1997年2月
第27卷第1期
西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)
Feb. 1997
Vol. 27 No. 1

③ 9-11

样本均值随机加权估计的强大数定律*

O211.67

高社生[1)] 张胜贵[2)]

(1)西北大学数学系,710069,西安;2)西北工业大学1系,710072,西安;第一作者38岁,男,副教授)

A **摘 要** 在 $E|X_1|^{1-\delta}<\infty(0<\delta<1)$ 的条件下,证明了样本均值随机加权估计的强大数定律。

关键词 随机加权法;样本均值;强大数定律

分类号 O121

随机加权估计

1 定 理

随机加权法自从提出以来,虽已有大量文献研究,但直到目前为止,关于随机加权大数定律这一重要的理论问题未见研究结果。本文在 $E|X_1|^{1+\delta}<\infty$ $(0<\delta<1)$ 的条件下,得到了样本均值随机加权估计的强大数定律。

设 $X_1,X_2,\cdots\cdots$,是独立同分布的随机变量序列,其共同的分布函数为 $F(x)$。$\tilde{X}_n=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,记 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的观察现实,$\tilde{x}_n=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。样本均值 $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 的随机加权估计为 $H_n(\tilde{x})=\sum_{i=1}^{n}V_iX_i$,$(V_1,V_2,\cdots V_n)$ 服从 Derichlet $D(1,1,\cdots,1)$分布。关于样本均值随机加权估计的强大数定律如下。

定理 假设 $E|X_1|^{1+\delta}<\infty$,$(0<\delta<1)$,则对每一个 $\varepsilon>0$,当 $N\to\infty$时有:

$$P\{\sup_{n\geq N}|H_n(x)-\overline{X}_n|>\varepsilon\}\to 0 \qquad (a.s)。 \tag{1}$$

2 定理的证明

为了证明定理,先证明下面不等式:对一切 $n\geq 2$ 和 $r\geq 1$,存在有限数 $G>0$,使得

$$E^*[(\sum_{i=1}^{n}V_iX_i-\overline{X}_n)^{2r}|X_n]\leqslant Gn^{-r}S_n^{2r}, \tag{2}$$

这里 E^* 表示在给定 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 条件下的条件期望,$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$。

为了证明式(2),注意到

$$(\sum_{i=1}^{n}V_iX_i-\overline{X}_n)^{2r}=n^{-2r}(\sum_{i=1}^{n}nV_iX_i-n\overline{X}_n)^{2r}=n^{-2r}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_{2r}=1}^{n}\prod_{j=1}^{2r}(nV_{i_j}X_{i_j}-\overline{X}_n) \tag{3}$$

只要进行简单的计算,就可以验证式(3)是成立的。现计算如下:

$$n^{-2r}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_{2r}=1}^{n}\prod_{j=1}^{2r}(nV_{i_j}X_{i_j}-\overline{X}_n)$$

* 收稿日期:1995-11-27

$$= n^{-2\Gamma}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_{2\Gamma}=1}^{n}(nV_{i_1}X_{i_1}-\overline{X}_n)\times\cdots\times(nV_{i_{2\Gamma}}X_{i_{2\Gamma}}-\overline{X}_n)$$

$$= n^{-2\Gamma}[(nV_1X_1-\overline{X}_n)+(nV_2X_2-\overline{X}_n)+\cdots+(nV_nX_n-\overline{X}_n)]$$

$$\times\cdots\times[(nV_1X_1-\overline{X}_n)+(nV_2X_2-\overline{X}_n)+\cdots+(nV_nX_n-\overline{X}_n)]$$

$$= n^{-2\Gamma}(\sum_{i=1}^{n}(nV_iX_i-\overline{X}_n))^{2\Gamma}$$

$$= n^{-2\Gamma}(\sum_{i=1}^{n}nV_iX_i-n\overline{X}_n)^{2\Gamma} = \text{左边。}$$

令 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 独立同分布，并且服从指数分布 $\Gamma(1)$。即 Z_1 具有分布密度 $e^{-x}I_{(x>0)}$，则 $(\frac{Z_1}{Z_1+\cdots+Z_n},\cdots,\frac{Z_n}{Z_1+\cdots+Z_n})$ 与 $(V_1,V_2,\cdots V_n)$ 同分布，在保持分布不变的情况下，用 $(\frac{Z_1}{Z_1+\cdots+Z_n},\cdots,\frac{Z_n}{Z_1+\cdots+Z_n})$ 来代替 $(V_1,\cdots V_n)$，由大数定律 $EX_{k=1}$ 知。$(Z_1+\cdots+Z_n)/n\to 1$ $(a\cdot s)$。则有

