一类广义集值拟向量变分不等式解的存在性

程君岭，何中全

（西华师范大学数学与信息学院，四川南充 637002）

摘 要：研究了 Banach 空间中一类 G-可导映射的广义拟向量变分不等式问题，运用 KKM 定理证明这类问题解的存在性，并在适当的条件下证明了此类问题与 Konnov I V 和 Yao J C 等人提出的广义向量变分不等式问题是等价的.

关键词：拟向量变分不等式；KKM 映射；η-P-凸映射

中图分类号：O177.5 **文献标识码**：A **文章编号**：1006-0375(2008)02-0008-06

1980 年，Giannessi[1]在有限维欧氏空间中首次引入了向量变分不等式（VVIP），随后 Chen G Y[2]和 Yu S J[3]等人对 VVIP 的研究从有限维的欧氏空间推广到无限维的 Banach 空间，甚至到更一般的 Hausdoff 空间．Lin K L[4]等人对 VVIP 的研究从单值形式推广到了集值形式.

设 X，Y 是实 Banach 空间，K 是 X 中的非空子集，$C: K \to 2^Y$ 是集值映射，且对 $\forall x \in K$，$C(x)$ 是 Y 中真闭凸尖锥，$\operatorname{int} C(x) \neq \varnothing$. $H(X,Y)$ 是从 X 到 Y 上的 G-可微算子全体，用 $f'(x)$ 表示 f 在 x 处的 G-导数值．$\eta(\cdot,\cdot): K \times K \to X$，$T: K \to 2^{H(X,Y)}$.

本文研究的广义向量拟变分不等式问题是：

GVQVIP 求 $x_0 \in K$，使得 $\forall y \in K, \exists f \in T(x_0): \langle f'(x_0), \eta(y, x_0) \rangle \notin -\operatorname{int} C(x_0)$．并证明 GVQVIP 与下面的广义向量变分不等式（GVVIP）[5]的等价性.

GVVIP 求 $x_0 \in K$，使得 $\forall y \in K, \exists f \in T(x_0): \langle f, y - x_0 \rangle \notin -\operatorname{int} C(x_0)$.

1 预备知识

设 X 是实 Banach 空间，$P \subseteq X$ 以 0 点为顶点的点闭凸锥，且其内部非空，即 $\operatorname{int} P \neq \varnothing$，对 X 中的向量按以下方式分别定序和弱序：

$$x \leq_P y \Leftrightarrow y - x \in P, \forall x, y \in X;$$

$$x \not\leq_P y \Leftrightarrow y - x \notin P, \forall x, y \in X.$$

$$x <_P y \Leftrightarrow y - x \in \operatorname{int} P, \forall x, y \in X;$$

$$x \not<_P y \Leftrightarrow y - x \notin \operatorname{int} P, \forall x, y \in X.$$

定义 1[6] 设 X 是实 Banach 空间，P 是 X 中的一个锥，$\eta: K \times K \to X$，称映射 $f: X \to Y$

收稿日期：2007-08-13

作者简介：程君岭（1983- ），男，浙江临海人，硕士研究生，研究方向：非线性分析

是 X 上关于锥 P 的一个 η-凸映射，如果对 $\forall x,y\in X$ ，$\alpha\in[0,1]$，下面的条件成立：$\alpha f(y)+(1-\alpha)f(x)-f(x+\alpha\eta(y,x))\in P$，则简称 f 为 η-P-凸映射.

定义 2　称映射 $y\to\eta(y,\cdot)$ 为仿射，若对 $\forall x,y_1,y_2\in K$ 和 $\alpha\in R$，有 $\eta(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2,x)=\alpha\eta(y_1,x)+(1-\alpha)\eta(y_2,x)$，由定义 1 容易证明 $y\to\eta(y,\cdot)$ 是仿射的充要条件是：对 $\forall x,y_i\in K$，$t_i\in R(i=1,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n}t_i=1$，$\eta(\sum_{i=1}^{n}t_iy_i,x)=\sum_{i=1}^{n}t_i\eta(y_i,x)$.

