1999 年 10 月
第 29 卷第 5 期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

Oct. 1999
Vol. 29 No. 5

① 99,29(5) 371-374

1999/95135X/029/005

371-462

# 保形分段 $2k+1$ 次多项式插值

康宝生，刘生芝，刘 蓉

(西北大学 数学系，陕西 西安 710069)

O241.3 TP391.72

**摘要**：讨论了数据点集 $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{n}$ 上保形分段 $2k+1$ 次多项式插值，给出构造 $C^m(m\leqslant k)$ 连续的保形分段 $2k+1$ 次多项式插值的方法，并对有拐子区间上拐点的情况进行了讨论。

**关 键 词**：保形；插值；Bernstein 多项式；拐点 多项式插值 保形插值 伯恩斯坦多项式

**中图分类号**：O18；TB115 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-274X(1999)05-0371-04

保形插值在实验数据分析、数值逼近、计算机辅助几何设计中有着广泛的应用，目前在这一领域已取得了大量的研究成果：Brodlie 和 Butt[1] 讨论了保凸的分段三次多项式插值，在每一个子区间至多插入一个内结点，可构造保凸的三次多项式插值；Steven[2] 和 Archer[3] 都提出了一种 $C^2$ 连续的分段三次保形插值方法；文献[4]中构造了 $C^k$ 连续的保形 $2k+1$ 次分段多项式插值函数。本文在文献[4]基础上对保形 $2k+1$ 次分段多项式插值函数的连续性进行了深入地探讨，并对有拐子区间上的插值函数拐点情况进行了讨论。

## 1 预备知识

### 1.1 保形分段 $2k+1$ 次多项式插值定义

对于区间 $[a,b]$ 上的一个划分

$$\triangle: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

$y_i$ 表示节点 $x_i$ 处对应的函数值，记型值点 $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{n}$ 的一阶差商和一阶差商的差分分别为

$$\begin{cases} D_i=\dfrac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}, & i=0,1,\cdots,n-1, \\ \delta_i=D_i-D_{i-1}, & i=1,2,\cdots,n-1。\end{cases} \tag{1}$$

$\delta_0,\delta_n$ 的补充定义见文献[5]。

**定义 1** 如果函数 $S(x)\in C^k[a,b]$，满足条件

(1) 插值性质 $S(x_i)=y_i,\quad i=0,1,\cdots,n$;

(2) 分段性质 $S(x)$ 在每一个子区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上是分段 $2k+1$ 次多项式，且 $S_i(x)$ 至多由两段多项式组成；

(3) 保形性质 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上的拐点个数不多于 $\{\delta_i\}_{i=0}^{n}$ 的变号数，则称 $S(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的保形分段 $2k+1$ 次插值函数，特别当 $\{\delta_i\}_{i=0}^{n}$ 变号数为零，即 $\{x_i,y_i\}_{i=0}^{n}$ 是凸数组，则称 $S(x)$ 是分段 $2k+1$ 次保凸插值函数。

**定义 2** 若 $\delta_i\delta_{i+1}>0$，则称区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 是 $S(x)$ 的无拐子区间，否则称有拐子区间。

构造保形插值多项式 $S(x)$ 的方法为：

(1) 当 $\delta_i\delta_{i+1}>0$ 时，在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上构造一段无拐点的多项式曲线；

(2) 当 $\delta_i\delta_{i+1}<0$ 时，在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上构造一段有惟一拐点的多项式曲线；

(3) 当 $\delta_i\delta_{i+1}=0$ 时，在 $[x_{i-1},x_{i+1}]$ 或 $[x_i,x_{i+2}]$ 或 $[x_{i-1},x_{i+2}]$ 上 $S(x)$ 是一条直线。

**定义 3** 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，称 $n$ 次多项式

$$B_n(f,x)=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{i=0}^{n}f(a+ih)C_n^i(x-a)^i(b-x)^{n-i} \tag{2}$$

为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 $n$ 次 Bernstein 多项式，其中 $h=(b-a)/n$。

