1500 P502:X10110/

1998年12月
第28卷第6期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)

Dec. 1998
Vol. 28 No. 6

461-547

① 98,28(6) 461-466

清代数学家使用笔算略论†

O112

李 迪[1) 冯立升[2)

(1)内蒙古师范大学科学史研究所,010022,呼和浩特;2)西北大学数学系,710069,西安;第一作者71岁,教授)

摘 要 讨论了清代使用的各种计算手段,指出清代数学家在数学研究中采用的计算手段和演算方法主要是笔算。介绍了清代两种不同的笔算体系:一种是由西方传入的笔算体系,另一种是中国的筹式演算体系。分析了笔算在清代数学从实用性向学术性转变中所起的作用,认为笔算对清代数学的发展产生了重要影响。

关键词 中国数学史;清代数学;笔算

数学家

分类号 O112

中国历史上长期使用算筹进行各种计算,像开方、解高次方程和解一次同余式组等较复杂的问题都不例外。但是,从元代后期起,中国传统数学在商业经济下不断繁荣的社会环境中趋于商业性和大众化,随之而来的是珠算的蓬勃发展和普及,结果是算盘取代算筹成为最主要的计算工具。明代中期以后,筹算逐渐销声匿迹。伴随着筹算的衰亡,中国传统数学也跌入低谷之中,明代除与珠算有关的计算技术外,整个数学处于衰退状态。在筹算退出历史舞台的同时,西方笔算数学在明末传入中国并得到迅速传播,使中国数学的发展出现了新的转机。正是笔算的兴起奠定了清代数学发展的基础,因而研究笔算在清代的发展和应用情况,无疑是清代数学史的一个重要课题。

笔算在中国实际上有较长的历史,在宋元时期的数学中就已产生了笔算的萌芽[1]。明代流行的"写算"或"铺地锦"实为典型的笔算,回回历算中的"土盘算法"同样是笔算[2]。只是这些算法在中国传统数学中并未占据重要地位。明末,西方的笔算系统地传入中国,用中文写的《同文算指》广为流传,使得笔算产生了深远的影响。著名科学家徐光启的学生孙元化(?～1632)完成了第一部中国人自著的笔算著作《太西要算》。清代中国人主要采用什么样的计算手段?清代数学家在数学研究中怎样进行计算和演算?笔算在清代数学中占有什么样的位置?这些都是过去较少有人明确讨论的问题,但却都是清代数学史中的重要问题。本文试图提供这方面的答案。

首先可以肯定的是,传统的筹算在清初已经完全失传。清初著名数学家梅文鼎(1633～1721)曾从历史的角度引经据典地讨论了传统的筹算1),不仅没有谈到当时如何使用,而且对前人如何使用筹算进行具体的计算也未讨论,并将算筹列为"古算器"中的一种,说明他未用筹算进行过计算。梅文鼎是一位民间数学家,也许见闻不广,实际不然,即使在国家天文机构中工作的天算家其实也不知算筹为何物,有一个有趣的例子可以说明这一点。康熙五十二年(1713年)钦天监的何国柱与阿齐图去朝鲜测量经纬度,朝鲜数学家洪正夏(1684～?)和刘寿锡一同到宾馆拜访何国柱,讨论数学问题。对于何国柱提出的数学问题,洪正夏即使用中国传统的计算工具算筹进行演算,能够迅速求出结果。算筹的功能使何国柱感到惊奇,他问:"中国无如此算子,可得而夸中国乎?"洪正夏选择了40根算筹送给他带回中国2)。

从现有史料看,清代处理的计算问题可大致分为两类:一类是日常生活和商业与经济工作中的计算问题,解决这类问题的手段主要是珠算,这是没有疑问的;另一类则是数学家和天文学家研究数学和天文历法时处理的计算和演算问题,解决这类问题一般根据需要采用多种手段,主要有笔算、珠算、纳白尔

