

# 运用单元系综平均方法研究“层流”泡状流压力场

许兆峰, 罗锐, 杨献勇

(清华大学热能工程系, 北京 100084)

摘要: 在考虑真实流体粘度、忽略气泡尾迹区影响的前提下, 通过对真实流体绕球形气泡的流场进行研究, 运用单元系综平均方法推导出液相界面平均压力与液相平均压力差  $p_{ii}-p_l$  的表达式, 反映了液体粘度对该压力差的影响。由于湍流泡状流相对雷诺数较大, 无法忽略尾迹区对其气泡周围压力场的影响, 因此该表达式只适用于“层流”泡状流。

关键词: 泡状流; 双流体模型; 单元系综平均; 压力差

中图分类号: TB126 文献标识码: A 文章编号: 1009-606X(2004)04-0380-05

## 1 前言

泡状流是自然界的普遍现象, 在动力能源、航空航天、石油化工、冶金制冷、核能利用等领域也广泛存在着泡状流。所以泡状流流场的准确预测, 对于以上各工程领域有着重要意义。迄今为止对泡状流流场的研究主要是应用双流体模型<sup>[1-4]</sup>。

为使双流体模型封闭得以求解, 需要补充若干本构关系式。由于泡状流中气泡群相对液体的运动产生 Bernoulli 效应, 使其压力场不同于单相流。Stuhmiller<sup>[5]</sup>利用绕球形颗粒的势流流场得到液相界面平均压力  $p_{ii}$  与液相平均压力  $p_l$  之差  $p_{ii}-p_l$  的关系式如下:

$$p_{ii} - p_l = -C_p \rho_l (1 - \alpha_g) \left| \mathbf{u}_g - \mathbf{v}_i \right|^2, \quad (1)$$

其中, 压力差系数  $C_p$  为 0.25。

而在实际的流动中, 液体是有粘性的。特别是对于层流泡状流, 其对绕气泡流动的影响很大。为此, Antal 等<sup>[1]</sup>、Lopez 等<sup>[6]</sup>、宋蕾等<sup>[3,4]</sup>对  $C_p$  的经验取值介于 0.5 与 1 之间。

本工作在考虑液体粘性作用的前提下, 通过对流体绕气泡真实流场的分析, 利用单元系综平均方法推导出新的压力差本构关系式, 并将其与文献<sup>[1,3-6]</sup>的结果进行了比较。

## 2 压力差关系式的推导

当液相不是很纯净时, 就会有表面活性物质附着在气泡表面上, 对气泡有一定的“固化”效应, 使其表现接近于固体颗粒。如果气泡变形可以忽略, 就可以将气泡当作球形固体颗粒来处理。本工作即是如此。

### 2.1 平均方法—单元系综平均

压力差  $p_{ii}-p_l$  表示的是平均量, 所以需要对流场进行平均处理。本研究采用单元系综平均<sup>[7,8]</sup>, 它是系综平均的一种近似。假设两相流流场可以按照平均点分解成一些不相互作用的单元, 每个单元中含有且只能含有 1 个全部气泡, 如图 1(a)所示。所以每个单元只受该单元内部气泡的影响, 即

收稿日期: 2003-07-16, 修回日期: 2003-10-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(编号: 19572042)

作者简介: 许兆峰(1975-), 男, 吉林省农安县人, 博士研究生, 主要研究多相流, Tel: 010-62782175, E-mail: xuzhaofeng99@mails.tsinghua.edu.cn.