Bernstein 多项式具有以下重要性质：

收稿日期：1999-01-08

基金项目：陕西省教委重点科研基金项目(952JK006)；西北大学校内科研基金项目

作者简介：康宝生(1961-)，男，陕西西安人，西北大学副教授，主要从事计算机辅助几何设计、计算机图形学、科学计算可视化等方面的研究。

(1) 端点性质

$$\begin{cases} B_n^{(p)}(f,a) = \\ \quad \dfrac{1}{(b-a)^p}\cdot\dfrac{n!}{(n-p)!}\triangle_h^p f(a), \\ B_n^{(p)}(f,b) = \\ \quad \dfrac{1}{(b-a)^p}\cdot\dfrac{n!}{(n-p)!}\triangle_h^p f[a+(n-p)h]。\end{cases} \quad (3)$$

其中 $\triangle_h^p$ 表示 $p$ 阶向前差分算子，即

$$\triangle_h^p f[a] = \triangle_h^{p-1}f[a+h] - \triangle_h^{p-1}f[a]。$$

(2) 导数降阶公式

$$B_n^{(p)}(f,x) = \frac{n!}{(b-a)^n(n-p)!}\sum_{i=0}^{n-p}C_{n-p}^i(b-x)^{n-i-p}(x-a)^i\triangle_h^p f[a+ih],\quad x\in[a,b]。\quad (4)$$

(3) 线性精度

如果 $f(x)$ 是线性函数，则 $B_n(f,x)=f(x)$。

(4) 保凸性

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上上凸(或下凸)，则 $B_n(f,x)$ 也上凸(或下凸)。

**1.2 $S(x)$ 在型值点处的导数估计**

$S(x)$ 在型值点 $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$ 处的导数一般取

$$S'(x_i) = d_i = t_iD_{i-1} + (1-t_i)D_i,\quad i=1,2,\cdots,n-1, \quad (5)$$

边界导数 $d_0$、$d_n$ 的补充定义参见文献[5]。式中 $0<t_i<1$ 是导数的调节参数，在实际应用中一般取

$$t_i = \frac{h_i}{h_i+h_{i-1}},\quad h_i = x_{i+1}-x_i,\quad i=0,1,2,\cdots,n,$$

这是由三点确定导数的 Bessell 方法[6]，这类导数有较高的逼近精度。

## 2 保形分段 $2k+1$ 次插值多项式的连续性和拐点

保形分段 $2k+1$ 次插值多项式的连续性问题，文献[4]中有这样的结果：保形 $2k+1$ 次多项式函数在连接点处是 $C^k$ 连续的。文献中关于无拐点子区间的情况解决得比较彻底。本文在文献[4]的基础上仅对有拐子区间的连续性和拐点进行了深入地探讨。

为了在有拐子区间上构造具有惟一拐点的插值函数，分两种情况讨论。

**2.1 在 $x_i^+$, $x_{i+1}^-$ 之间不含节点**

当 $\delta_i\delta_{i+1}<0$ 时，$[x_i,x_{i+1}]$ 是有拐子区间，分别过型值点 $(x_i,y_i)$ 和 $(x_{i+1},y_{i+1})$，以斜率 $d_i$、$d_{i+1}$ 作直线 $l_i(x)$、$l_{i+1}(x)$，两直线在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上无交点，因此我们分别在 $l_i(x)$、$l_{i+1}(x)$ 上取两点

$$\begin{cases} x_i^+ = x_i + kh, & y_i^+ = l_i(x_i^+), \\ x_{i+1}^- = x_{i+1} - kh, & y_{i+1}^- = l_{i+1}(x_{i+1}^-)。\end{cases}$$

$l_i^*(x)$ 为连接此两点的直线，其斜率为

$$d_i^* = (2k+1)D_i - k(d_i + d_{i+1})。$$

由 $l_i(x)$、$l_i^*(x)$、$l_{i+1}(x)$ 组成的折线函数为

$$L_i[x] = \begin{cases} l_i(x) = y_i + d_i(x-x_i), [x_i,x_i^+), \\ l_i^*(x) = y_i^+ + d_i^*(x-x_i^+), [x_i^+,x_{i+1}^-), \\ l_{i+1}(x) = y_{i+1} + d_{i+1}(x-x_{i+1}), [x_{i+1}^-,x_{i+1}]。\end{cases} \quad (6)$$

