# 具密度依赖和生育脉冲的单种群阶段结构模型

杜明银，柴 瑜，雒志学

（兰州交通大学数理与软件工程学院，甘肃兰州 730070）

**摘 要**：给出了具有密度依赖和生育脉冲的单种群阶段结构模型，通过研究其对应的离散系统，得到周期解及其稳定性的阈值．当系统的参数超过阈值，系统存在一系列的分支并最终走向混沌．

**关键词**：密度依赖；生育脉冲；单种群；阈值；周期解

**中图分类号**：O175.1 **文献标志码**：A **文章编号**：1674-3563(2009)02-0011-05

**DOI**：10.3875/j.issn.1674-3563.2009.02.03 本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

物种的增长有一个过程，从出生到成熟会经历不同阶段，在各个生命阶段物种的生理机能（出生率、死亡率、扩散能力、捕食能力等）差别比较显著．近年来，诸多学者对种群的阶段结构模型进行了研究[1-6]，这些模型大多是假设成年种群出生率为连续的微分方程，例如在文献[3]中，假设成年种群 $x_m(t)$连续．事实上很多种群的出生是具有季节性或瞬时性的，若种群数量较少，或种群在某一特定的时间内，用差分方程来描述该种群的生长更为真实和精确．本文采用 Beverton-Holt 函数为密度依赖函数，运用与文献[4]和[5]类似的方法，对具有密度依赖和脉冲生育的单种群阶段结构差分模型的动力学行为进行研究，对文献[4]和[5]的结论做了进一步推广．

## 1 具有阶段结构的单种群离散模型

设种群 $N_n$ 分为幼年 $x_n$ 和成年 $y_n$ 两类，即 $N_n = x_n + y_n$，且只有成年种群具生育能力；$\delta > 0$ 为幼年存活到成年的成熟率；$d_1 > 0$，$d_2 > 0$ 分别为幼年和成年种群的死亡率．文献[5]采用生育函数 $B(N) = b(1 - rN)^{\frac{1}{r}}$，$b > 0$，$r < 0$，给出如下阶段结构脉冲模型：

$$\begin{cases} x'(t) = -d_1 x(t) - \delta x(t) \\ y'(t) = \delta x(t) - d_2 y(t) \\ x(m^+) = x(m^-) + b[1 - r(x(m^-) + y(m^-))]^{\frac{1}{r}} y(m^-), \quad t = m \end{cases} \tag{1}$$

其中，$m$ 为正整数．

模型（1）所对应的差分方程为：

收稿日期：2008-06-27

基金项目：国家自然科学基金(604730304)；兰州交通大学“青蓝”人才工程基金(QL-05-18A)

作者简介：杜明银(1980- )，男，河南濮阳人，硕士研究生，研究方向：生物数学

$$\begin{cases} x_{m+1} = x_m e^{-(d_1+\delta)} + b(1-r\Delta)^{\frac{1}{r}} e^{-d_2}[y_m - \dfrac{\delta x_m}{d_2-d_1-\delta}(1-e^{(d_2-d_1-\delta)})] \\ y_{m+1} = e^{-d_2}[y_m - \dfrac{\delta x_m}{d_2-d_1-\delta}(1-e^{(d_2-d_1-\delta)})] \end{cases} \tag{2}$$

其中，$\Delta = (e^{-(d_1+\delta)} - \dfrac{\delta e^{-d_2}}{d_2-d_1-\delta}(1-e^{(d_2-d_1-\delta)}))x_m + y_m e^{-d_2}$ .

具脉冲的阶段结构模型的性质可由其所对应的差分方程模型来确定，即它们是等价的[4-5]. 本文建立如下差分模型：

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{by_n}{c+N_n} + \alpha x_n \\ y_{n+1} = \delta x_n + \beta y_n \end{cases}, \ n \in Z^+ \tag{3}$$

其中，$\alpha = 1-d_1-\delta$，$\beta = 1-d_2$，生育函数为 $B(N_n) = \dfrac{by_n}{c+N_n}$[6].