忽略气泡间的相互作用力. 因此对一点的平均可简化为包含该点单元内的平均. 一般单元简化为球体, 平均点位于球心, 如图 1(b)所示, 以  $A$  为平均点的单元. 由于单元中只含有 1 个全部气泡, 所以气泡与球体的体积比为平均点的空泡率(气相体积份额), 如式(2)所示.

$$\frac{4}{3}\pi a^3 / \frac{4}{3}\pi R^3 = \alpha_g, \quad \text{即: } a^3/R^3 = \alpha_g. \quad (2)$$

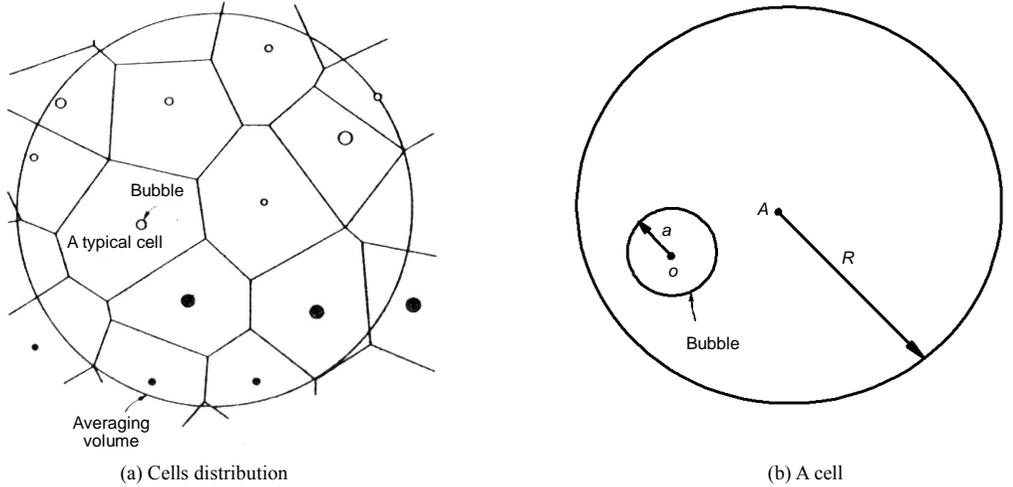


图 1 单元系综平均示意图  
Fig.1 Cell-ensemble average

在图 1(b)所示的单元中, 平均点  $A$  的性质只受气泡  $o$  影响, 所以只要知道气泡  $o$  在单元内每一位置时平均点  $A$  的任意性质  $f$ , 然后以气泡在单元中该位置出现的概率为权, 在整个单元内进行加权平均, 就可以得到平均点  $A$  的性质  $f$  的平均值. Arnold 等<sup>[7]</sup>在假设气泡在单元中各个位置的分布概率相等的条件下得到如下的液相平均和液相界面平均关系式:

$$f_i = 3/[4\pi(R^3 - a^3)] \int_a^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \varphi) r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr, \quad (3)$$

$$f_{ii} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(a, \theta, \varphi) \sin\theta d\varphi d\theta. \quad (4)$$

2.2 均匀来流绕球的真实流场

当气泡位于图 1(b)所示的位置时, 单元中心  $A$  的压力等于均匀来流绕静止气泡  $o$  形成的压力场相应位置的压力. 对于无限大空间均匀来流绕球形气泡的流动, 采用如图 2 所示的坐标中心固定在气泡中心上.  $oz$  轴指向迎流方向(即  $oz$  轴与  $u-v$  方向相同)的随体球坐标系, Ishii<sup>[9]</sup>给出了其无量纲表面压力场:

$$P_s^* = \left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right) + \frac{24}{Re} \left[ \cos\theta - \frac{2(1 + \cos\theta)}{\sqrt{\pi Re(2 + \cos\theta)}} \right] + O\left(\frac{1}{Re^2}\right). \quad (5)$$

式(5)右侧第一项为势流表面压力, 第二项为表面压力修正

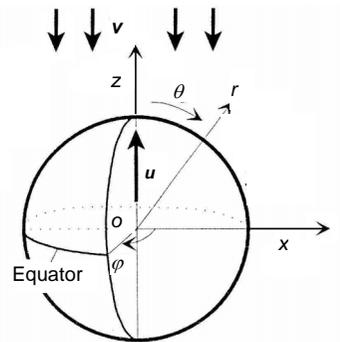


图 2 气泡上的随体球坐标系  
Fig.2 Coordinates on a sphere bubble

项,第三项为舍弃的误差.依据 Moore<sup>[10]</sup>对均匀来流绕球形气泡速度场的构造形式,将气泡周围整个压力场构造由势流结果加修正项(表面压力修正项乘以沿径向衰减系数)组成.考虑到角度对径向衰减系数影响不大,无量纲压力场简化如下:

$$P^* = \left[ \frac{1}{r^{*3}} \left( 2 - \frac{1}{r^{*3}} \right) - \frac{3}{2r^{*3}} \left( 2 - \frac{1}{2r^{*3}} \right) \sin^2 \theta \right] + \frac{24}{Re} \left[ \cos \theta - \frac{2(1 + \cos \theta)}{\sqrt{\pi Re(2 + \cos \theta)}} \right] e^{-(r^{*-1})Re}. \quad (6)$$

式(5)和(6)是经过如下无量纲化处理的:

$$P^* = 2(p - p_\infty) / \rho_1 |\mathbf{v} - \mathbf{u}|_\infty^2, \quad r^* = r/a, \quad Re = 2a\rho_1 |\mathbf{v} - \mathbf{u}|_\infty / \mu_1. \quad (7)$$

由于雷诺数较小的 Stokes 流动压力场不同于 Ishii<sup>[9]</sup>所给的式(5),因此式(6)仅适用于雷诺数较大的流动,一般雷诺数应大于 5. 并且式(6)只适用于气泡分离点前的压力场,但由于目前气泡尾迹区内的压力分布还无法具体表述,所以为了计算方便,在气泡分离点后(即尾迹区)依然采用粘性压力表达式(6).

### 2.3 新的本构关系式的导出

将单元系综平均关系式(3)和(4)按照式(7)无量纲化,有:

$$f_i^* = \frac{3a^3}{4\pi(R^3 - a^3)} \int_1^{R/a} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f^*(r^*, \theta, \varphi) r^{*2} \sin \theta d\varphi d\theta dr^*, \quad (8)$$

$$f_{ii}^* = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f^*(1, \theta, \varphi) \sin \theta d\varphi d\theta. \quad (9)$$

将式(6)代入式(8)和(9),然后利用式(2)的关系并作适当简化处理可得:

$$\begin{aligned} P_i^* &= \frac{3a^3}{4\pi(R^3 - a^3)} \int_1^{R/a} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P^*(r^*, \theta) r^{*2} \sin \theta d\varphi d\theta dr^* \\ &= -\frac{\alpha_g}{2} + \frac{96}{\sqrt{\pi Re^2}} \frac{\alpha_g}{1 - \alpha_g} \left[ e^{-\left(\frac{\alpha_g^{-1/3} - 1}{\sqrt{Re}}\right)\sqrt{Re}} \left( \alpha_g^{-2/3} + \frac{2}{\sqrt{Re}} \alpha_g^{-1/3} + \frac{2}{Re} \right) - \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{Re}} + \frac{2}{Re} \right) \right] \approx -\frac{1}{2} \alpha_g - \frac{32}{\sqrt{\pi Re^3}} \alpha_g. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} P_{ii}^* &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P^*(1, \theta) \sin \theta d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta + \frac{24}{Re} \left( \cos \theta - \frac{2(1 + \cos \theta)}{\sqrt{\pi Re(2 + \cos \theta)}} \right) \right] \sin \theta d\varphi d\theta = -\frac{1}{2} - \frac{32}{\sqrt{\pi Re^3}}. \end{aligned} \quad (11)$$

所以

$$P_{ii}^* - P_i^* = (p_{ii} - p_i) / \left( \frac{1}{2} \rho_1 |\mathbf{v} - \mathbf{u}|_\infty^2 \right) = - \left( \frac{1}{2} + \frac{32}{\sqrt{\pi Re^3}} \right) (1 - \alpha_g). \quad (12)$$

此时平均点的相平均速度不受气泡影响,所以它就是远端不受气泡影响的稳定速度场.即:  
 $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|_\infty = |\mathbf{u}_g - \mathbf{v}_1|$ . 所以有:

$$p_{ii} - p_i = - \left( \frac{1}{4} + \frac{16}{\sqrt{\pi Re^3}} \right) \rho_1 (1 - \alpha_g) |\mathbf{u}_g - \mathbf{v}_1|^2, \quad (13)$$