通过 $L_i[x]$ 构造的 $2k+1$ 次 Bernstein 多项式为

$$S(x) = \frac{1}{(x_{i+1}-x_i)^{2k+1}}\sum_{j=0}^{2k+1}B_{j,2k+1}(x)L_i[x_i+jh], \quad (7)$$

其中 $B_{j,2k+1} = C_{2k+1}^j(x_{i+1}-x)^{2k+1-j}(x-x_i)^j$，$h=(x_{i+1}-x_i)/(2k+1)$，那么 $S(x)$ 在 $[x_i,x_{i+1}]$ 内仅有一个拐点。拐点的横坐标为

$$x = \frac{(d_i^*-d_i)x_{i+1} + (d_i^*-d_{i+1})x_i}{(d_i^*-d_i)+(d_i^*-d_{i+1})} \in (x_i,x_{i+1})。$$

又由 Bernstein 多项式的端点性质知

$$S(x_i)=y_i,\quad S(x_{i+1})=y_{i+1},$$
$$S'(x_i)=d_i,\quad S'(x_{i+1})=d_{i+1},$$
$$S^{(r)}(x_i)=S^{(r)}(x_{i+1})=0,\quad r=2,3,\cdots,k。$$

这说明 $S(x)$ 在 $x_i$ 右侧和 $x_{i+1}$ 的左侧是 $C^k$ 连续的。结合区间 $[x_{i-1},x_i]$ 和 $[x_{i+1},x_{i+2}]$ 上曲线的构造，可以使整条曲线在 $x_i$、$x_{i+1}$ 处达到 $C^k$ 连续。

一般地，有以下结论：

**定理1** 设 $[x_i,x_{i+1}]$ 为有拐子区间，$l_i(x)$，$l_{i+1}(x)$ 是分别过 $(x_i,y_i)$、$(x_{i+1},y_{i+1})$ 且斜率分别为 $d_i$、$d_{i+1}$ 的两条直线，在 $l_i(x)$、$l_{i+1}(x)$ 上分别取两点

$$\begin{cases} x_i^+ = x_i + mh, & y_i^+ = l_i(x_i^+), \\ x_{i+1}^- = x_{i+1} - (2k-m)h, & y_{i+1}^- = l_{i+1}(x_{i+1}^-)。\end{cases}$$

$0<m<2k$，$l_i^*(x)$ 是连接此两点的直线，其斜率为

$$d_i^* = (2k+1)D_i - [(2k-m)d_{i+1} + md_i]。$$

由 $l_i(x)$、$l_i^*(x)$、$l_{i+1}(x)$ 组成的折线函数为 $L_i[x]$，形式同式(6)。通过 $L_i[x]$ 构造的 $2k+1$ 次 Bernstein 多项式为 $S(x)$，形式同式(7)。则 $S(x)$ 在 $x_i$ 处 $C^m$ 连续，在 $x_{i+1}$ 处 $C^{2k-m}$ 连续，且有惟一的拐点。拐点横坐标为

$$x = \frac{C_{2k-1}^m(d_{i+1}-d_i^*)x_i + C_{2k-1}^{m-1}(d_i-d_i^*)x_{i+1}}{C_{2k-1}^m(d_{i+1}-d_i^*) + C_{2k-1}^{m-1}(d_i-d_i^*)} \in (x_i,x_{i+1})。$$

**2.2 在 $x_i^+$, $x_{i+1}^-$ 之间包含节点**

在2.1中所取的两点 $x_i^+$、$x_{i+1}^-$ 是相邻的两点。如

果在两点之间包含节点,这时两端点处的连续阶就会受到影响,对于拐点情况是否也会发生变化?下面分两种情况对上述问题加以讨论。

2.2.1　在 $x_i^+, x_{i+1}^-$ 之间包含奇数个节点　如果在 $l_i(x), l_{i+1}(x)$ 上按下述方法取点

$$\begin{cases} x_i^+ = x_i + kh, & y_i^+ = l_i(x_i^+), \\ x_{i+1}^- = x_{i+1} - (k-1)h, & y_{i+1}^- = l_{i+1}(x_{i+1}^-)。\end{cases}$$