定义 3　称向量值映射 $\eta:K\times K\to X$ 满足条件 M，若对 $\forall x,y\in K$，$\forall\alpha\in[0,1]$，有

（M 1）$\eta(x+\alpha\eta(y,x),x)=\alpha\eta(y,x)$，

（M 2）$\eta(x,x)=0$.

定义 4　设 $F:K\to Y$，$x_0\in K$，如果对 $\forall\{x_n\}\subset K$，当 x_n 弱收敛到 x_0 时，都有 $F(x_n)$ 弱收敛到 $F(x_0)$，即对 $\forall\{x_n\}\subset K$，$x_n\xrightarrow{w}x_0\Rightarrow F(x_n)\xrightarrow{w}F(x_0)$，则称 F 在 x_0 处是弱连续的．如果 F 在集合 K 中的每一点都是弱连续的，则称 F 在 K 上弱连续.

定义 5　设 K 是拓扑线性空间 X 中的非空子集．称集值映射 $F:K\to 2^X$ 是一个 KKM-映射．如果对任意的子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\in K$，总有 $co\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}F(x_i)$.

这里 $co\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示集合 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的凸包.

定义 6　设 $T:K\to 2^{H(X,Y)}$，$C:K\to 2^Y$ 是两个集值映射，且对 $\forall x\in K$，$C(x)$ 是 Y 中闭凸尖锥，$\eta:K\times K\to X$，P 是 Y 中的凸锥，T 称为

（1）在 K 上是 η-P-伪单调的，若对 $\forall x,y\in K$ 和 $\forall f_1\in T(x),\forall f_2\in T(y)$ 都有

$$\langle f_1'(x),\eta(y,x)\rangle\in P\Rightarrow\langle f_2'(x),\eta(y,x)\rangle\in P；$$

（2）在 K 上是 η-C_x-伪单调的，若对 $\forall x,y\in K$ 和 $\forall f_1\in T(x),\forall f_2\in T(y)$ 都有

$$\langle f_1'(x),\eta(y,x)\rangle\notin C(x)\Rightarrow\langle f_2'(x),\eta(y,x)\rangle\notin C(x).$$

定义 7[7]　设 $F:K\to 2^Y$ 是集值映射，$x_0\in X$，称 F 在 x_0 是下半连续的，如果对任意的开集 $V\subset Y$ 且 $F(x_0)\bigcap V=\varnothing$，存在 x_0 在 X 中开邻域 U，使得 $\forall x\in U$，有 $F(x)\bigcap V=\varnothing$．称 F 在 X 上为下半连续，如果 F 在 X 中的每一点均下半连续.

定义 8　设 K 是 X 上的一个子集，$W:K\to 2^Y$ 是一个集值映射，W 图形表示为

$$\xi(W)=\{(x,z)\in K\times Y\mid x\in K,z\in W(x)\}.$$

引理 1[2]　设 P 是 Banach 空间 X 中的闭凸尖锥，且 $\operatorname{int}P\neq\varnothing$，$\forall x,y\in X$，则有：

（1）若 $y-x\in\operatorname{int}P$，$y\notin\operatorname{int}P$，则 $x\notin\operatorname{int}P$；

（2）若 $y-x\in P$，$y\notin\operatorname{int}P$，则 $x\notin\operatorname{int}P$；

（3）若 $y-x\in-\operatorname{int}P$，$y\notin-\operatorname{int}P$，则 $x\notin-\operatorname{int}P$；

（4）若 $y-x\in-P$，$y\notin-\operatorname{int}P$，则 $x\notin-\operatorname{int}P$.

引理 2[7] 设$K\subseteq X$，$F:K\to 2^Y$是一个集值映射，$x\in K$．称F在x处下半连续，若$\forall f\in F(x)$，对$\forall\{x_\alpha\}\subset K$，$x_\alpha\to x$，$\exists\{f_\alpha\}\subset Y$，$f_\alpha\in F(x_\alpha)$使得$f_\alpha\to f$．若在$X$上的所有点都下半连续，则称$F$在$K$上下半连续.