---

† 特约日期:1998-06-03

1)梅文鼎.《笔算》附录《古算器考》,康熙三十二年(1693年)本

2)洪正夏.《九一集》卷九、日本东北大学藏抄本

筹算和比例规(又称尺算),当时合称"笔筹珠尺"。此外清代还采用过西方传入的手摇计算器和对数尺等工具。需要指出的是,对于第二类工作,笔算占有主导地位,其他手段起辅助作用。清代数学家对此也有明确认识,梅文鼎就讲述过笔算的优越性,他说:"笔算之便与筹算同,但筹仍资笔,而笔则不假于筹,于文人之用尤便。"显然认为笔算对于研究和应用数学的学者是更为合适的手段。他还进一步指出:"笔算无歌括,最便学习,又无妨筹应,久可复核,皆与筹算同,详见筹算书。"[1]这里的"筹算"当指纳白尔筹算,而非中国传统筹算。梅文鼎的孙子梅瑴成(1681~1763)在编《梅氏丛书辑要》时强调:"至于算学必自乘除开方始,故首笔算,而以筹算、度算次之。"[2]这种次序本身也说明了笔算的基础地位。梅文鼎对西方传入的笔算十分重视,他撰写了《笔算》一书,不仅按中国人的书写习惯对西方笔算进行了改造,而且还改进了当时的某些笔算算法。《笔算》共5卷,讲述了笔算的四则运算知识和开平方、开带纵平方及开立方的算法。梅氏的工作促进了笔算在中国的广泛传播,对进一步确立笔算的主导地位起了重要作用。

笔算的功能还不限于数值的计算,重要的是它本身就具有数学符号的性质,可以自然导出一些具有代数符号功能的演算方法。笔算的开方与开带纵方运算已包含了代数运算。用笔和纸作为物质手段,以数学运算规律为基础,通过数码、符号的书写变换进行数值计算和数学演算,均可视为笔算。广义的笔算(或笔算体系),还应包括笔算化的演算方法。从广义笔算的角度出发,可将清代的笔算分为两个不同的系统:一个是以《同文算指》的笔算方法为基础而形成的西方笔算系统,这一系统经过中国化的改造得以确立,从明末的孙元化到清代梅氏祖孙和明安图等数学家都属此系统;另一个是以传统筹算算法为基础形成的筹算式笔算系统,它是清中期传统数学复兴的产物。中国传统的筹算是以算筹为专门工具来表数、列式和进行各种演算的一种方法。筹算的演算是通过在平面上机械地排列和变换算筹来实现的。筹式笔算是将算筹操作过程改为用笔摹写,进而通过笔算化改造使其能在纸上直接进行演算。筹式笔算与西方笔算一样无需借助算器实物进行计算和演算。下面通过具体实例来探讨这一问题。

在第一个系统中有一部书具有典型性,就是《数理精蕴》。这部书是康熙帝组织一些中外数学家集体编写的。此书除少数地方使用比例规外,全是笔算,可以说是中国历史上第三部笔算著作。书中对于加减乘除开方笔算讲得特别清楚,进位、借位都要点点(算草中无,叙述中有,估计是刻书时漏刻)。《数理精蕴》用汉字一二三…记数,有了小数点,采用了加号"+"、减号"-"和等号"=",在方程中用"根"字代表未知数,与当时西方的笔算十分接近。下面举两个例子,加以说明。

例1 "设有田三顷五十亩,每顷纳粮一石二斗三升,问共得若干"?