$$(\sum_{i=1}^{n}V_iX_i-\overline{X}_n)^{2\Gamma}=n^{-2\Gamma}(\sum_{i=1}^{n}nV_iX_i-n\overline{X}_n)^{2\Gamma}$$

$$=n^{-2\Gamma}(\sum_{i=1}^{n}n\cdot\frac{Z_i}{Z_1+\cdots+Z_n}X_i-n\overline{X}_n)^{2\Gamma}\text{。}$$

与 $n^{2-\Gamma}(\sum_{i=1}^{n}Z_iX_i-n\overline{X}_n)^{2\Gamma}$ 渐近同分布，这样，要研究式(3)，只要考查下式即可。

$$n^{-2\Gamma}(\sum_{i=1}^{n}Z_iX_i-n\overline{X}_n)^{2\Gamma}=n^{-2\Gamma}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_{2\Gamma}=1}^{n}\prod_{j=1}^{2\Gamma}(Z_{i_j}X_{i_j}-\overline{X}_n) \tag{4}$$

注意到 $E^*(Z_{i_j}X_{i_j}-\overline{X}_n|X_n)=0$，如果有一个下标，比如说 i_j 恰好出现在式(4)的被加数里，那么由上式，相应的被加数的条件期望也是零。故式(4)右边的通项中，所有有相异下标，有非零期望的项的形式为：

$$(Z_{i_1}X_{i_1}-\overline{X}_n)^{k_1}\times\cdots\times(Z_{i_e}X_{i_e}-\overline{X}_n)^{k_e},$$

这里 $k_1+\cdots+k_e=2\Gamma$，$k_e\geqslant 2$，又因为

$$E^*[(Z_{i_1}X_{i_1}-\overline{X}_n)^{k_1}\times\cdots\times(Z_{i_e}X_{i_e}-\overline{X}_n)^{k_e})|X_n]$$

$$\leqslant E^*[|(X_{i_1}-\overline{X}_n)^{k_1}\times\cdots\times(X_{i_e}-\overline{X}_n)^{k_e}|X_n|],$$

由文献1：

$|(X_{i_1}-\overline{X}_n)^{k_1}\times\cdots\times(X_{i_e}-\overline{X}_n)^{k_e}|$ 的条件期望等于

$$\prod_{j=1}^{e}\left\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^{k_j}|\right\}\leqslant\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i-\overline{X}_n|\}^{2(\Gamma-e)}\cdot S_n^{2e}$$

$$\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{1}(X_i-\overline{X}_n)^2\right\}^{\Gamma-e}\cdot S_n^{2e}\quad(\text{对每个 }e\geqslant 1), \tag{5}$$

由式(3),(4),(5)有：

$$E^*[(\sum_{i=1}^{n}V_iX_i-\overline{X}_n)^{2\Gamma}|X_n]\leqslant k(\Gamma)\cdot n^{-2\Gamma}\sum_{e=1}^{\Gamma}[(nS_n^2)^{\Gamma-e}\cdot S_n^{2e}$$

$$\leqslant K(\Gamma)n^{-2\Gamma}(\sum_{e=1}^{\Gamma}n^{\Gamma-e}\cdot n^e)\cdot S_n^{2\Gamma}$$

$$=K(\Gamma)n^{-2\Gamma}\cdot\Gamma n^{\Gamma}\cdot S_n^{2\Gamma}=K(\Gamma)\cdot n^{-\Gamma}\cdot\Gamma\cdot S_n^{2\Gamma}, \tag{6}$$

$$=Gn^{-\Gamma}S_n^{2\Gamma}$$

这里 G 和 $K(\Gamma)$ 为不依赖于 n 的常数。这就证明了不等式(2)。

我们定义：

$W_{n,\delta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|^{1+\delta}$ 这里 δ 如定理中所定义，$\mu=EX_1<\infty$。注意到：