引理 3 设X,Y是 Banach 空间，K是X中的非空凸子集，$T:K\to 2^{H(X,Y)}$，$C:K\to 2^Y$是两个集值映射，且对$\forall x\in K$，$C(x)$是Y中闭凸尖锥，映射$\eta:K\times K\to X$满足条件M，考虑以下问题：

（1）$x\in K$，使得$\forall y\in K,\exists f_1\in T(x):\langle f_1'(x),\eta(y,x)\rangle\notin -\operatorname{int}C(x)$；

（2）$x\in K$，使$\forall y\in K,\exists f_2\in T(y):\langle f_2'(x),\eta(y,x)\rangle\notin -\operatorname{int}C(x)$；

则，当T是在K上下半连续时，（2）$\Rightarrow$（1）.

证明：设x满足（2），但不满足（1），即$\exists y\in K$，对$\forall f_1\in T(X)$，都有

$$\langle f_1'(x),\eta(y,x)\rangle\in -\operatorname{int}C(x).$$

不妨令$x_\alpha=x+\alpha\eta(y,x)$，显然当$\alpha\to 0^+$时有$x_\alpha\to x$，因为$T$在$K$上下半连续，所以对$\{x_\alpha\}$存在$\{f_\alpha\}$，$f_\alpha\in T(x_\alpha)$使得$f_\alpha\to f_1$，所以存在$\delta>0$，当$\alpha\in(0,\delta)$时，有

$$\langle f_\alpha'(x),\eta(y,x)\rangle\in -\operatorname{int}C(x),\forall f_\alpha\in T(x_\alpha).$$

由η满足条件M得

$$\eta(x_\alpha,x)=\eta(x+\alpha\eta(y,x),x)=\alpha\eta(y,x),$$

故有

$$\langle f_\alpha'(x),\eta(x_\alpha,x)\rangle\in -\operatorname{int}C(x),\forall f_\alpha\in T(x_\alpha).$$

这与（2）矛盾.

引理 4[8] 设K是 Hausdorff 拓扑线性空间X中的非空子集，设$F:K\to 2^X$是一个 KKM-映射，使得对$\forall y\in K$，$F(y)$为闭集，且存在一点$y^*\in K$，使得$F(y^*)$是紧集，则$\bigcap_{y\in K}F(y)\neq\varnothing$.

2 主要结果

定理 1 设X，Y是实 Banach 空间，$K\subset X$是非空紧凸集，$C:K\to 2^Y$，对$\forall x\in K$，$C(x)$是Y中的闭凸尖锥，且$\operatorname{int}C(x)=\varnothing$．$W(x)=Y\setminus(-\operatorname{int}C(x))$，$\xi(W)$在$X\times Y$上是弱闭的．$H(X,Y)$是从$X$到$Y$上的 G-可微的广义$C(x)$-凸算子全体，$T:K\to 2^{H(X,Y)}$，$\eta:K\times K\to X$满足以下条件：

（1）T在K上是η-C_x-伪单调和下半连续的，且有非空集值；

（2）对$\forall f\in H(X,Y)$，f'是在X上是弱连续的；

（3）映射$y\to\eta(y,\cdot)$仿射，映射$x\to\eta(\cdot,x)$连续，且η满足条件M.

则 GVQVIP 有解.

证明：设集值映射$F,G:K\to 2^K$，

$$F(y)=\left\{x\in K \mid \exists f\in T(x),\left\langle f'(x),\eta(y,x)\right\rangle\notin -\operatorname{int}C(x)\right\},$$

$$G(y)=\left\{x\in K \mid \forall f_1\in T(y),\left\langle f_1'(x),\eta(y,x)\right\rangle\notin -\operatorname{int}C(x)\right\},\quad y\in K.$$

现从以下五个步骤证明：

（i）F 是在 K 上的 KKM-映射．反证法：若 F 不是在 K 上的 KKM-映射，则存在一个有限子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\in K$，$x=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$，$\lambda_i\geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，使 $x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{n}F(x_i)$，则对所有的 $f\in T(x)$，都有 $\left\langle f'(x),\eta(x_i,x)\right\rangle\in -\operatorname{int}C(x)$，$i=1,2,\cdots,n$．

因为 $C(x)$ 是 Y 中的闭凸点锥，所以有 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left\langle f'(x),\eta(x_i,x)\right\rangle\in -\operatorname{int}C(x)$．