过此两点作直线 $l_i^*(x)$,其斜率为

$$d_i^* = \frac{1}{2}[(2k+1)D_i - (k-1)d_{i+1} - kd_i]。$$

仿照 $x_i^+, x_{i+1}^-$ 之间不含节点的情况,同样可构造出形式同式(7)的 $2k+1$ 次 Bernstein 多项式 $S(x)$。由 Bernstein 多项式的端点性质,可知

$$S(x_i) = y_i, \quad S(x_{i+1}) = y_{i+1},$$
$$S'(x_i) = d_i, \quad S'(x_{i+1}) = d_{i+1},$$
$$S^{(p)}(x_i) = 0, \quad p = 2,3,\cdots,k,$$
$$S^{(q)}(x_{i+1}) = 0, \quad q = 2,3,\cdots,k-1,$$

则 $S(x)$ 在 $x_i$ 处 $C^k$ 连续,在 $x_{i+1}$ 处 $C^{k-1}$ 连续。由导数降阶性可知

$$S''(x) = \frac{2k}{(x_{i+1}-x_i)^{2k}}(x_{i+1}-x)^{k-2}(x-x_i)^{k-1}\cdot$$
$$[C_{2k-1}^{k-1}(x_{i+1}-x)^2(d_i^* - d_i) +$$
$$C_{2k-1}^{k+1}(x-x_i)^2(d_{i+1}-d_i^*)]。$$

令 $S''(x)=0$,则有

$$C_{2k-1}^{k-1}(x_{i+1}-x)^2(d_i^*-d_i) +$$
$$C_{2k-1}^{k+1}(x-x_i)^2(d_{i+1}-d_i^*) = 0,$$

整理得

$$\left(\frac{x_{i+1}-x}{x-x_i}\right)^2 = \frac{C_{2k-1}^{k+1}(d_i^*-d_{i+1})}{C_{2k-1}^{k-1}(d_i^*-d_i)} \overset{记}{=} \gamma。$$

因 $d_i^*-d_{i+1}$ 与 $d_i^*-d_i$ 同号,所以 $\gamma>0$。因此

$$\frac{x_{i+1}-x}{x-x_i} = \pm\sqrt{\gamma}。$$

当 $\frac{x_{i+1}-x}{x-x_i} = \sqrt{\gamma}$ 时,

$$x = \frac{x_{i+1}+\sqrt{\gamma}x_i}{1+\sqrt{\gamma}} \in (x_i, x_{i+1}),$$

当 $\frac{x_{i+1}-x}{x-x_i} = -\sqrt{\gamma}$ 时,　若 $\sqrt{\gamma}>1$,则有

$$(\sqrt{\gamma}-1)x = \sqrt{\gamma}x_i - x_{i+1} = (\sqrt{\gamma}-1)x_i +$$
$$x_i - x_{i+1} < (\sqrt{\gamma}-1)x_i。$$

因此,$x<x_i$。若 $0<\sqrt{\gamma}<1$,则有

$$(1-\sqrt{\gamma})x = (1-\sqrt{\gamma})x_{i+1} +$$
$$\sqrt{\gamma}(x_{i+1}-x_i) > (1-\sqrt{\gamma})x_{i+1},$$

故 $x>x_{i+1}$。

由此可知 $S(x)$ 在区间 $(x_i, x_{i+1})$ 之间只有一个拐点,其拐点横坐标为:

$$x = \frac{x_{i+1} + \sqrt{\frac{C_{2k-1}^{k+1}(d_i^*-d_{i+1})}{C_{2k-1}^{k-1}(d_i^*-d_i)}}x_i}{1+\sqrt{\frac{C_{2k-1}^{k+1}(d_i^*-d_{i+1})}{C_{2k-1}^{k-1}(d_i^*-d_i)}}}。$$

