

一类混沌系统的自适应混合投影同步研究

杨丽新, 何万生, 冯国平, 刘晓君

(天水师范学院数学与统计学院, 甘肃天水 741001)

摘要: 以 LFRBM 系统和超混沌 Lü 系统为例, 基于 Lyapunov 稳定性理论, 采用非线性反馈控制方法, 通过设计合适的控制器, 对混沌系统的自适应混合投影同步问题进行了研究. 理论分析证明该控制器可以使一类自治混沌系统达到自适应混合投影同步, 数值仿真证明该控制方法是有效的.

关键词: 混合投影同步; LFRBM 系统; 超混沌 Lü 系统; Lyapunov 稳定性理论; 控制器

中图分类号: O415.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-3563(2009)02-0016-07

DOI: 10.3875/j.issn.1674-3563.2009.02.04 本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

自从1990年Pecora和Carroll^[1]提出混沌同步方法以来, 混沌同步的研究及其应用受到广泛关注. 人们先后提出了一系列有效的混沌同步方法, 例如耦合控制法、基于状态观测器的同步方法、广义同步法等^[2-7]. 1999年Mainieri和Rehacek^[8]提出了一种新的混沌同步类型, 通过选取一个适当的 α 取值范围来实现响应系统和驱动系统之间的同步. 最近Wen等^[9]提出了混合投影同步FSHPS (full-state hybrid projective synchronization), 即在研究的系统中, 通过参数 α 的任意选取来实现系统的同步. 目前, 对FSHPS方面的研究尚少, 有待于更为深入的研究.

目前, 大多数混沌同步理论都是针对模型确定、参数已知的系统, 但是实际系统的参数往往并不已知, 因此研究参数不确定的混沌系统的混合投影同步十分重要. 本文针对参数不确定的一类混沌和超混沌系统, 基于 Lyapunov 稳定性理论, 提出一种改进的自适应投影同步方案. 以 LFRBM 系统和超混沌 Lü 系统为例进行研究.

1 自适应的混合投影同步原理

考虑 n 维非线性动力学系统:

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\Lambda \quad (1)$$

$x \in R^n$ 是系统的状态变量, $f: R^n \rightarrow R^n$ 是连续的向量函数, $F: R^n \rightarrow R^{n \times d}$ 是矩阵函数, $\Lambda \in R^d$ 是系统的参数向量. 把系统 (1) 看作是驱动系统, 则响应系统可描述如下:

$$\dot{y} = g(y) + G(Y)\Theta + U \quad (2)$$

$y \in R^n$ 是状态变量, $g: R^n \rightarrow R^n$ 是连续的向量函数, $\Theta \in R^k$ 是系统的参数向量, $U \in R^n$ 是控制器. 设误差向量为: $e(t) = y(t) - Hx(t)$, H 是一个 n 阶对角矩阵, $H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$,

收稿日期: 2008-08-30

基金项目: 天水师范学院基金项目(TSB0818)

作者简介: 杨丽新(1980-), 女, 甘肃定西人, 助教, 硕士, 研究方向: 非线性控制

则驱动系统和响应系统的误差系统为：

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{y} - H\dot{x} = g(y) + G(y)\Theta - Hf(x) - HF(x)\Lambda + U \\ &= R(e, x) + G(e, x)\Theta - HF(x)\Lambda + U\end{aligned}\quad (3)$$

其中， $R(e, x) = g(e + Hx) - Hf(x)$ 。

本文的目标是设计一个控制器，能够在任意给定标度因子 h_i 下，实现驱动系统和响应系统同步。

假设系统的参数都是未知的，设计如下控制器：

$$U = -Re(x) - G(e, x)\tilde{\Theta} + HF(x)\tilde{\Lambda} + Ae \quad (4)$$

其中， $\tilde{\Theta}$ 和 $\tilde{\Lambda}$ 是系统未知参数 Θ 和 Λ 的估计值， A 是待选矩阵。把 (4) 式代入 (3) 式得误差系统为：

$$\dot{e} = Ae + HF(x)(\tilde{\Lambda} - \Lambda) + G(e, x)(\tilde{\Theta} - \Theta) \quad (5)$$