即:

$$C_p = \frac{1}{4} + \frac{16}{\sqrt{\pi Re^3}}. \quad (14)$$

式(14)在推导的过程中仅考虑了液体粘性对压力场的影响,而忽略了气泡尾迹区的影响.对于相对雷诺数较大的湍流泡状流,由于分离点距离气泡的后滞止点较远,尾迹区对压力场的影响无

法忽略, 所以式(14)并不适用于湍流泡状流, 只适合“层流”泡状流, 其相对雷诺数  $Re$  一般介于 5 与 300 之间, 所以  $C_p$  介于 1.06 与 0.25 之间.

### 3 比较与讨论

图 3 显示了压力差系数  $C_p$  随相对雷诺数  $Re$  的变化. 其中, 宋蓄<sup>[3,4]</sup>的数据是在升力系数  $C_l=0.1$  时的等价  $C_p$  取值. 从图中可以看出在相对雷诺数  $Re$  较小, 尤其是当  $Re < 50$  时, 式(14)明显大于 Stuhmiller<sup>[5]</sup>所得的势流结果. 从式(10)和(11)可知, 这是由于液相的粘性作用, 使液相界面平均压力  $p_{li}$  与液相平均压力  $p_l$  与势流相比都变小了, 但  $p_{li}$  变化的幅度更大所致.

从图 3 还可以看出式(14)没有宋蓄<sup>[3,4]</sup>的经验取值大, 尤其是当  $Re$  数较大时差距更明显. 这是由于现在还没有确切可靠的用于描述单个气泡尾迹区内的压力分布表达式, 所以本文在推导过程中为了计算方便, 在气泡分离点后(即尾迹区)依然采用粘性压力表达式(6). 而实际的尾迹区压力要比式(6)小, 从而导致式(10)和(11)的取值偏大, 最终使  $C_p$  比实际偏小. 而  $Re$  数越大, 气泡受尾迹区影响越大, 所以与经验数据相差越大.

由于宋蓄<sup>[3]</sup>的数据是多个实验条件下的平均  $C_p$  值, 而宋蓄<sup>[4]</sup>的数据是单个实验条件下的特定  $C_p$  值, 所以宋蓄<sup>[3]</sup>的数据反映了  $C_p$  的取值趋势, 因而与式(14)更符合.

### 4 结论

泡状流双流体模型中的液相界面平均压力与液相平均压力差  $p_{li}-p_l$  除了受势流的影响, 还受液体粘度、气泡尾迹区、气泡变形等影响. 在“层流”泡状流中, 由于相对雷诺数较小, 液体粘度对其影响很大, 而气泡尾迹区影响较小; 而在湍流泡状流中恰好相反, 液体粘度对其影响不大, 而气泡尾迹区对其影响很大.

通过理论推导, 在考虑液体粘度、忽略尾迹区影响的情况下, 利用单元系综平均方法得到了适用于“层流”泡状流的  $p_{li}-p_l$  表达式, 体现了粘度对该压力差的影响, 与前人所用经验结果吻合. 该式不适用于湍流泡状流, 要将其推广到湍流泡状流, 还需对气泡尾迹区进行深入的研究.

符号表:

$a$ 气泡半径 (m)	$C_p$ 压力差系数	$f$ 气泡位于 $(r, \theta, \varphi)$ 时单元中心任意函数
$p$ 压力 (Pa)	$P$ 相对压力 (Pa)	$r$ 球坐标系坐标 (m)
$R$ 单元半径 (m)	$Re$ 相对雷诺数	$u$ 气相速度矢量 (m/s)
$v$ 液相速度矢量 (m/s)	$\alpha$ 体积份额	$\varphi$ 球坐标系坐标
$\mu$ 液相粘度 [kg/(m·s)]	$\theta$ 球坐标系坐标	$\rho$ 液相密度 (kg/m <sup>3</sup> )
上、下标:		
$g$ 气相平均	$l$ 液相平均	$li$ 液相界面平均
$s$ 气泡表面	$*$ 无量纲	$\infty$ 远端不受气泡影响的稳定流场

参考文献:

[1] Antal S P, Lahey R T, Flaherty J E. Analysis of Phase Distribution in Fully Developed Laminar Bubbly Two-phase Flow [J]. Int. J. Multiphase Flow, 1991, 17(5): 635-652.