一般情况下,有以下结论:

**定理 2**　设 $[x_i, x_{i+1}]$ 为有拐子区间,$l_i(x)$,$l_{i+1}(x)$ 是分别过 $(x_i, y_i)$ 和 $(x_{i+1}, y_{i+1})$ 且斜率分别为 $d_i, d_{i+1}$ 的两条直线,在 $l_i(x), l_{i+1}(x)$ 上分别取两点(中间夹有 $2l-1$ 个节点)

$$\begin{cases} x_i^+ = x_i + mh, \quad y_i^+ = l_i(x_i^+), \\ x_{i+1}^- = x_{i+1} - (2k+1-m-2l)h, \\ y_{i+1}^- = l_{i+1}(x_{i+1}^-)。\end{cases}$$

$l_i^*(x)$ 是连接此两点的直线,其斜率为

$$d_i^* = \frac{1}{2l}[(2k+1)D_i -$$
$$(2k+1-m-2l)d_{i+1} - md_i],$$

由 $l_i(x), l_i^*(x), l_{i+1}(x)$ 组成的折线函数 $L_i[x]$,形式同(6),由 $L_i[x]$ 构造的 $2k+1$ 次 Bernstein 多项式 $S(x)$,形式同(7)。则 $S(x)$ 在 $x_i$ 处 $C^m$ 连续,在 $x_{i+1}$ 处 $C^{2k-m-2l+1}$ 连续,在 $[x_i, x_{i+1}]$ 之间有且仅有一个拐点,且拐点横坐标为

$$x = \frac{x_{i+1} + \sqrt[2l]{\frac{C_{2k-1}^{m+2l-1}(d_i^*-d_{i+1})}{C_{2k-1}^{m-1}(d_i^*-d_i)}}x_i}{1+\sqrt[2l]{\frac{C_{2k-1}^{m+2l-1}(d_i^*-d_{i+1})}{C_{2k-1}^{m-1}(d_i^*-d_i)}}}。$$

证明过程参见文献[5]。

2.2.2　在 $x_i^+, x_{i+1}^-$ 之间有偶数个节点　如果在直线 $l_i(x), l_{i+1}(x)$ 上分别取两点

$$\begin{cases} x_i^+ = x_i + (k-1)h, & y_i^+ = l_i(x_i^+), \\ x_{i+1}^- = x_{i+1} - (k-1)h, & y_{i+1}^- = l_{i+1}(x_{i+1}^-)。\end{cases}$$

连接此两点的直线记为 $l_i^*(x)$,其斜率为

$$d_i^* = \frac{1}{3}[(2k+1)D_i - (k-1)(d_i + d_{i+1})]。$$

仿照前面的方法,可构造出一个形如(7)的 $2k+1$ 次 Bernstein 多项式 $S(x)$。由 Bernstein 多项式的端点性质可知

$$S(x_i) = y_i, \quad S(x_{i+1}) = y_{i+1},$$
$$S'(x_i) = d_i, \quad S'(x_{i+1}) = d_{i+1},$$
$$S^{(r)}(x_i) = S^{(r)}(x_{i+1}) = 0, \quad r = 2,3,\cdots,k-1。$$

这表明在 $x_i$ 和 $x_{i+1}$ 处可达到 $C^{k-1}$ 连续。而

$$S''(x) = \frac{2k}{(x_{i+1}-x_i)^{2k}}C_{2k-1}^{k+1}(x_{i+1}-x)^{k-2}(x-x_i)^{k-2}\cdot$$
$$[(x_{i+1}-x)^3(d_i^*-d_i) + (x-x_i)^3(d_{i+1}-d_i^*)],$$

令 $S''(x)=0$,则有

$$\left(\frac{x_{i+1}-x}{x-x_i}\right)^3=\frac{d_i^*-d_{i+1}}{d_i^*-d_i}\overset{\text{记}}{=}\sigma。$$