因此自适应的混合投影同步问题转化为系统 (5) 的稳定性问题，如果系统 (5) 在初始值条件下是稳定的，则驱动系统 (1) 和响应系统 (2) 实现了混合投影同步。

设计如下的参数自适应控制律：

$$\dot{\tilde{\Theta}} = -G^T(e, x)e, \quad \dot{\tilde{\Lambda}} = -F^T(x)He \quad (6)$$

然后构造一个 Lyapunov 函数：

$$V = \frac{1}{2}(e^T e + \hat{\Theta}^T \hat{\Theta} + \hat{\Lambda}^T \hat{\Lambda})$$

其中 $\hat{\Theta} = \tilde{\Theta} - \Theta$ ， $\hat{\Lambda} = \tilde{\Lambda} - \Lambda$ ，则 $\frac{dV}{dt} = e^T \dot{e} + \dot{\hat{\Theta}}^T \hat{\Theta} + \dot{\hat{\Lambda}}^T \hat{\Lambda} = e^T Ae$ 。

如果选择一个合适的矩阵 A ，使得 $\frac{dV}{dt} < 0$ ，根据 Lyapunov 稳定性理论，系统 (1) 和 (2) 在反馈控制器 (4) 和参数自适应控制律 (6) 的作用下可以实现自适应的混合投影同步。

2 LFRBM 混沌系统的自适应的混合投影同步

2.1 LFRBM 系统的描述

LFRBM 系统是由线性反馈变化后的欧拉刚体方程经化简所得的一个三元二次微分系统。其数学模型为^[9]：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0.4x_1 + x_2 + 10x_2x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 0.4x_2 + 5x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = ax_3 - 5x_1x_2 \end{cases} \quad (7)$$

其中， $X = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3$ 为系统的状态变量， a 为系统的参数。

LFRBM 系统对参数 a 的取值是及其敏感的，当 $a = 0.175$ 时，Lyapunov 指数为 $\lambda = 0.1421, 0, -0.7671$ ，此时系统呈现混沌态，它能产生两个奇怪吸引子，吸引子的轨道与初值点的位置有关。当初值点是 $(0.349, 0, -0.16)$ 时，得混沌吸引子如图 1(a) 所示；当初值点取 $(0.349, 0, -0.18)$ 时，得混沌吸引子如图 1(b) 所示。

