0,v_0) 处是下半连续的.

参考文献

[1] Naccache P H. Stability in Multicriteria Optimization [J]. Journal of Mathematics Analysis and Applications, 1979, 68: 441-453.

[2] Tanino T, Sawaragi Y. Stability of Nondominated Solutions in Multicriteria Decision-Making [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1980, 30(2): 229-253.

[3] 徐士英. 关于集值映照优化解得稳定性[J]. 系统科学与数学, 1995, 15(2): 138-145.

[4] 周轩伟. 约束锥扰动多目标规划锥有效解集的闭性和半连续性[J]. 系统科学与数学, 2003, 23(4): 441-451.

[5] 胡毓达. Banach 空间双扰动多目标规划的稳定性[J]. 自然科学进展, 1996, (4): 543-548.

Closedness and Semicontinuity of Cone Efficient Solution Sets for Multiobjective Programming under Two Perturbations

LI Sihai, ZHOU Xuanwei, LIU Peng

(College of Mathematics and Information science, Wenzhou University, Wenzhou, China　325035)

Abstract: The closedness and semicontinutiy for the cone efficient points and the cone weakly efficient points in perturbation of topological vector space’s restraint cone and control cone were studied. On this basis, the closedness and semicontinuity for the cone efficient solutions set and the cone weakly efficient solutions set of multiobjective programming problem under two perturbations are obtained.

Key words: Multiobjective Programming; Cone Efficient Point; Cone Efficient Solution; Semicontinuity; Closedness

（编辑：王一芳）