这是一道乘法问题,当时一顷为一百亩,所以田数为三百五十亩。其具体计算是:

"法以三顷五十亩为实例列于上[因亩位无数,故做〇以存其位][3],一石二斗三升为法列于下。命石位与顷之单位相齐[题中言每亩纳一石,故石与顷对为单位]。乃以法之三遍乘实之三五〇,其所得之单位数,即对本法位下书之,三乘〇,仍得〇,故下记〇。次以三以乘五得一十五,将十进前一位作一点志之,五书于本位下。次以三乘三得九,并所进之一为十,故前进一位为一书之,本位记〇。又以法之二,遍乘实之三五〇,其所得之单位数,即对本法位下书之,二乘〇,仍得〇,故下记〇。二乘五得一十,将十前进一位,作一点志之,本位记〇,二乘三得六,并所进之一为七,故书七于本位下。又以法之一,遍乘实之三五〇,其所得之单位数,即对本法位下书之:一乘〇,仍得〇,一乘五,仍得五,一乘三,仍得三,俱各书于本位下。乘毕用加法并之,共得四三〇五〇,总书于下。"[4]

$$\begin{array}{r} 三五〇 \\ \underline{一二三} \\ 一〇五〇 \\ 七〇〇 \\ \underline{三五〇} \\ 四三〇五〇 \end{array}$$

从这段文字可以清楚地看出:《数理精蕴》中的笔算乘法和现代笔算完全一致,丝毫不差,只要把数目字改为印度—阿拉伯数码就行了。

例2 "设如正方面积五丈四十七尺五十六寸开方,问每一边数几何"?

1)梅文鼎:《笔算》"发凡"

2)梅瑴成:《梅氏丛书辑要》"凡例"

3)方括号内的文字为原书注,下同

4)《数理精蕴》下编,卷一

这是一道开平方问题,其方法与现代笔算开平方本质上相同,但除数码外还使用了一些中国传统筹算开方上的术语,如"隅"、"廉"等,下面是其具体演算过程:

"法列方积五丈四十七尺五十六寸,自末位起算,每方积二位定方边一位,故隔一位作记,即于六寸上定寸位,七尺上定尺位,五丈上定丈位。其五丈为初商积,与二丈自乘之数相准,即定初商为二丈,书于方积五丈之上,而以二丈自乘之四丈书于初商积之下,相减余一丈,即一百尺。爰以方边第二位积四十七尺续书于下,共一百四十七尺,为次商廉、隅之共积。仍以初商之二丈作二十尺,倍之得四十尺为廉法,以除一百四十七尺,足三尺,即定次商为三尺,书于方积七尺之上,而以次商三尺为隅法,与廉法四十相加,共得四十三尺为廉隅共法,书于余积之左,以次商三尺乘之,得一百二十九尺,与次商廉隅共积相减,余一十八尺,即一千八百寸。复以方边末位积续书于下,共一千八百五十六寸,为三商廉隅之共积。乃以初商、次商之二丈三尺作二百三十寸,倍之得四百六十寸为廉法,以除一千八百五十寸,足四寸,即定三商为四寸,书于方积六寸之上,而以三商四寸为隅法,与廉法四百六十寸相加,共得四百六十四寸,为廉隅共法,书于余积之左,以三商四寸乘之,得一千八百五十六寸,与三商廉共积相减,恰尽,是开得二丈三尺四寸,为方面每一边之数也。"1)

		二		三		四	
		◡		◡		◡	
		五	四	七	五	六	
		四					
四三	|	一	四	七			
		一	二	九			
四六四	|	〇	一	八	五	六	
			一	八	五	六	
			〇	〇	〇	〇	

笔算的演算过程十分清楚,不需要进一步解释。

例 3　"设有大小二正方,大方比小方每边多二十四尺,面积共七千二百五十尺,问二方边数、面积各几何?"2)

这是一道一元二次方程的应用问题,解题方法即所谓的借根方法。《数理精蕴》下编卷 31 至卷 36 为《借根方比例》,首段称:"借根方者,假借根数、方数以求实数之法也。凡法必借根、借方,加减乘除,令与未知之数比例齐等。"借根相当于设未知数 x,方数为 $x^n(n\geqslant2)$。此题书中给出的解算过程如下:

小边一根		大边一根	+	二四	
小积一平方					
大积一平方	+	四八根	+	五七六	
二平方	+	四八根	+	五七六	=七二五〇
二平方	+	四八根			=六六七四
一平方	+	二四根			=三三三七
		一根			=四七

译成现代的表达方式就是:

设 x 为小正方形边长,则大正方形边长为 $x+24$。小正方形面积为 x^2,大正方形面积为 $(x+24)^2=x^2+48x+576$。两正方形面积和为 7 250。则有 $2x^2+48x+576=7\ 250$,移项得 $2x^2+48x=6\ 674$,各项约去 2 得 $x^2+24x=3\ 337$,解得 $x=47$。

对于上面由 $x^2+24x=3\ 337$ 到 $x=47$ 这一步,书中说"用带纵较数开平方法算之",即用该书前一卷已讲过的笔算开带纵平方法。

《数理精蕴》中的笔算是典型的西方式的,只要把汉字一、二、三等换成 1,2,3,把根数、方数换成 x 和 x^2,x^3 等就成为纯西方式笔算。这种笔算是西方笔算的变形,实际上是西方早在 15 世纪就已通行的笔算术[3],只是符号化的笔算代数方法流行要晚一些,用 x 代表未知数则要晚到笛卡儿的时候。《借根方比例》介绍的是当时传入的笔算代数知识,包括多项式的记法及四则运算,方程的列法和解法。借根方法虽不是完备的符号代数,但对于当时的中国人来说却是比较先进的知识,因而对清代数学起到了促进作用。

由于《数理精蕴》一书是以"御制"的名义出版的,后来有各种版本 20 余种,又被列为教科书,因此其笔算知识在全国得到普及,从而也确立了笔算的主导地位。

中国筹式系统的笔算兴起于 18 世纪末和 19 世纪初,原因是古代数学著作在长期湮没之后此时被陆续发掘出来。其中与笔算有关系的著作有李冶的《测圆海镜》和秦九韶的《数书九章》。《测圆海镜》用天元术列方程,当时还使用筹算,可是到清代,筹算已经绝迹,人们再使用天元术只能用笔写进行计算。

1)《数理精蕴》下编,卷十一

2)《数理精蕴》下编,卷三十五

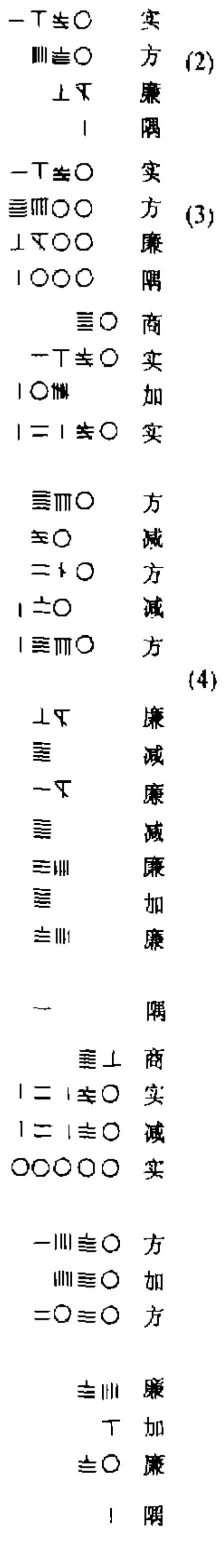
例如张敦仁（1754～1834）于 1803 年完成的《缉古算经细草》就是采用这种笔算较早的一种，其中有采用《测圆海镜》的形式解算《缉古算经》中问题的内容。

和张敦仁同时代的李锐（1768～1817）也采用这种方式，如《弧矢算术细草》就是这样进行计算的。最典型的是《开方说》，不用“立天元一”，直接进行开方和解方程计算。所用的数目字一律为筹码，并说“凡算式有斜画者为负，无者为正。”和宋元时代的用法一样，把斜画要画在有效数字上，不能画在〇上。书中的算式是每商一位一个式子，都独立书写，按求商的次序第一位商在右，第二、第三位依次向左。每个方程都只给出系数及其正负，系数大都按筹算的实、方、廉、隅的固定的称呼进行叙述。例如[1]：