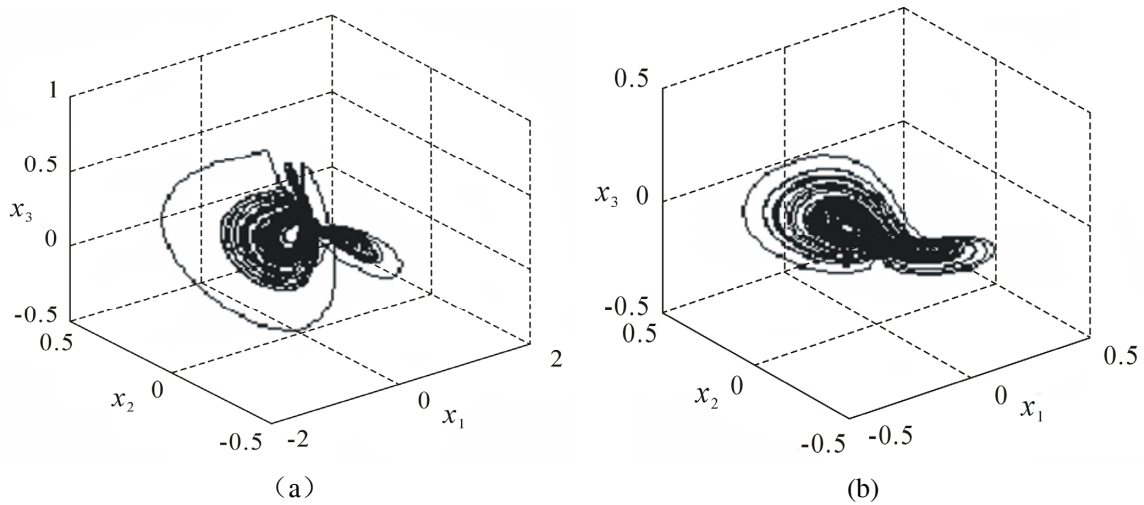


图1 LFRBM 混沌系统的不同吸引子

Fig 1 Different Attractors of LFRBM System

2.2 LFRBM 混沌系统的自适应的混合投影同步

设系统(7)为驱动系统,则受控的响应系统有如下表示:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -0.4y_1 + y_2 + 10y_2y_3 + u_1 \\ \dot{y}_2 = -y_1 - 0.4y_2 + 5y_1y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = ay_3 - 5y_1y_2 + u_3 \end{cases} \quad (8)$$

a 是系统的位置参数, u_1, u_2, u_3 为系统同步控制变量. 设响应系统(8)和驱动系统(7)之间的状态误差为 $e_1 = y_1 - h_1x_1$, $e_2 = y_2 - h_2x_2$, $e_3 = y_3 - h_3x_3$, 其中 $h_i (i=1,2,3,4)$ 是标度因子. 根据式(1), 系统(7)可写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4x_1 + x_2 + 10x_2x_3 \\ -x_1 - 0.4x_2 + 5x_1x_3 \\ -5x_1x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

响应系统(8)可写成:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4y_1 + y_2 + 10y_2y_3 \\ -y_1 - 0.4y_2 + 5y_1y_3 \\ -5y_1y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ y_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

选取矩阵 $A = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$, 根据(4)和(6)得到如下控制器和参数自适应控制律:

$$\begin{cases} u_1 = 0.4y_1 + y_2 + 10y_2y_3 + h_1(-0.4x_1 + x_2 + 10y_2y_3) - e_1 \\ u_2 = y_1 + 0.4y_2 - 5y_1y_3 + h_2(-x_1 - 0.4x_2 + 5x_1x_3) - e_2 \\ u_3 = 5y_1y_2 - 5h_3x_1x_2 + (h_3x_3 - y_3)\hat{a} - e_3 \\ \dot{\hat{a}} = (y_3 - h_3x_3)e_3 \end{cases} \quad (9)$$

在计算机仿真中, 参数 $a = 0.175$, 使系统处于混沌态. 驱动系统和响应系统的初始值分别取 $[0.345, 0, -0.18]^T$ 和 $[0.349, 0.25, -0.18]^T$, 仿真图分别如图2和图3.