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \\
&\leqslant \{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i-\mu|^{1-\delta}\cdot\}\cdot W_n\cdot\delta \\
&\leqslant \Big\{\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|^{1+\delta}\Big\}^{(1-\delta)/(1+\delta)}\cdot W_{n\cdot\delta} \\
&= \{nW_{n\cdot\delta}\}^{(1-\delta)/(1+\delta)}\cdot W_{n\cdot\delta} \\
&= n^{(1-\delta)/(1+\delta)}\cdot W_{n\cdot\delta}{}^{2/(1+\delta)}。
\end{aligned}
\tag{7}
$$

由式(2)和式(7),我们有:对每一个 $n\geqslant 2$ 有:

$$
\begin{aligned}
&E^*[(\sum_{i=1}^{n}V_iX_i-\overline{X}_n)^{2\Gamma}]\leqslant Gn^{-\Gamma}\{[nW_{n\cdot\delta}]^{(1-\delta)/(1-\delta)}\cdot W_{n\cdot\delta}\}^{\Gamma} \\
&= Gn^{-2\delta\Gamma/(1+\delta)}\cdot W_{n\cdot\delta}{}^{2\Gamma/(1+\delta)},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

记

$$
A_v=\Big\{\sup_{n\geqslant N}|\sum_{i=1}^{n}V_iX_i-\overline{X}_n|>\varepsilon\Big\}
$$

$$
B_v=\{\sup_{n\geqslant N}W_{n\cdot\delta}\leqslant g\},
$$

其中 $g>E|X_1-\mu|^{1+\delta}$ 是一个有限常数。注意到 $W_{n\cdot\delta}$ 形成一后向鞅。因此,由 Kolmogorov 极大不等式(见文献1)有:

$$
\begin{aligned}
P(\overline{B}_v) &= P\{\sup_{n\geqslant N}W_{n\cdot\delta}-E|X_1-\mu|^{1+\delta}>g-E|X_1-\mu|^{1+\delta}\} \\
&\leqslant \{g-E|X_1-\mu|^{1+\delta}\}^{-1}\cdot E|W_{N,\delta}-E|X_1-\mu|^{1+\delta}|\to 0 \quad (N\to\infty \text{时}),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

最后一步是根据均值 $W_{n\cdot\delta}$ 的 l_1- 收敛。

利用 Markov 不等式和式(8)有:

$$
\begin{aligned}
P(A_vB_v) &\leqslant \sum_{n\geqslant N}P\Big\{\sup|\sum_{i=1}^{n}V_iX_i-\overline{X}_n|>\varepsilon,W_{n\cdot\delta}\leqslant g\Big\} \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant N}E[I_{(W_{n\cdot\delta}\leqslant g)}\cdot G\,n^{-2\delta\Gamma/(1+\delta)}\cdot W_{n\cdot\delta}{}^{2\Gamma/(1+\delta)}]/\varepsilon^{2\Gamma} \\
&\leqslant C_0^*(g,\varepsilon,\Gamma)\sum_{n\geqslant N}n^{-2\delta\Gamma/(1+\delta)} \\
&\leqslant C^*(g,\varepsilon,\Gamma)N^{1-2\delta\Gamma/(1+\delta)}。
\end{aligned}
\tag{10}
$$

这里 C_0^* 和 C^* 是正的有限常数。选择 $\Gamma(>1)$,对某些 $h>0$,注意到:$2\delta\Gamma/(1+\delta)=1+h$

和

$$
P(A_v)\leqslant P(A_vB_v)+P(\overline{B}_V), \tag{11}
$$

再由式(9),(10)及适当选样的 Γ,定理得证。

参考文献

1 Athrega K, Ghosh M, Tow Y H, et al. Law of large numbers for boostrapped U-Statistics. J. Statistics Plann Inference, 1984(9):185~194

2 高社生,宋燕堂.样本的值随机加权估计的弱大数定律.工程数学学报,1995(3):115~118

责任编辑 张素敏

Strong Law of Large Numbers for Random Weighting Means

Gao Shesheng[1)] Zhang Shenggui[2)]

(1)Department of Mathematics, Northwest University, 710069, Xi'an; 2)Northwestern Polytechnfical University, 710072, Xi'an)

Abstract For the Random weigheing mean, a strong law of large numbers is obtained under the assumption of finiteness of the γth moment, for some $\Gamma>1$.

Key words random weighting; sample mean; strong law of large numbers