易知 $E_0(0,0)$ 为系统（3）的平凡平衡点，当 $R_0' = \dfrac{b\delta}{c(1-\alpha)(1-\beta)} > 1$ 时，存在正平衡点 $E(x^*, y^*)$，其中

$$x^* = \frac{c(1-\beta)(R_0'-1)}{1-\beta+\delta}, \quad y^* = \frac{c\delta(R_0'-1)}{1-\beta+\delta}.$$

由文献[4]和[5]易知：

定理 1 若 $R_0' < 1$，则 $E_0$ 是全局渐进稳定的；若 $R_0' > 1$，则正平衡点 $E$ 是全局渐进稳定的. $R_0'$ 为种群内禀再生数，表示一个成年个体在生命周期内出生的能存活进入成年阶段的新个体数量的平均数.

## 2 具有阶段结构和生育脉冲的单种群离散模型

模型(3)假设成年种群的生育是连续的. 事实上很多种群的出生通常是瞬时的、周期性的. 于是本文建立了以下更加符合实际的生育脉冲阶段结构模型：

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n & \\ y_{n+1} = \delta x_n + \beta y_n & n \in Z^+ \\ x_{k\omega}^* = x_{k\omega} + \dfrac{by_{k\omega}}{c+(x_{k\omega}+y_{k\omega})} & k \in Z^+ \end{cases} \tag{4}$$

其中，$0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ .

系统（4）的频闪映射为：

$$\begin{cases} x_{(k+1)\omega}=\overline{x}_{k\omega}+\dfrac{b\overline{y}_{k\omega}}{c+(\overline{x}_{k\omega}+\overline{y}_{k\omega})} \\ y_{(k+1)\omega}=\overline{y}_{k\omega} \end{cases} \tag{5}$$

令 $u_k=x_{k\omega}$， $v_k=y_{k\omega}$，则（5）化为：

$$\begin{cases} u_{k+1}=ru_p+\dfrac{b(pu_k+qv_k)}{c+[(r+p)u_k+qv_k]} \\ v_{k+1}=pu_k+qv_k \end{cases} \tag{6}$$

其中， $r=\alpha^{\omega}$， $p=\delta\dfrac{\alpha^{\omega}-\beta^{\omega}}{\alpha-\beta}$， $q=\beta^{\omega}$ .

易知系统（6）存在平凡平衡点 $E_0(0,0)$ . 若 $R_0=\dfrac{bp}{c(1-r)(1-p)}>1$，则存在一个正平衡点 $E^*(u^*,v^*)$，其中

$$u^*=\frac{c(1-q)(R_0-1)}{r(1-q)+p}，\quad v^*=\frac{cp(R_0-1)}{r(1-q)+p}.$$

对于差分方程的平衡点的研究，由文献[7]知有以下准则：

假设差分方程（6）的线性系统为 $X_{m+1}=WX_m$，其中 $W$ 为（6）对应 $X=(u,v)^T$ 的线性部分，$W$ 的特征值都小于 1 时，系统（6）的平衡点是稳定的，即当 $W$ 满足下列三个 Jury 条件：

$$1-trW+\det W>0; \tag{7}$$

$$1+trW+\det W>0; \tag{8}$$

$$1-\det W>0. \tag{9}$$

若不等式（7）不成立，则 $W$ 有一个特征值大于 1；若不等式（8）不成立，则 $W$ 有一个特征值小于-1；若不等式（9）不成立，则 $W$ 有一对复共轭特征值在单位圆外.

对于平衡点 $E_0(0,0)$，系统（6）的线性部分为：

$$W=\begin{bmatrix} r+\dfrac{bp}{c} & \dfrac{bq}{c} \\ p & q \end{bmatrix},$$

显然不等式（8）和（9）总是成立的，当 b 增加，不等式（7）在一个临界点 $b_0$ 上不成立，即不等式（7）变为：

$$b<\frac{c(1-r)(1-q)}{p}\doteq b_0. \tag{10}$$

因此 $b$ 必须大于 $b_0$，种群才有可能从 $X=0$ 增加.

对于系统（6）可以定义内禀再生数 $R_0=\dfrac{bp}{c(1-r)(1-q)}$，则（10）变为：$R_0<1$，即：个体在死亡前出生的个体并成活至成年的数量平均数小于 1 时种群将灭绝.