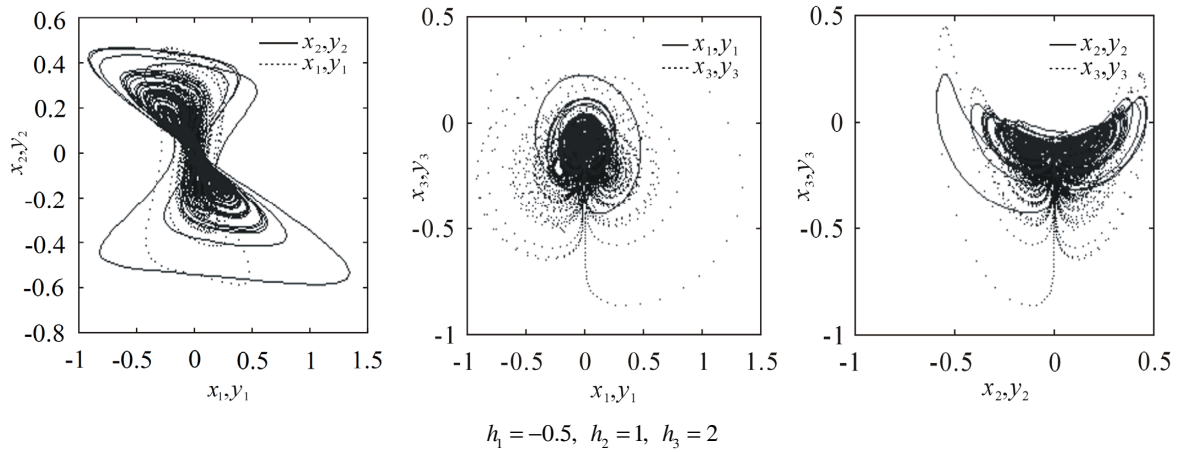


图2 混合投影同步时系统(7)和(8)的相图

Fig 2 Phase Diagrams of System (7) and (8) when Achieving FSHPs

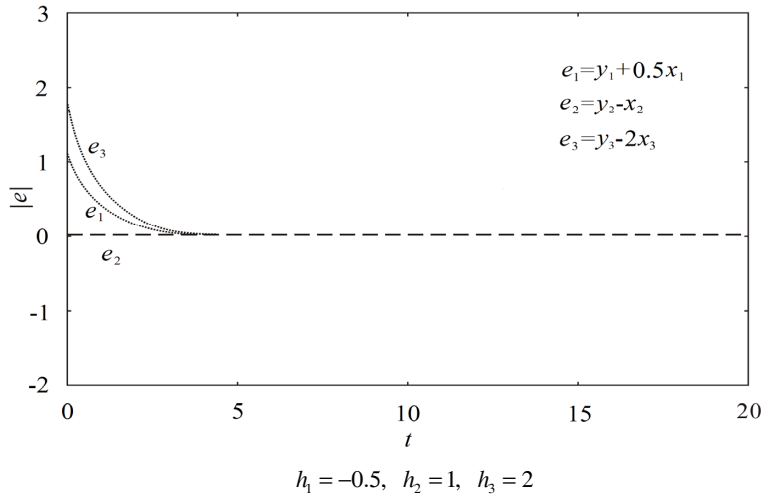


图3 混合投影同步时驱动系统(7)和响应系统(8)的误差曲线

Fig 3 Error Curve of Drive System (7) and Response System (8) when Achieving FSHPs

3 超混沌 Lü 系统的自适应的混合投影同步

应用非线性反馈控制方法，结合 Lyapunov 稳定性理论，通过选择合适的控制器，对参数未知的两个超混沌系统之间的 FSHPs 问题进行研究。设系统 (10) 为驱动系统，式 (11) 为受控响应系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a(x_2 - x_1) + x_4 \\ \dot{x}_2(t) = bx_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3(t) = -cx_3 + x_1x_2 \\ \dot{x}_4(t) = dx_4 + x_1x_3 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = a(y_2 - y_1) + y_4 + u_1 \\ \dot{y}_2(t) = by_2 - y_1y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3(t) = -cy_3 + y_1y_2 + u_3 \\ \dot{y}_4(t) = dy_4 + y_1y_3 + u_4 \end{cases} \quad (11)$$

其中 a, b, c 和 d 是系统的未知参数, u_1, u_2, u_3, u_4 为系统同步控制变量. 设响应系统(10)和驱动系统(11)之间的状态误差为 $e_1 = y_1 - h_1 x_1, e_2 = y_2 - h_2 x_2, e_3 = y_3 - h_3 x_3, e_4 = y_4 - h_4 x_4$, 其中 $h_i (i=1,2,3,4)$ 是标度因子.

根据式(1)式, 系统(10)可写成如下的形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

响应系统(11)可写成:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_4 \\ -y_1 y_3 \\ y_1 y_2 \\ y_1 y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

则误差系统如下:

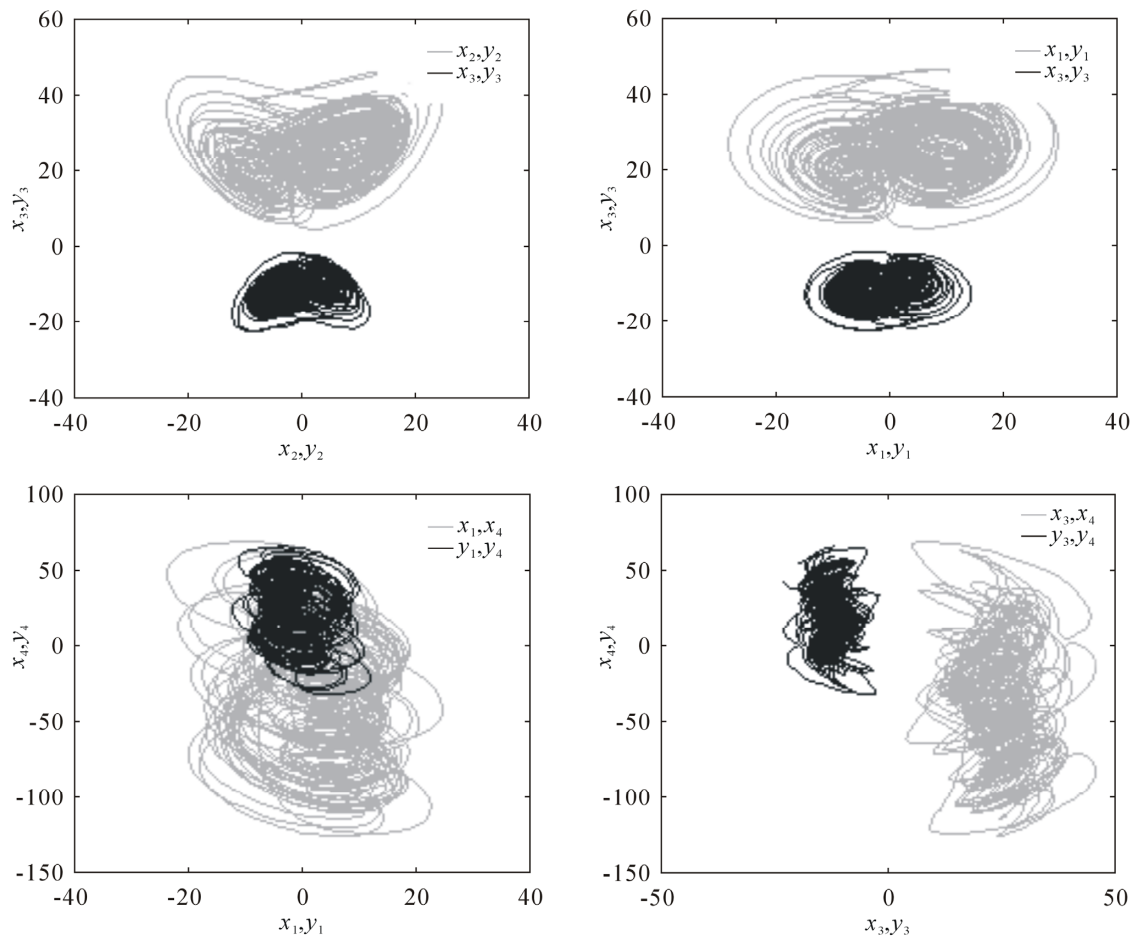
$$\begin{cases} e_1 = y_1 - h_1 x_1 \\ e_2 = y_2 - h_2 x_2 \\ e_3 = y_3 - h_3 x_3 \\ e_4 = y_4 - h_4 x_4 \end{cases}$$

$h_i (i=1,2,3,4)$ 是标度因子.

选取矩阵: $A = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$, 根据(4)和(6), 得到如下控制器和参数自适应控制律:

$$\begin{cases} u_1(t) = a(e_2 - e_1) - e_4 - e_1 \\ u_2(t) = -be_2 + y_1 y_3 - h_2 x_1 x_3 - e_2 \\ u_3(t) = ce_3 - y_1 y_2 + h_3 x_1 x_2 - e_3 \\ u_4(t) = -de_4 - y_1 y_3 + h_4 x_1 x_3 - e_4 \\ \dot{\hat{a}} = (e_1 - e_2)e_1 \\ \dot{\hat{b}} = -e_2^2 \\ \dot{\hat{c}} = -e_3^2 \\ \dot{\hat{d}} = e_4^2 \end{cases}$$