“实一千六百八十负，方五百九十正，廉六十六负，隅一正，益积，开立方得五十六。”

相当于方程 $x^3-66x^2+590x-1\,680=0$， (1)

有正根 $x=56$。用筹式应为(2)。商𝍭𝍥．解的过程和筹算相仿，首先，要对方程(1)进行变换：令 $x=10x_1$，则 $1\,000x_1^3-6\,600x_1^2+5\,900x_1-1\,680=0$。筹式变为(3)。但书中在变换后只是把变换前的数字向左移动一位、二位和三位。变换这一步，李锐没有文字说明，可是他写的筹式和解算说明都是按照变换后的数目。如说“隅一千正”等等。上初商五(十)，依据解方程的算法，从“以初商五乘隅一千得五千正”进行演算，得一数写一数，结果如右式那样。这时得一新的方程，即 $x^3+84x^2+1\,490x-12\,180=0$。这就是李锐说的“方退一位，廉退二位，隅退三位”后的现代形式。继续求解，上次商六，按照上面的演算程序，一步一写，得筹算式如(4)。



演算的结果，实为〇〇，即“适尽”，不需要再求。李锐的算法是口诀和心算较多，得到具体结果即写上。这套算法有比较固定的程序，实即宋元时代的增乘开方法。笔算的程度显然不如前一个系统，但应属于笔算。民初劳乃萱（1843～1921）对李锐的做法提出批评：“元和李尚之（锐）氏作《开方说》，于列式、定位……诸法发挥靡遗，询为昔贤之功臣，当代之先导，独惜其犹未知其为筹法，仍以笔算为之，未脱拙滞繁重之窠臼，致邹氏有每算一数，用纸数十篇，需时数百刻之诮，尚未达一间也。”又说：“迨及明代，筹法失传，古书湮晦，世遂无复知者，西法既入，竞尚笔算”，对梅文鼎的笔算开方也进行指摘：“亦枝枝节节，未达本原。”于是指导女儿劳绋写了一本《开方说订》，“每题皆以筹法演算”，订正李锐的《开方说》。实际上，劳绋所作与李锐不同的只在于：“今改为筹算，算时当用筹于几案，其算出之式，绘于书中”[2]。她家中可能有自制的算筹，因劳乃萱曾说：“家中小儿女略能识数辄教之筹算，以为戏玩。诸儿以戏为学，无苦其难者”，又说“数有零位，以钱记之。每筹一副，从以钱二十三枚。”[3]

筹算在开方和解方程方面确有优越性，只要记住演算程序，能很快得到结果，但也有不便之处，算者必须得有足够的算筹才行，算完之后不留痕迹，无法核查，还是要借助于笔。

又，劳乃萱所说的邹氏可能是指晚于李锐的邹伯奇（1819～1869），他作有《乘方捷术》一书，讲乘方、开方和对数，其中确有占二三页的连续计算，而无“每算一数，用纸数十篇”的情况，是否有这样的笔算演草，就不得而知了，但使用笔算则无疑问。

1）李 锐：《开方说》，《李氏遗书》本

2）劳 绋：《开方说订》（稿本），李迪藏精抄本

3）劳乃萱：《筹算浅释》卷上，1893 年刊本

19世纪,宋代秦九韶的《数书九章》(1247年)开始流传,1842年宜稼堂又刊刻出版。在出版时,宋景昌作了一部《数书九章札记》。宋景昌按照秦九韶的方式进行了大量的演算,成为典型的筹式笔算。例如对该书的“古历会积”题,在原来的基础上给出了非常详细的演算过程,长达24面(合48页)[1)]。更能说明问题的是:宋景昌还著有《弧矢开方草》一稿。