由 $f'(x)\in L(X,Y)$，映射 $y\to\eta(y,\cdot)$ 仿射得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left\langle f'(x),\eta(x_i,x)\right\rangle=\left\langle f'(x),\eta\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i,x\right)\right\rangle\in -\operatorname{int}C(x).$$

因为 $\forall x\in K$，$\eta(x,x)=0$，所以可得 $0\in -\operatorname{int}C(x)$，这与 $C(x)$ 是点锥矛盾．

（ii）因为 T 在 K 上 η-C_x-伪单调，所以有 $F(y)\subseteq G(y)$，故由 F 是 KKM-映射得到 G 也是 KKM-映射．

（iii）因为 $F(y)\subseteq G(y)$，所以 $\bigcap\limits_{y\in K}F(y)\subseteq\bigcap\limits_{y\in K}G(y)$，由于 T 在 K 上是下半连续，所以由引理 2 可得 $\bigcap\limits_{y\in K}F(y)\supseteq\bigcap\limits_{y\in K}G(y)$，故 $\bigcap\limits_{y\in K}F(y)=\bigcap\limits_{y\in K}G(y)$．

（iv）对 $\forall y\in K$，$G(y)$ 是弱闭集．在 K 中任意取定 y，令 $\{x_n\}$ 是 $G(y)$ 中的收敛序列，且有 $x_n\xrightarrow{w}x\in K$．则对 $\forall f_1\in T(y)$ 有

$$\left\langle f_1'(x_n),\eta(y,x_n)\right\rangle\in W(x_n)=Y\setminus -\operatorname{int}C(x_n),\forall n.$$

由 $f_1'(x_n)\in L(X,Y)$，则对每个 n，$f_1'(x_n)$ 都是从弱拓扑 X 到弱拓扑 Y 上的连续线性算子，不妨令 $n=N$，因为映射 $x\to\eta(\cdot,x)$ 连续，所以

$$\left\langle f_1'(x_N),\eta(y,x_n)\right\rangle\xrightarrow{w}\left\langle f_1'(x_N),\eta(y,x)\right\rangle.$$

由于 $f_1':X\to L(X,Y)$，f_1' 是在 X 上弱连续的，即是从弱拓扑 X 到弱拓扑 $L(X,Y)$ 上的连续算子，则

$$f_1'(x_N)\xrightarrow{w}f_1'(x)\in L(X,\ Y),$$

故有 $\left\langle f_1'(x_n),\eta(y,x_n)\right\rangle\xrightarrow{w}\left\langle f_1'(x),\eta(y,x)\right\rangle\in Y$．

由于 $\xi(W)$ 是弱闭的，所以有

$$\left(x_n,\left\langle f_1'(x_n),\eta(y,x_n)\right\rangle\right)\xrightarrow{w}\left(x,\left\langle f_1'(x),\eta(y,x)\right\rangle\right)\in\xi(W),$$

因此对 $\forall f_1\in T(y)$，有

$$\left\langle f_1'(x),\eta(y,x)\right\rangle\in W(x)=Y\setminus\left(-\operatorname{int}C(x)\right),$$

则 $x\in G(y)$，故 $G(y)\subseteq K$ 在 K 中弱闭.

（v）因为 $K\subset X$ 是弱紧的，且 $G(y)\subseteq K$，则对 $\forall y\in K$，$G(y)$ 在 K 中是弱紧的. 由 KKM 定理得 $\bigcap\limits_{y\in K} G(y)\neq\varnothing$，即 $\bigcap\limits_{y\in K} F(y)\neq\varnothing$. 因此存在 $x\in K$，使得

$$\forall y\in K,\exists f\in T(x):\langle f'(x),\eta(y,x)\rangle\notin -\operatorname{int}C(x).$$

定理 1 证毕.

设 X，Y 是实 Banach 空间，K 是 X 中的非空闭凸子集，$T:K\to 2^{H(X,Y)}$，$C:K\to 2^{Y}$ 都为集值映射，且对 $\forall x\in K$，$C(x)$ 是 Y 中真闭凸尖锥.

GVVIP　求 $x\in K$，使得 $\forall y\in K,\exists f\in T(x):(f,y-x)\notin -\operatorname{int}C(x)$.