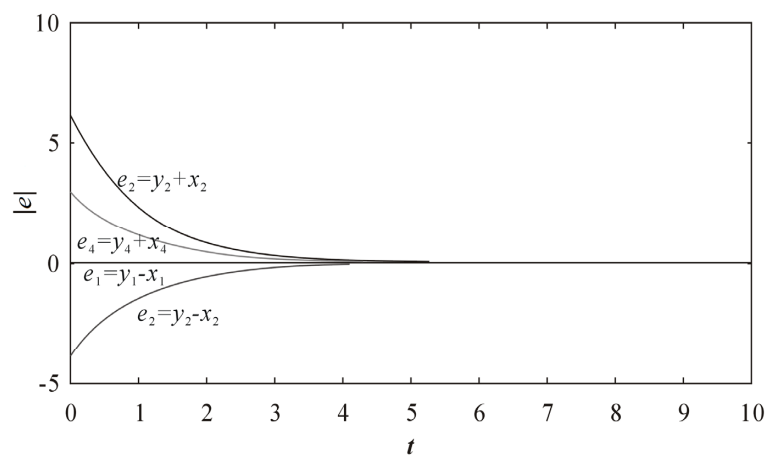
在计算机仿真中, 取参数 $a=36, b=20, c=3, d=1.3$ 使系统处于混沌态. 驱动系统和响应系统的初始值分别取 $[0, 1.5, 4, 0.2]^T$ 和 $[1, 2, 0.5, 0.8]^T$, 仿真图如图4和图5.



$$h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = -1, h_4 = -1$$

图 4 混合投影同步时系统(10)和(11)的相图

Fig 4 Phase Diagrams of System (10) and (11) when Achieving FSHP



$$h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = -1, h_4 = -1$$

图 5 混合投影同步时驱动系统(10)和响应系统(11)差曲线

Fig 5 Error Curve of Drive System (10) and Response System (11) when Achieving FSHP

4 结 论

本文研究了参数未知的混沌系统的自适应混合投影同步. 基于 Lyapunov 稳定性理论, 设计了不同的控制器和参数自适应控制律, 分别实现了 LFRBM 系统和超混沌 Lü 系统的自适应混合投影同步. 应用本文所给的同步方案, 系统可以自主地选择同步所需要的参数范围, 因此该类同步具有更加广泛的应用前景.

参考文献

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64: 821-825.
- [2] Jiang G P, Tang W, Chen G R. A simple global synchronization criterion for coupled chaotic systems [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, 15: 925-935.
- [3] 陈志盛, 孙克辉, 张泰山. Liu 混沌系统的非线性反馈同步控制[J]. 物理学报, 2005, 54(6): 2580-2583.
- [4] 陈保颖. 线性反馈实现Liu系统的混沌同步[J]. 动力学与控制学报, 2006, (4): 1-4.
- [5] Chen H K. Chaos and chaos synchronization of a symmetric gyro with linear-plus-cubic damping [J]. J Sound Vib, 2002, 255: 719-740.
- [6] Chen H K, Ge Z M. Bifurcations and chaos of a two-degree-of-freedom dissipative gyroscope [J]. Chaos Solitons Fractals, 2005, 24: 125-136.
- [7] Leipnik R B, Newton T A. Double strange attractors in rigid body motion with linear feedback control [J]. Physics Letters A, 1981, 86(2): 63-67.
- [8] Mainieri R, Rehacek J. Projective synchronization in three-dimension chaotic systems [J]. Phys Rev Lett, 1999, 82: 3042-5.
- [9] Wen G L, Xu D. Nonlinear observer control for full-state projective synchronization in chaotic continuous-time systems [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2005, 26: 71-77.

Studies of the Adaptive Full State Hybrid Projective Synchronization on Chaotic System

YANG Lixin, HE Wansheng, FENG Guoping, LIU Xiaojun

(School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui, China 741001)

Abstract: The full-state hybrid projective synchronization (FSHPS) was further investigated. Based on Lyapunov stability theory, a right controller can be designed for achieving the adaptive FSHPS of chaotic LFRBM system and hyper-chaotic systems by means of nonlinear feedback control method. Numerical simulations were provided to verify the effectiveness of the proposed scheme.

Keywords: FSHPS; LFRBM system; Hyper-chaotic Lü system; Lyapunov stability theory; Controller

(编辑: 王一芳)