《弧矢开方草》与《授时历故》合在一起装订成册,抄本,前有道光丙申(1836年)李兆洛(1769~1841)识和宋景昌序。《弧矢开方草》有“江阴宋景昌撰”一行,共8双面(即16页)。宋景昌开头讲述了他为什么要研究这个问题:

“周径、弧背求矢于立天元术当空下廉,《授时历》乃以当减上廉上者为下廉,于本术既晦于开方,愈兹烦扰。今以朱氏《四元玉鉴》明其立术之由,准秦氏《数书九章》,详演开方之法,庶几读是历者万一之助云尔。”

要解决的问题有两个,现举一例:

“周天径一百二十一度七十五分,黄道内外半弧背二十四度,求矢。”

这个问题来源于《明史》[2)],但在“黄道内外半弧背”前有“二至”二字,所求之矢也是指在二至时的度数,可是宋景昌忽略了。所谓“半弧背二十四度”是指黄赤交角,其真值约为二十三度九十分[3)],传统上常以二十四度计算。题的意思是:已知周天径和黄赤交角,求冬至或夏至时黄道内外弧弦所对的矢的度数。如图1所示。

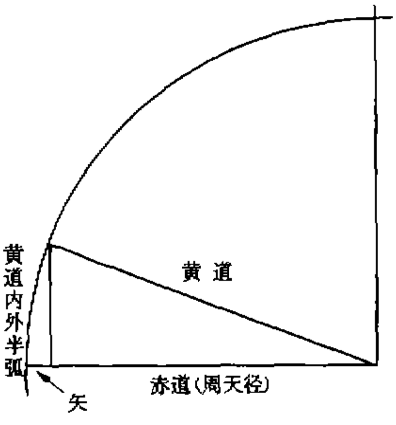


图1 求黄道内外半弧背图

Fig.1 Half Pitch Arc of the Back in the Huangdao of Inside and Outside

《明史》对此问题有解法,但写得较简略,宋景昌则给出了详细筹式演草。他首先经过运算得到一个4次方程,在书写时把各项系数均以“度”上下对齐,写如式(5)。

𝍧𝍭𝍢𝍰〇𝍯𝍣
𝍠𝍰〇𝍬𝍦〇𝍦𝍰𝍤𝍰𝍢𝍯𝍤
𝍰𝍨𝍯𝍨〇𝍥𝍪𝍤
〇
𝍠 (5)

其现代形式相当于

$x^4+8\ 979.062\ 5x^2-1\ 804\ 707.858\ 375x+8\ 538\ 074=0$。

初商为“四度”,采用传统增乘开方法求解,以下通过21步笔算求出矢为四度八十四分十二秒。上述筹式笔算主要用于解决代数问题,应当说是一种笔算代数方法,从所举实例的演算过程可以看出,其中也包含了笔算算术四则运算方法的运用。从演算形式看,也可以说这是一种符号化的筹算。

笔算的引进,特别是笔算代数学方法的确立,为清代数学的发展奠定新的基础。采用笔算系统容易追踪记录思维程序和推导过程,也便于检验演算步骤和结果,因而有利于复杂推导过程的展开。清代一些重大数学成果与笔算代数方法的应用密不可分。明安图的《割圜密率捷法》以借根方比例之法为基础开创了几何量的代数关系的研究,取得了一系列重要成果。书中指出:“分弧通弦求全弧通弦,即弧背求通弦所由起也。若以数求之,不胜其繁;今用借根方法,专取其率数;率数定,则数可得而求矣。”[4)]该书注文还将借根方法与传统的天元术联系起来说明:“借根方法任借数俱可,故古法有立天元一、地元一、人元一者,《四元玉鉴》又有所谓四元者,皆此类也。”[5)]明氏以几何量的借根方连比例关系为根据,将三角函数与反三角函数展开为幂级数,创立了一套完整的“割圜连连比例法”。[4]李锐的《开方说》是清代方程理论方面的代表性成果,其卓越成就的取得也受益于筹式笔算。天元术在明代失传,明代和清初的数学家知道有“立天元一”的术语和方法,但无人了解其内容实质。梅瑴成早年曾涉猎郭守敬《授时历草》和李