因 $d_i^*-d_{i+1}$ 和 $d_i^*-d_i$ 同号,所以 $\sigma>0$。因此

$\frac{x_{i+1}-x}{x-x_i}=\sqrt[3]{\sigma}$,即

$$x=\frac{x_{i+1}+\sqrt[3]{\sigma}x_i}{1+\sqrt[3]{\sigma}}\in(x_i,x_{i+1})。$$

故 $S(x)$ 在 $(x_i,x_{i+1})$ 之间有惟一的拐点,其拐点横坐标为

$$x=\frac{\sqrt[3]{d_i^*-d_{i+1}}x_i+\sqrt[3]{d_i^*-d_i}x_{i+1}}{\sqrt[3]{d_i^*-d_{i+1}}+\sqrt[3]{d_i^*-d_i}}。$$

一般情况下有以下结论:

**定理 3** 设 $[x_i,x_{i+1}]$ 为有拐子区间,$l_i(x)$,$l_{i+1}(x)$ 是分别过 $(x_i,y_i)$,$(x_{i+1},y_{i+1})$ 且斜率分别为 $d_i$,$d_{i+1}$ 的两条直线,在 $l_i(x)$,$l_{i+1}(x)$ 上分别取两点(中间夹有 $2l$ 个节点)

$$\begin{cases}x_i^+=x_i+mh, & y_i^+=l_i(x_i^+),\\ x_{i+1}^-=x_{i+1}-(2k-m-2l)h, & \\ y_{i+1}^-=l_{i+1}(x_{i+1}^-)。 & \end{cases}$$

$l_i^*(x)$ 是连接此两点的直线,其斜率为 $d_i^*$,由 $l_i(x)$,$l_i^*(x)$,$l_{i+1}(x)$ 组成的折线函数 $L_i[x]$ 形式同(6),$S(x)$ 是由 $L_i[x]$ 构造的 $2k+1$ 次 Bernstein 多项式,形式同(7)。由此,$S(x)$ 在 $x_i$ 处 $C^m$ 连续,在 $x_{i+1}$ 处 $C^{2k-m-2l}$ 连续,且在 $[x_i,x_{i+1}]$ 之间有且仅有一个拐点。其拐点横坐标为

$$x=\frac{\sqrt[2l+1]{C_{2k-1}^{m-1}(d_i^*-d_i)}x_{i+1}+\sqrt[2l+1]{C_{2k-1}^{m+2l}(d_i^*-d_{i+1})}x_i}{\sqrt[2l+1]{C_{2k-1}^{m-1}(d_i^*-d_i)}+\sqrt[2l+1]{C_{2k-1}^{m+2l}(d_i^*-d_{i+1})}}。$$

证明过程参见文献[6]。

## 参考文献:


[1] Brodlie K W, Butt S. Preserving convexity using piecewise cubic interpolation[J]. Computer & Graphics, 1991, 15(1): 15-23.

[2] Steven P. Shape-preserving $C^2$ cubic spline interpolation[J]. IMA J. of Numerical Analysis, 1993, 13(5): 493-507.

[3] Archer J C, Cruyer E L. Two shape-preserving Lagrange $C^2$-interpolants[J]. Numer. Math., 1993, 64(1): 1-11.

[4] 方 逵,朱国庆,周经伦. $C^k$ 连续的保形 $2k+1$ 次分段多项式插值[J]. 计算数学, 1996, 18(3): 295-304.

[5] 刘生芝. 几何造型中的插值问题研究[D]. 西安:西北大学数学系, 1999.

[6] 黄友谦. 曲线曲面的数值表示和逼近[M]. 上海:上海科技大学出版社, 1987.


(编 辑 曹大刚)

# Shape preserving piecewise degree $2k+1$ polynomial interpolation

KANG Bao-sheng, LIU Sheng-zhi, LIU Rong

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

**Abstract**: An interpolant scheme constructing shape preserving piecewise degree $2k+1$ polynomial interpolation on data sets $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$ is presented. Its continuity and distribution of inflection points on subinterval with inflection point are discussed.

**Key words**: shape preserving; interpolation; Bernstein polynomial; inflection point