对于平衡点 $E^*(u^*,v^*)$，系统（6）的线性部分为：

$$W=\begin{bmatrix} 1-q+qr-\dfrac{u^*(1-r)(r+p)}{c+(ru^*+v^*)} & \dfrac{q(1-r)(1-q)}{p}-\dfrac{qu^*(1-r)}{c+(ru^*+v^*)} \\ p & q \end{bmatrix},$$

故有 $trW=1+qr-\dfrac{u^*(1-r)(r+p)}{c+(ru^*+v^*)}$，$\det W=qr-\dfrac{qru^*(1-r)}{c+(ru^*+v^*)}$.

易知，对平衡点 $E^*(u^*,v^*)$，不等式（7)，(9）总是成立的. 要使不等式（8）成立，即要使不等式

$$2(1+qr)-\frac{mpqu^*(1-r)}{c+(ru^*+v^*)}>0$$

即

$$2(1+qr)-\frac{(1-r)(r+p+qr)(R_0-1)}{(r+p-qr)R_0}>0$$

成立，故可以得到：

$$b<\frac{c(1-r)^2(1-q)(r+p+qr)}{p(1-r)(r+p+qr)-2(1+qr)(r+p-qr)}\doteq b_c\,.$$

故当 $b$ 增加时，不等式（8）在临界点 $b_c$ 不成立.

综合上述讨论可知：

定理 2　当 $b=b_0$（即 $R_0=1$）时，正平衡点 $E^*$ 退化为 $E_0(0,0)$，因此当 $b$ 增加通过 $b_0$ 时，$E^*$ 经过平衡点 $E_0$ 并与之交换稳定性，此时发生了一个跨临界分支，随着 $b$ 的进一步增加，正平衡点 $E^*$ 保持稳定直到下一个临界值 $b=b_c$.

定理 3　当 $b$ 增加时正平衡点 $E^*$ 的稳定性将会失去. 在临界值 $b_c(b>b_c)$ 处一个周期倍增的分支发生，平衡点 $E^*$ 的稳定性失去而出现一个稳定的两点环.

为了使一个种群逃避灭绝的危险，参数 $b$ 必须大于 $b_0$，即 $R_0>1$. 因此当一个成年个体在其生命周期内繁殖的新生个体能成活到成年阶段的平均数大于 1 时，系统是持久的.

**参考文献**


[1] Aiello W G, Freedman H I. A Time Delay of Single-species Growth with Stage Structure [J]. Math Biosci, 1990, 101: 139-153.

[2] Aiello W G, Freedman H I. Wu J. Analysis of a Model Representing Stage Structured Population Growth with State-Dependent Time Delay [J]. Siam Appl Math, 1990, 52: 855-869.

[3] 耿春梅, 甘文珍, 周桦. 一类具有阶段结构的捕食模型的稳定性[J]. 扬州大学学报: 自然科学版, 2006, 9(1): 9-14.

[4] 张树文, 陈兰荪. 具有密度依赖的生育脉冲单种群阶段结构模型[J]. 系统科学与数学, 2006, 26(6): 752-760.

[5] 于书敏. 单种群阶段结构的生育脉冲模型[J]. 数学的实践与认识, 2006, 36(4): 23-28.
[6] 陆征一, 周义仓. 数学生物学进展[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 131-171.
[7] 王联, 王慕秋. 常差分方程[M]. 乌鲁木齐: 新疆大学出版社, 1991: 28-81.

# Stage-structured Model of a Single-species with Density-dependent and Birth Pulses

DU Mingyin, CHAI Yu, LUO Zhixue
(College of Mathematics, Physics and Software Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou, China 730070)

**Abstract:** A stage-structured mathematical model of a single-species with density-dependent and birth pulses was proposed. We obtained exact periodic solutions of the system with birth pulses and threshold for stability of periodic solutions by studying the corresponding discrete dynamical system. When the parameter of the system exceeds the threshold, there is a characteristic sequence of bifurcations, leading to chaos.

**Key words:** Density-dependence; Birth pulse; Single-species; Threshold value; Periodic solution

(编辑：王一芳)