1)宋景昌:《数书九章札记》卷一

2)《明史》卷三十二,《历志·大统历法》

3)这里所说的“度”均指中国传统的度

4) 5)明安图:《割圜密率捷法》卷三,《分通弦率数求全弧通弦率数》

冶《测圆海镜》二书,但并不理解天元术的意义,学习了借根方法才发现"天元一即借根方"。他撰写了《天元一即借根方解》一文[1],用借根方法解释郭守敬和李冶书中的一些天元术的应用问题(也有《四元玉鉴》中的问题)。此后,清代数学家才清楚了天元术的意义。

笔算既是吸收和消化西方数学的基础,也是传统数学复兴的工具。由于清代笔算是符号化程度相对较高的演算方法,因而它的兴起有助于较高层次数学研究工作的开展。清代数学的一大特点是,中国数学实现了从大众化的实用性数学向专业化的学术性数学的转变。笔算的引进和采用对这一转变有一定促进作用。通过与筹算、珠算功能的比较有助于加深这一认识。

筹算对中国传统数学影响极为深远,它不仅为中国人提供了记数和计算的有力工具,而且还引导出一套具有符号功能和意义的代数演算方法。中国古代数学长期在算术和代数方面居于世界领先地位,很大程度上受惠于筹算体系的应用。开方术、高次方程数值解法、线性方程组的表达及求解、天元术及四元术和同余式组解法等重大成就,无一不与筹算有关。珠算是由筹算发展而来的高效计算工具,作为数值计算工具,它涵盖了筹算的功能,但其计算迅速便捷却是筹算也难以相比的。珠算取代筹算成为日常生活和商业经济工作的计算工具,使计算工作效率有了极大的提高,因而成为大众化的商业实用数学的核心内容。但珠算并不像筹算那样具有多方面的数学表现功能,难以用它进行多种复杂的代数演算。珠算的发展也难以带动理论性或学术性数学的发展,数学(不包括商业数学)在明代衰退与筹算失传也有一定联系。笔算基本能够涵盖筹算的各种功能,而且可以发展出符号化程度更高的演算系统。笔算体系的独特功能,使它在实用性数学向学术性数学的转变中扮演了重要的角色。笔算成为清代数学研究中的主要计算和演算手段,使演算方式发生了重要转变,从而也为数学的转变奠定了基础。

参 考 文 献

1 李 迪. 宋元时期数学形式的转变. 中国科学技术史论文集(第1辑). 呼和浩特:内蒙古教育出版社,1991.219~233

2 李 俨. 伊斯兰教和中国历算的关系. 中算史论丛(第5集). 北京:科学出版社,1995.57~75

3 Swetz F J. Capitalism and Arithmetic. Second printing. La Salle,Illnois:Open Court Publishing,1989

4 罗见今. 明安图计算无穷级数的方法分析. 自然科学史研究,1990,(3):178~207

责任编辑 姚 远

A Study on Mathematician's Calculation with Pen and Paper in the Qing Dynasty

Li Di[1)] Feng Lisheng[2)]

(1)Institute for the History of Science, Inner Mongolia Normal University, 010022, Huhhot;

2)Department of Mathematics, Northwest University, 710069 Xi'an)

Abstract The calculating tools and method of performing mathematical calculations in the Qing Dynasty are studied. It is concluded that mathematicians formed and calculated mainly by means of written calculation with pen and paper in the Qing Dynasty. The important position of written caculation in mathematics in the Qing Dynasty is discussed.

Key words history of Chinese mathematics; mathematics in the Qing Dynasty; written calculation

1)梅珏成:《天元一即借根方解》,见《梅氏丛书辑要》卷六十一,附录《赤水遗珍》