定理 2　设 K 是 X 中的非空凸子集，$\eta:K\times K\to X$，$\forall f\in H(X,Y)$，$x\in K$，f 是 K 上的 η-$C(x)$-凸映射，$T:K\to 2^{H(X,Y)}$，则 GVQVIP 与 GVVIP 有相同的解.

证明：设 x 是 GVQVIP 的解，即 $\exists x\in K$，对

$$\forall y\in K,\exists f\in T(x):\langle f'(x),\eta(y,x)\rangle\notin -\operatorname{int}C(x),$$

由于 f 是 K 上的 η-$C(x)$-凸映射，故对 $\forall y\in K$ 有

$$\alpha f(y)+(1-\alpha)f(x)-f\big(x+\alpha\eta(y,x)\big)\in C(x),$$

所以 $$f(y)-f(x)-\alpha^{-1}\Big[f\big(x+\alpha\eta(y,x)\big)-f(x)\Big]\in C(x).$$

又因为 f 是 K 上是 G-可微性的，则当 $\alpha\to 0$ 时有 $f(y)-f(x)-\langle f'(x),\eta(y,x)\rangle\in C(x)$，由引理 1 得 $f(y)-f(x)=\langle f,y-x\rangle\notin -\operatorname{int}C(x)$，故 x 是 GVVIP 的解.

反之，若 x 是 GVVIP 的解，即 $\exists x\in K$，对 $\forall y\in K,\exists f\in T(x):\langle f,y-x\rangle\notin -\operatorname{int}C(x)$，又因为 f 是在 K 上的 η-$C(x)$-凸映射，则对 $\forall y\in K$ 有

$$\alpha f(y)+(1-\alpha)f(x)-f\big(x+\alpha\eta(y,x)\big)\in C(x),$$

所以 $$f(y)-f(x)-\alpha^{-1}\Big[f\big(x+\alpha\eta(y,x)\big)-f(x)\Big]\in C(x).$$

当 $\alpha\to 0$ 时，由 f 的 G-可微性，有 $f(y)-f(x)-\langle f'(x),\eta(y,x)\rangle\in C(x)$，由引理 1 可得 $\langle f'(x),\eta(y,x)\rangle\notin -\operatorname{int}C(x)$. 故 x 是 GVQVIP 的解.

参考文献

[1] Cottle R W, Giannessi F, Lions J L, et al. Variational inequality and Complementary problems [C] // Giannessi F. Theorems of alterative, quadratic programs and complementary problems. New York: John Wiley, 1980: 151-186.

[2] Chen G Y. Existence of solutions for a vector variational inequality: An extension of the Hartmann-Stampacchia Theorem [J]. J Optim Theory Appl, 1992, 74: 445-456.

[3] Yu S J, Yao J C. On vector variational inequalities [J]. J Optim Theory Appl, 1996, 89: 749-769.

[4] Lin K L, Yang D P, Yao J C. Generalized vector variational inequalities [J]. J Optim Theory Appl, 1997, 92: 117-125.

[5] Konnov I. V, Yao J C. On the Generalized Vector Variational Inequality Problem [J]. J Math Anal Appl, 1997, 206, 42-58.

[6] Isreal A B, Mond B. What is invexity? [J]. J Austral Math Soc: Series B, 1986, 28: 1-9.

[7] Fu J Y. Generalized Vector Quasi-equilibium Problems [J]. Math Methods Oper Res, 2000, 52: 57-64.

[8] Chen G Y, Craven B D. A vector variational inequality and optimization over an efficient set [J]. Zeitschriftfur Oper Res, 1990, 3: 1-12.

Existence of Solutions for a New Generalized Set-valued Quasi-variational Inequality Problem

CHENG Junling, HE Zhongquan

(School of Mathematics and Information, West China Normal University, Nanchong, China 637002)

Abstract: This paper discusses a new generalized Quasi-vector variational inequality problem of Gateaux differential mappings in Banach space and proves the existence of a solution for such a problem by the KKM theorem. It indicates that this problem is equal to the generalized vector variational inequality problem which raised by Konnov I V and Yao J C in suitable condition.

Key words: Quasi-vector variational inequality; KKM mapping; η-P-convex mapping

（编辑：王一芳）