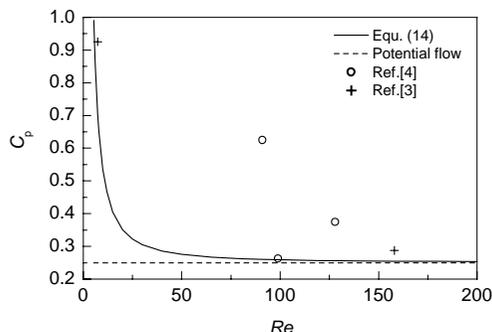


图 3  $C_p$  函数图  
Fig.3 Relationship of  $C_p$  with  $Re$

- [2] Lahey R T, Drew D A. On the Development of Multidimensional Two-fluid Models for Vapor/Liquid Two-phase Flows [J]. Chem. Eng. Comm., 1992, 118: 125–139.
- [3] 宋蕃. 垂直管道内泡状流运动的理论和实验研究 [D]. 北京: 清华大学, 1999. 30–39.
- [4] 宋蕃, 杨献勇, 罗锐, 等. 层流泡状流运动的数学模型 [J]. 清华大学学报, 1998, 38(5): 55–58.
- [5] Stuhmiller J H. The Influence of Interfacial Pressure on the Character of Two-phase Flow Model Equations [J]. Int. J. Multiphase Flow, 1977, 3: 551–560.
- [6] Lopez M, Lahey R T, Jones O C. Phase Distribution in Bubbly Two-phase Flow in Vertical Ducts [J]. Int. J. Multiphase Flow, 1994, 20(5): 805–818.
- [7] Arnold G S, Drew D A, Lahey R T. Derivation of Constitutive Equations for Interfacial Force and Reynolds Stress for a Suspension of Spheres Using Ensemble Cell Averaging [J]. Chem. Eng. Comm., 1989, 86: 43–54.
- [8] Drew D A. Effect of Particle Velocity Fluctuations in Particle–Fluid Flows [J]. Physica A, 1991, 179: 69–80.
- [9] Ishii T, Pei D. Drag Coefficient of Relatively Contaminated Gas Bubbles [J]. Can. J. Chem. Eng., 1980, 58: 25–32.
- [10] Moore D W. The Boundary Layer on a Spherical Gas Bubble [J]. J. Fluid Mech., 1963, 16: 161–176.

## Investigation on Pressure Field in Bubbly Flow with Cell-ensemble Averaging

XU Zhao-feng, LUO Rui, YANG Xian-yong

(Department of Thermal Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** Bubbly flow is a basic two-phase flow problem and is usually analyzed using two-fluid models. The closure laws are very important and determine accuracy of two-fluid models. The previous closure laws were derived based on the potential flow assumption, such as the averaged pressure difference,  $p_{li}-p_l$ , between the interface and the liquid phase. However, the pressure difference is affected by fluid viscosity, wake of bubbles, bubble deformation, and so on. In this paper, taking fluid viscosity into consideration, the pressure difference is constituted using cell-ensemble average. The new formula can be applied for “laminar” bubbly flows where the relative Reynolds number is small and therefore the influence of bubble wakes on the pressure field is negligible. The new formula gives a larger result than the potential one, which agrees with the empirical data for “laminar” bubbly flows. The new formula can not be applied for turbulent bubbly flows, because the pressure field is considerably affected by wakes of bubbles. So it is necessary to investigate the effects of wakes of bubbles to construct a pressure difference formula for turbulent bubbly flows.

**Key words:** bubbly flow; two-fluid model; cell-ensemble average; pressure field